ΙΩΑΝΝΟΥ Θ. ΧΑ·Ι·ΝΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

«Διαφορικός καί ὁλοκληρωτικός Λογισμός συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν. – Διαφορική Γεωμετρία. Διανυσματική Ἀνάλυσις».

Διά τούς σπουδαστάς τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου, τούς φοιτητάς Πολυτεχνικῶν καί Φυσικομαθηματικῶν Σχολῶν κ.ἄ.

ΤΟΜΟΣ Β

ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΙΣ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ – ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ

ΑΘΗΝΑΙ 1991

Edition 1991

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ παρών τόμος ἀποτελεῖ συνέχεια τῆς ὕλης τῶν μαθημάτων τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν, τά ὁποῖα διδάσκω εἰς τούς σπουδαστάς τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου.

Εἰς τόν παρόντα τόμον κατεβλήθει κάθε προσπάθεια ὥστε νά περιορισθῶ ἀκριβῶς εἰς αὐτά τά Κεφάλαια, τά ὁποῖα θεωροῦνται ἀπαραίτητα διά τήν κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν εἰς τά Ἀνώτερα Μαθηματικά ὑπό τῶν Τεχνολογικῶν Ἑδρῶν τοῦ Ἱδρύματος. Παρ᾽ ὅτι ὁ τόμος αὐτός παρουσιάζει ἕναν ἱκανόν ἀριθμόν σελίδων, ἐν τούτοις περιορίσθην ἀκριβῶς εἰς τάς πλέον ἀναγκαίας παραγράφους, αἱ ὁποῖαι ἐξ ἄλλου ἔχουν ζητηθεῖ καί ἐγκριθεῖ ὑπό τῶν Σχολῶν τοῦ Ἱδρύματος ὅπως διδάσκωνται κατά τά τέσσαρα πρῶτα ἑξάμηνα εἰς τό Ε.Μ.Π. Ἐξ ἄλλου εἰς τόν παρόντα τόμον ἔχομεν συμπεριλάβει ἕνα λίαν ἱκανοποιητικόν ἀριθμόν παραδειγμάτων, ἀσκήσεων πρός λύσιν ὡς καί πολλῶν ἐφαρμογῶν ἐκ τῆς Μηχανικῆς-Ἠλεκτρισμοῦ-Γεωμετρίας κ.τ.λ.

Εἰς τόν παρόντα τόμον ἡ ἐπιλεγεῖσα ὕλη κατενεμήθη τελικῶς εἰς δύο μέρη.

Εἰς τό πρῶτον μέρος διαπραγματευόμεθα τάς συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν καί κυρίως τήν ἔννοιαν τοῦ διπλοῦ-τριπλοῦ καί γενικῶς πολλαπλοῦ κατά Riemann ὁλοκληρώματος. Δίδομεν δέ ἰδιαιτέραν βαρύτητα εἰς τό Κεφάλαιον τῆς Διανυσματικῆς Ἀναλύσεως. Ἐπίσης εἰς αὐτό τό μέρος δίδομεν καί τάς βασικάς ἐννοίας ἐκ τῆς θεωρίας τῶν Καμπύλων καί Ἐπιφανειῶν μέ ἐφαρμογήν εἰς τά Ἐπικαμπύλια καί Ἐπιφανειακά Ὁλοκληρώματα.

Θεωρῶ καθῆκον μου νά ἐκφράσω τάς θερμάς μου εὐχαριστίας προς τούς Επ. Καθηγητας Καρανάσιον Σωτήριον, Βλασσόπουλον Βασίλειον, Φελλούρην Ἀργύριον καθώς καί τούς βοηθούς κ.κ. Βεληβάσην Νικόλαον, Πέτρου Ἰωάννην δί ὅλας τάς εὐστόχους παρατηρήσεις καί ὑποδείξεις πού ἔκαμναν κατα τάς διαφόρους ἐκδόσεις τοῦ Βιβλίου καί αἱ ὁποῖαι συνετέλεσαν εἰς τήν ἀρτιωτέραν ἐμφάνισιν αὐτοῦ.

Ἀθῆναι Ἀπρίλιος 1991

ΙΩΑΝΝΗΣ Θ. ΧΑΪΝΗΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΣΕΛΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I: Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΡΙΣΜΕΝΑΙ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΜΕ ΤΙΜΑΣ ΕΠΙΣΗΣ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III: ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ-ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI : ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΣΕΛΙΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ MAINARDI - CODAZZI

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Συμπληρώματα ἐπί τῶν ἀκροτάτων συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν 491

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

§1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ NORME – ΧΩΡΟΣ ΜΕ NORME

Ὁρισμός I–1–1. *Εἷς διανυσματικός χῶρος* E *ἐπί τοῦ σώματος* $\mathbb{R}$ *τῶν πραγμ. ἀριθμῶν λέγομεν ὅτι εἶναι εἷς χῶρος μέ norme, ἐάν ἔχῃ ὁρισθῆ ἐπί τοῦ* E *μία μή ἀρνητική συνάρτησις, συμβολιζομένη διά* $\|\cdot\|$, *δηλ.* $E \ni x \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}_0^+$, *ἔχουσα τάς κάτωθι ἰδιότητας:*

1ον/ $\|x\| = 0$, ἐάν καί μόνον, ἐάν $x = \Theta$ *)

2ον/ $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ διά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ καί $x \in E$

3ον/ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν $x, y \in E$. (Τριγωνική ἰδιότης).

Ἡ συνάρτησις $\|\cdot\|$ καλεῖται **norme** ἐπί τοῦ E, τό δέ ζεῦγος $(E, \|\cdot\|)$ καλεῖται ***χῶρος μέ norme***. Αἱ ἰδιότητες 2 καί 3 σημαίνουν, ὅτι ἡ $\|x\|$ εἶναι μία **κυρτή** συνάρτησις ἐπί τοῦ E.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων εὐκόλως διαπιστοῦνται τά ἀκόλουθα:

1ον/ $\|-x\| = \|x\|$

2ον/ $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|$

3ον/ $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

Τό σύμβολον $\|\cdot\|$ θά χρησιμοποιῶμεν ὅταν πρόκειται περί μιᾶς norme ἐπί τοῦ E. Ἐάν ἔχωμεν πλείονας normes ἐπί τοῦ αὐτοῦ χώρου, τότε θά χρησιμοποιῶμεν τά σύμβολα $N_1(\cdot)$, $N_2(\cdot)$, κ.τ.λ.

Παραδείγματα: 1ον/ Ἔστω $E = \mathbb{R}$. Ἡ συνάρτησις $x \longrightarrow |x|$ εἶναι προφανῶς μία norme ἐπί τῆς εὐθείας $\mathbb{R}$.

2ον/. Θεωροῦμεν τόν διανυσματικόν χῶρον E τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ συνήθους χώρου. Τό ἀπόλυτον μῆκος αὐτῶν εἶναι μία norme ἐπί τοῦ E.

3ον/ Ἐπί τοῦ Εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^\nu$ ὁρίζομεν τρεῖς normes: $N_1(\cdot)$, $N_2(\cdot)$, $N_3(\cdot)$ ὡς ἀκο-

---

* *Συμβολίζομεν μέ* Θ *τό μηδενικόν στοιχεῖον τοῦ διανυσματικοῦ χώρου.*

Λύσις: Ἔστω $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_p)$ ἕν διάνυσμα τοῦ $\mathbb{R}^p$. Ὁρίζομεν:

i) $N_1(x) = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_p^2} = \left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2\right)^{1/2}$

ii) $N_2(x) = |\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_p| = \sum_{i=1}^{p}|\xi_i|$.

iii) $N_3(x) = \max(|\xi_1|,|\xi_2|,\dots,|\xi_p|) = \max_{1\le i\le p}(|\xi_i|)$.

Αἱ οὕτω ὁρισθεῖσαι συναρτήσεις εἶναι normes.

Αἱ ἰδιότητες 1 καί 2, προφανῶς, πληροῦνται. Ἡ 3η ἰδιότης χρήζει ἀποδείξεως.

Διά τήν $N_1(x)$.

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν: $\left(\sum_{i=1}^{p}(\xi_i+\eta_i)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{p}\eta_i^2\right)^{1/2}$.

Δι' ὑψώσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εἰς τό τετράγωνον, ἀρκεῖ νά δείξωμεν:

$$\sum_{i=1}^{p}(\xi_i+\eta_i)^2 \le \sum_{i=1}^{p}\xi_i^2+\sum_{i=1}^{p}\eta_i^2+2\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\eta_i^2\right)^{1/2}$$ ἤ ἀρκεῖ νά δείξωμεν:

$$\sum_{i=1}^{p}|\xi_i|\cdot|\eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\eta_i^2\right)^{1/2}.$$

Ἡ τελευταία ἀνισότης εἶναι ἡ γνωστή ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ἀνισότης τῶν Cauchy-Schwartz.

Διά τήν $N_2(x)$.

Διά κάθε $1\le i\le p$ ἔχομεν:

$$|\xi_i+\eta_i| \le |\xi_i|+|\eta_i|, \text{ ὅθεν καί } \sum_{i=1}^{p}|\xi_i+\eta_i| \le \sum_{i=1}^{p}|\xi_i|+\sum_{i=1}^{p}|\eta_i|.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως καί τοῦ ὁρισμοῦ τῆς $N_2(x)$ ἔχομεν:

$$N_2(x+y) = \sum_{i=1}^{p}|\xi_i+\eta_i| \le \sum_{i=1}^{p}|\xi_i| + \sum_{i=1}^{p}|\eta_i| = N_2(x)+N_2(y).$$

Διά τήν $N_3(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ἔχομεν } N_3(x+y) &= \max(|\xi_1+\eta_1|,|\xi_2+\eta_2|,\dots,|\xi_p+\eta_p|) \\ &\le \max\{(|\xi_1|+|\eta_1|),(|\xi_2|+|\eta_2|),\dots,(|\xi_p|+|\eta_p|)\} \\ &\le \max(|\xi_1|,|\xi_2|,\dots,|\xi_p|)+\max(|\eta_1|,|\eta_2|,\dots,|\eta_p|) = N_3(x)+N_3(y). \end{aligned}$$

Ὥστε: $N_3(x+y) \le N_3(x)+N_3(y)$.

Σχέσεις μεταξύ τῶν τριῶν προηγουμένων normes.

Πρότασις I-1-1. Ἔστω τό διάνυσμα $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p)\in\mathbb{R}^p$. Θά δείξωμεν ὅτι:

$$N_3(x)\leq N_1(x)\leq N_2(x)\leq p\cdot N_3(x)$$

Ἀπόδειξις: α) Ἔστω $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p)$. Διά κάποιο i, ὅπου $1\leq i\leq p$, θά ἔχωμεν: $N_3^2(x)=\xi_i^2$. Συνεπῶς $N_3^2(x)\leq N_1^2(x)$ ἤ $N_3(x)\leq N_1(x)$.

β). Εἶναι δέ, $N_1^2(x)=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_p^2\leq(|\xi_1|+|\xi_2|+\cdots+|\xi_p|)^2=N_2^2(x)$.

Ὅθεν $N_1(x)\leq N_2(x)$.

γ) Διά κάθε $1\leq i\leq p$ εἶναι $|\xi_i|\leq N_3(x)$.

$$\text{Συνεπῶς:}\quad N_2(x)=|\xi_1|+|\xi_2|+\cdots+|\xi_p|\leq p\cdot N_3(x).$$

Ἰσοδύναμοι normes

Ὁρισμός I-1-2. *Ἔστω ὁ διανυσματικός χῶρος E ἐπί τοῦ σώματος* $\mathbb{R}$ *τῶν πραγμ. ἀριθμῶν καί* N, N' *δύο normes ἐπ' αὐτοῦ. Θά λέγωμεν ὅτι ἡ norme* N' *εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν norme* N $(N'\sim N)$, *ἐάν ὑπάρχουν δύο θετικοί ἀριθμοί* α,β $(0<\alpha\leq\beta)$ *τοιοῦτοι, ὥστε διά κάθε* $x\in E$ *νά ἔχωμεν:*

$$\alpha\cdot N(x)\leq N'(x)\leq\beta\cdot N(x). \qquad (1)$$

Ἡ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα σχέσις "$\sim$", εἰς τό σύνολον τῶν normes ἑνός διανυσματικοῦ χώρου E εἶναι μία σχέσις ἰσοδυναμίας.

Πράγματι:

1ον/ Ἡ "$\sim$" εἶναι ἀνακλαστική: Ἐάν λάβωμεν $N'=N$ καί $\alpha=\beta=1$ ἡ σχέσις (1) ἐπαληθεύεται. Συνεπῶς διά κάθε norme N τοῦ E ἔχομεν $N\sim N$.

2ον/ Ἡ "$\sim$" εἶναι συμμετρική: Διά κάθε $x\in E$ ἔχομεν:

$$\alpha\cdot N(x)\leq N'(x)\leq\beta\cdot N(x)\Longrightarrow\frac{1}{\beta}N'(x)\leq N(x)\leq\frac{1}{\alpha}N'(x).$$

3ον/ Ἡ "$\sim$" εἶναι μεταβατική: Ἔστω ὅτι ἡ $N'\sim N$ καί ἡ $N\sim N''$. Θά δείξωμεν ὅτι καί $N'\sim N''$.

Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τῆς "$\sim$" θά ἔχωμεν:

$$\alpha\cdot N(x)\leq N'(x)\leq\beta\cdot N(x)$$

$$\gamma\cdot N''(x)\leq N(x)\leq\delta\cdot N''(x).$$

Διά πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων κατά μέλη λαμβάνομεν:

$$\alpha\cdot\gamma\cdot N''(x)\leq N'(x)\leq\beta\cdot\delta\cdot N''(x)$$

δηλ. $N'\sim N''$.

Συμφώνως πρός τήν Πρότασιν Ι-1-1 αἱ τρεῖς normes N_1, N_2, N_3 αἱ ὁρισθεῖσαι ἐπί τοῦ χώρου $\mathbb{R}^p$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ὅπως θά ἴδωμεν κατωτέρω ἡ ἀνωτέρω γνῶσις τῆς ἰσοδυναμίας ἔχει μεγάλην σημασίαν εἰς τήν μετρικήν τοπολογίαν.

§2. ΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Ὁρισμός Ι-2-1. *Καλοῦμεν ἀπόστασιν (ἤ μετρικήν) ἐπί τοῦ συνόλου* Ε ***κάθε μή ἀρνητικήν συνάρτησιν*** d ***ὡρισμένην ἐπί τοῦ*** Ε×Ε, ***δηλ.*** $E\times E \ni (x,y) \xrightarrow{d} d(x,y) \in \mathbb{R}_0^+$ ***καί ἡ ὁποία ἔχει τάς ἀκολούθους ἰδιότητας***:

1η/ $d(x,y)=0 \longleftrightarrow x=y$

2α/ $d(x,y)=d(y,x)$, διά κάθε $(x,y)\in E\times E$ (Συμμετρική ἰδιότης).

3η/ $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν x,y,z τοῦ Ε (Τριγωνική ἰδιότης).

Ἕνα σύνολον Ε ἐφωδιασμένον μέ μίαν ἀπόστασιν d καλεῖται ***μετρικός χῶρος*** καί γράφομεν (Ε,d) ἤ ἁπλῶς Ε, ἐάν δέν ὑπάρχη κίνδυνος συγχύσεως.

Σημείωσις: Ἐάν ἱκανοποιοῦνται μόνον ἡ 2α καί 3η ἰδιότης διά τήν d, οὐχί ὅμως κατ' ἀνάγκην καί ἡ 1η, τότε ἡ d καλεῖται ***ψευδο-ἀπόστασις***, ἤ ἄλλως ***ψευδομετρική ἐπί τοῦ*** Ε, τό δέ ζεῦγος (Ε,d) καλεῖται τότε ***ψευδομετρικός χῶρος***.

Οὕτω, π.χ., ἄν Ε εἶναι οἱονδήποτε σύνολον καί ὁρίσωμεν: $d(x,y)=0$ διά κάθε $(x,y)\in E\times E$, τότε ἡ d, προφανῶς, δέν εἶναι ἀπόστασις - ἐκτός ἄν τό $E=\emptyset$ ἤ ἔχη ἕν μόνον σημεῖον -. Αὕτη ὅμως, ὡς εὐκόλως συνάγεται, εἶναι μία ψευδομετρική ἐπί τοῦ Ε.

Συμφώνως πρός τήν 3ην ἰδιότητα οἱωνδήποτε ὄντων τῶν x,y,z τοῦ Ε θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z) \\ d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \end{array}\right\}$$

Συνεπῶς:

$$\left.\begin{array}{l} d(x,z)-d(x,y)\leq d(y,z) \\ d(x,y)-d(x,z)\leq d(y,z) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$|d(x,z)-d(x,y)|\leq d(y,z).$$

Παραδείγματα: 1ον/ Ὁ συνήθης χῶρος ἐφωδιασμένος μέ τήν ἀπόστασιν τήν διδομένην ὑπό τήν ἔννοιαν τῆς Εὐκλειδείου γεωμετρίας εἶναι ἕνας μετρικός χῶρος.

2ον/ Ἡ πραγματικὴ εὐθεῖα $\mathbb{R}$ ἤ τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον $\mathbb{C}$ ἐφωδιασμένον μὲ τὴν ἀπόστασιν $d(x,y)=|x-y|$, εἶναι μετρικὸς χῶρος.

3ον/ ὁ Εὐκλείδειος χῶρος $\mathbb{R}^p$ καθίσταται ἕνας μετρικὸς χῶρος, ἐὰν ὁρίσωμεν εἰς αὐτὸν μίαν τῶν κάτωθι ἀποστάσεων:

Ἔστωσαν πρὸς τούτοις, $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_p)$ δύο στοιχεῖα τοῦ χώρου τούτου:

Ὁρίζομεν:

$$d_1(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{p}(\xi_i-\eta_i)^2\Big)^{1/2} \qquad (\text{Εὐκλείδειος ἀπόστασις})$$

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{p}|\xi_i-\eta_i|$$

$$d_3(x,y) = \max_{1\le i\le p}\big\{|\xi_i-\eta_i|\big\}.$$

Ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς norme οὕτω καὶ ἐδῶ ἀποδεικνύεται, ὅτι ἑκάστη τῶν τριῶν ἀνωτέρω συναρτήσεων ὁρίζει μίαν ἀπόστασιν καὶ μάλιστα ἰσχύει:

$$d_3(x,y) \le d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le p\cdot d_3(x,y).$$

4ον/ Ἔστω $C[a,b]$ τὸ σύνολον τῶν συνεχῶν συναρτήσεων τῶν ὡρισμένων εἰς τὸ διάστημα $[a,b]$. Τοῦτο καθίσταται μετρικὸς χῶρος, ἐὰν ὁρίσωμεν ἐν αὐτῷ ὡς ἀπόστασιν μεταξὺ δύο συναρτήσεων $x(t)$ καὶ $y(t)$ αὐτοῦ τὴν διδομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$d(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|.$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις ὁρίζει μίαν ἀπόστασιν.

Ὁρισμὸς τῆς ἀποστάσεως μέσῳ τῆς norme.

Ἔστω ὁ πραγματικὸς διανυσματικὸς χῶρος E μὲ norme. Οἱωνδήποτε ὄντων τῶν $(x,y)\in E\times E$ θέτομεν:

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

Ἡ οὕτω ὁρισθεῖσα συνάρτησις $d(\cdot,\cdot)$ εἶναι πράγματι μία ἀπόστασις, διότι:

1ον/ $\quad d(x,y)=0 \longleftrightarrow \|x-y\|=0 \longleftrightarrow x-y=\Theta \longleftrightarrow x=y.$

2ον/ $\quad d(x,y)=\|x-y\|=\|-(y-x)\|=\|y-x\|=d(y,x).$

3ον/ $\quad d(x,z)=\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\le\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z).$

Συνεπῶς, ἕνας διανυσματικὸς χῶρος μὲ norme εἶναι συγχρόνως ἕνας μετρικὸς χῶρος.

Διά τήν ἀπόστασιν ἰσχύουν καί τά κάτωθι:

1ον/. $$d(x,\theta) = \|x-\theta\| = \|x\|.$$

2ον/. $$d(x+a, y+a) = \|(x+a)-(y+a)\| = \|x-y\| = d(x,y).$$

Ἔστω E ἕνας μετρικός χῶρος καί E′ ἕν ὑποσύνολον αὐτοῦ. Ὁ E′ καθίσταται καί αὐτός μετρικός χῶρος λαμβάνοντες ὡς ἀπόστασιν δύο στοιχείων τοῦ E′ τήν ἀπόστασίν των ἐντός τοῦ E.

§ 3. ΟΡΙΟΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΕΝΤΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Ἔστω E ἕνας μετρικός χῶρος καί d ἡ ἀπόστασις ἐντός αὐτοῦ. Εἰς τό ἑξῆς θά τόν συμβολίζωμεν οὕτω: (E, d).

Ὁρισμός I-3-1. ***Θά λέγωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία*** (x_n), $n \geq 1$ ***τῶν σημείων τοῦ*** E ***τείνει πρός τό σημεῖον*** $x \in E$, ***ἐάν ἡ*** $d(x_n, x) \to 0$ τοῦ $n \uparrow \infty$, ***ἤ, ἄλλως διά κάθε*** $\varepsilon > 0$ ***ὑπάρχει εἷς ἀριθμός*** $N(\varepsilon)$ ***τοιοῦτος, ὥστε διά*** $n \geq N(\varepsilon)$ ***νά ἔχωμεν***: $d(x_n, x) < \varepsilon$. ***Θά γράφωμεν δέ*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ἤ $x_n \to x$ τοῦ $n \uparrow \infty$.

Κατ' ἀναλογίαν πρός τήν σύγκλισιν τῶν ἀκολουθιῶν πραγμ. ἀριθμῶν ἔχομεν τάς κάτωθι προτάσεις:

Πρότασις I-3-1. Τό ὅριον τῆς ἀκολουθίας (x_n), $n \geq 1$ ἐντός τοῦ μετρικοῦ χώρου (E, d), ἄν ὑπάρχῃ, εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένον.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία (x_n), $n \geq 1$ τείνει πρός δύο διαφορετικά ὅρια, ἔστωσαν ταῦτα τά σημεῖα x καί x' τοῦ χώρου E. Θέτομεν:

$d(x,x') = a > 0$. Ἐπομένως διά $\varepsilon = \frac{a}{2}$ ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί N, N' τοιοῦτοι, ὥστε, συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τῆς συγκλίσεως, νά ἔχωμεν:

$$d(x_n, x) < \frac{a}{2} \text{ διά } n \geq N$$

$$d(x_n, x') < \frac{a}{2} \text{ διά } n \geq N'.$$

Ὅθεν, διά $n \geq \max(N, N')$ ἔχομεν:

$$d(x,x') \leq d(x_n,x) + d(x_n,x') < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a \quad \text{ἤ} \quad d(x,x') < a, \text{ ὅπερ ἄτοπον.}$$

Ὑπακολουθίαι:

Ἔστω $\{x_n\}$ μία ἀκολουθία σημείων τοῦ μετρικοῦ χώρου (E,d) καί $\{k_n\}$ μία ἀκολουθία

φυσικῶν ἀριθμῶν γνησίως αὔξουσα, δηλ. $k_n < k_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Ἐάν θεωρήσωμεν ἐκ τῆς ἀκολουθίας $\{x_n\}$ τούς ὅρους $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$, τότε ἔχομεν δημιουργήσει μίαν νέαν ἀκολουθίαν σημείων τοῦ E, διότι:

$$n \longrightarrow k_n \longrightarrow x_{k_n}$$

Ἡ οὕτω δημιουργηθεῖσα ἀκολουθία $\{x_{k_n}\}$ καλεῖται ***ὑπακολουθία*** τῆς $\{x_n\}$.

Ὡς ἐκ τοῦ τρόπου τῆς κατασκευῆς της τοῦ $n \longrightarrow \infty$ καί τό $k_n \longrightarrow \infty$. Ἤτοι διά κάθε N (φυσικόν) ὑπάρχει εἷς φυσικός $\bar{N}$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ σχέσις $n > N \longrightarrow k_n > \bar{N}$.

Πρότασις I-3-2. Ἐάν ἡ ἀκολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνη πρός τό x, τότε κάθε ὑπακολουθία αὐτῆς συγκλίνει πρός τό αὐτό ὅριον.[1)]

Ἀπόδειξις: Ἔστω $x_n \longrightarrow x$ τοῦ $n \uparrow \infty$. Ὅθεν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἷς θετικός ἀριθμός $N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ σχέσις $n > N(\varepsilon) \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ (1).

Λόγω τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὑπακολουθίας ὑπάρχει εἷς ἀκέραιος $\bar{N}(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ σχέσις $n > N(\varepsilon) \longrightarrow k_n > \bar{N}(\varepsilon)$. Ἐάν δέ $N_0(\varepsilon) = \max\{N(\varepsilon), \bar{N}(\varepsilon)\}$ καί ἐάν $k_n > N_0(\varepsilon)$, τότε, λόγω τῆς (1), θά ἔχωμεν καί $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon$. Ἄρα ἡ ὑπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ συγκλίνει πρός τό x.

Ὁ χῶρος $\mathbb{R}^p$.

Ἤδη ἄς ἐξετάσωμεν τήν περίπτωσιν τοῦ χώρου $\mathbb{R}^p$ μέ τάς τρεῖς ἐν αὐτῷ ὁρισθείσας ἀποστάσεις: Ὡς γνωστόν μεταξύ αὐτῶν ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$d_3(x,y) \le d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le p\, d_3(x,y).$$

Λόγω τῶν ἀνωτέρω ἀξιοσημειώτων σχέσεων ἐάν μία ἀκολουθία σημείων ἐντός τοῦ χώρου $\mathbb{R}^p$ συγκλίνη κατά τήν ἔννοιαν μιᾶς ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποστάσεων, θά συγκλίνη καί κατά τήν ἔννοιαν τῶν ἄλλων ἀποστάσεων. Κατόπιν τούτων αἱ ἀποδείξεις τῶν κατωτέρω προτάσεων θά γίνωνται διά τῆς χρήσεως μιᾶς τῶν ἀνωτέρω ἰσοδυνάμων ἀποστάσεων, ἔστω τῆς d_2.

Πρότασις I-3-3. Ἔστω $(x_n), n \ge 1$ μία ἀκολουθία σημείων ἐντός τοῦ μετρικοῦ χώρου $(\mathbb{R}^p, d)$ καί $x \in \mathbb{R}^p$. Θέτομεν:

$x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{np})$ καί $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$. Ἵνα ἡ x_n τείνη πρός τό x τοῦ $n \uparrow \infty$ πρέπει καί ἀρκεῖ $\xi_{n1} \to \xi_1$, $\xi_{n2} \to \xi_2$, $\dots$, $\xi_{np} \to \xi_p$ τοῦ $n \uparrow \infty$.

---

1) *Ἡ σύγκλισις μιᾶς ὑπακολουθίας τῆς $(x_n), n \ge 1$ δέν συνεπάγεται καί τήν σύγκλισιν τῆς $(x_n), n \ge 1$. Ἡ δέ ἀπόκλισις μιᾶς ὑπακολουθίας τῆς (x_n) $n \ge 1$ συνεπάγεται καί τήν ἀπόκλισιν τῆς (x_n) $n \ge 1$.*

Ἀπόδειξις: Ἡ $x_n \to x$ τοῦ $n \uparrow \infty \Longleftrightarrow d_2(x_n, x) \longrightarrow 0$

$\Longleftrightarrow |\xi_{n1} - \xi_1| + |\xi_{n2} - \xi_2| + \cdots + |\xi_{np} - \xi_p| \longrightarrow 0$ τοῦ $n \uparrow \infty \Longleftrightarrow$

$|\xi_{n1} - \xi_1| \longrightarrow 0, |\xi_{n2} - \xi_2| \longrightarrow 0, \cdots, |\xi_{np} - \xi_p| \longrightarrow 0$ τοῦ $n \uparrow \infty$

$\Longleftrightarrow \xi_{n1} \to \xi_1, \ \xi_{n2} \to \xi_2, \cdots, \xi_{np} \to \xi_p$ τοῦ $n \uparrow \infty$ ὅ.ἔ.δ.

Ἐκ τῶν προηγουμένων προτάσεων συνάγεται, ὅτι ἡ γνῶσις τοῦ ὁρίου μιᾶς ἀκολουθίας σημείων τοῦ χώρου $\mathbb{R}^p$ ἀνάγεται εἰς τὴν γνῶσιν τοῦ ὁρίου μιᾶς ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁρισμός I-3-2. *Ἔστω ὁ μετρικός χῶρος* (E, d) *καί μία ἀκολουθία σημείων* $(x_n), n \geq 1$ *αὐτοῦ. Θά λέγωμεν ὅτι αὐτη εἶναι ἀκολουθία τοῦ Cauchy ἤ βασική, ἐάν διά κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχη εἷς ἀκέραιος* $N(\varepsilon)$ *τοιοῦτος, ὥστε διά* $m, n \geq N(\varepsilon)$ *νά ἔχωμεν:* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Πρότασις I-3-3. Ἐάν μία ἀκολουθία $(x_n), n \geq 1$ σημείων τοῦ μετρικοῦ χώρου (E,d) συγκλίνη πρός ἕν σημεῖον $x \in E$, τότε αὐτη εἶναι βασική.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι ἡ $(x_n), n \geq 1$ συγκλίνει πρός τό $x \in E$. Τότε διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἷς θετικός ἀριθμός $N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διά $n \geq N(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ὅθεν διά $n \geq N(\varepsilon)$ καί $m \geq N(\varepsilon)$ ἔχομεν:
$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ἤτοι ἡ $(x_n), n \geq 1$ εἶναι βασική ἀκολουθία.

Θεώρημα I-3-1. (Γενικευμένον Κριτήριον τοῦ Cauchy διά τόν χῶρον $\mathbb{R}^p$).
Ἵνα μία ἀκολουθία $(x_n), n \geq 1$ σημείων τοῦ μετρικοῦ χώρου $(\mathbb{R}^p, d)$ συγκλίνη πρέπει καί ἀρκεῖ αὐτη νά εἶναι μία βασική ἀκολουθία.

Ἀπόδειξις: Τό ὅτι μία συγκλίνουσα ἀκολουθία ἐντός τοῦ $\mathbb{R}^p$ εἶναι βασική, συνάγεται ἐκ τῆς προτάσεως I-3-3 εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν $E = \mathbb{R}^p$.

Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ ἀκολουθία $(x_n), n \geq 1$, ὅπου $x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{np})$ εἶναι βασική. Τότε διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἷς ἀριθμός $N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διά $n, m \geq N(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν: $d_2(x_m, x_n) < \varepsilon$ (1) ἤ διά $n, m \geq N(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν: $|\xi_{m1} - \xi_{n1}| + |\xi_{m2} - \xi_{n2}| + \cdots + |\xi_{mp} - \xi_{np}| < \varepsilon$ (1').

Ἐκ τῆς σχέσεως (1') παρατηροῦμεν ὅτι: διά $n, m > N(\varepsilon)$ πρέπει νά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{ll} |\xi_{m1} - \xi_{n1}| & < \varepsilon \\ |\xi_{m2} - \xi_{n2}| & < \varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ |\xi_{mp} - \xi_{np}| & < \varepsilon \end{array}\right\} \quad (2)$$

Αἱ σχέσεις (2) δηλοῦν, ὅτι ἑκάστη τῶν πραγματικῶν ἀκολουθιῶν (ξ_{n1}), (ξ_{n2}), ..., (ξ_{np}), $n \geq 1$ εἶναι βασική καί κατά συνέπειαν, συμφώνως πρός τό Κριτήριον τοῦ Cauchy (**Βλ. Τόμος A_1, Θεώρ. IV – 2 – 1, σελ. 136**), ἑκάστη τούτων θά συγκλίνη πρός ἕνα ὅριον, ἔστω δέ $\lim_n \xi_{n1} = \xi_1$, $\lim_n \xi_{n2} = \xi_2, \cdots, \lim_n \xi_{np} = \xi_p$.

Συμφώνως πρός τήν πρότασιν I – 3 - 3 ἡ ἀκολουθία (x_n), $n \geq 1$ συγκλίνει πρός τό σημεῖον $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$, τοῦ $n \uparrow \infty$.

<u>Ὁρισμός I – 3 – 3</u>. ***Ἕνας μετρικός χῶρος καλεῖται πλήρης, ἐάν κάθε βασική ἀκολουθία συγκλίνη πρός ἕνα στοιχεῖον τοῦ ἰδίου χώρου.***

Π.χ. Ὁ χῶρος $\mathbb{R}^p$ εἶναι πλήρης.

<u>Σπουδαία Παρατήρησις</u>:

Ἐπειδή διά τόν διανυσματικόν χῶρον E ἔχομεν $d(x,y) = \|x-y\|$, ὅπου $\|\cdot\|$ εἶναι μία ἐκ τῶν τριῶν ἰσοδυνάμων normes τῶν ἀναφερομένων εἰς τόν ἀνωτέρω χῶρον, ἔπεται ὅτι: δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τούς ἀνωτέρω ὁρισμούς καί προτάσεις τούς ἀναφερομένους εἰς τήν ἔννοιαν τῆς ἀποστάσεως μέ ἀντιστοίχους ἀναφερομένους εἰς τήν ἔννοιαν τῆς εἰς τόν χῶρον E εἰσαχθείσης norme. Οὕτω π.χ. θά λέγωμεν ὅτι: <u>ἡ ἀκολουθία (x_n) $n \geq 1$ τῶν σημείων τοῦ διανυσματικοῦ χώρου</u> E <u>τείνει πρός τό σημεῖον</u> $x \in E$, <u>ἐάν</u> ἡ $\|x_n - x\| \to 0$. <u>τοῦ</u> $n \uparrow \infty$. <u>Ἄλλως διά κάθε</u> $\varepsilon > 0$ <u>ὑπάρχει εἷς ἀριθμός</u> $N(\varepsilon) > 0$ <u>τοιοῦτος ὥστε διά</u> $n \geq N(\varepsilon)$ <u>νά ἔχωμεν</u>: $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Κατωτέρω θά παραθέσωμεν ἕνα ἀξιοσημείωτον θεώρημα ἀφορόν τήν σύγκλισιν ἀκολουθιῶν ἐπί ἑνός διανυσματικοῦ χώρου.

<u>**Θεώρημα I – 3 – 2**</u>. <u>Ἐάν ἕνας διανυσματικός χῶρος E εἶναι ἐφωδιασμένος μέ δύο ἰσοδυνάμους normes, τότε κάθε ἀκολουθία συγκλίνουσα ὡς πρός τήν μία norme θά συγκλίνη ἐπίσης καί ὡς πρός τήν ἄλλην norme</u>.

Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν ἐντός τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E δύο ἰσοδύναμοι normes $\|\cdot\|$ καί $\|\cdot\|_1$. Ὡς γνωστόν ὑπάρχουν δύο θετικοί ἀριθμοί α καί β $(0<\alpha\leq\beta)$ τοιοῦτοι, ὥστε διά κάθε $x\in E$ νά ἔχωμεν:

$$\alpha\cdot\|x\|\leq\|x\|_1\leq\beta\cdot\|x\| \qquad (1)$$

1ον/ Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (x_n) συγκλίνει πρός τό x ὡς πρός τήν norme $\|\cdot\|_1$, τότε διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει εἷς ἀριθμός $N(\varepsilon)>0$ τοιοῦτος, ὥστε διά $n>N(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν: $\|x_n-x\|_1<\alpha\cdot\varepsilon$. Τότε κατά μείζονα λόγον διά $n>N(\varepsilon)$ θά ἔχωμεν, λόγω τῆς (1), καί $\|x_n-x\|<\varepsilon$.

2ον/ Ἐάν ἡ (x_n) τείνῃ πρός τό x ὡς πρός τήν norme $\|\cdot\|$, τότε διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $N(\varepsilon)>0$ τοιοῦτος, ὥστε διά $n>N(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν $\|x_n-x\|<\frac{\varepsilon}{\beta}$. Κατά μείζονα λόγον διά $n>N(\varepsilon)$ θά ἔχωμεν: $\|x_n-x\|_1<\varepsilon$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὁδηγούμεθα εἰς τά αὐτά περί ὁρίου συμπεράσματα ἐργαζόμενοι δι' ἰσοδυνάμων normes.

§ 4. ΑΝΟΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Εἰς τό Κεφάλαιον IV τοῦ A_1 τόμου ὡρίσαμεν τήν τοπολογίαν τῆς πραγματικῆς εὐθείας $\mathbb{R}$. Ἤδη προτιθέμεθα ν' ἀναφέρωμεν, ἐν συντομίᾳ, τινά διά τήν τοπολογίαν ἑνός μετρικοῦ χώρου. Κατ' ἀρχάς θά δώσωμεν μερικούς βασικούς ὁρισμούς.

Ἔστω ὁ μετρικός χῶρος (E,d), τό σημεῖον $a\in E$ καί ὁ ἀριθμός $\rho>0$.

I. Καλοῦμεν ***ἀνοικτήν σφαῖραν*** (ἀντ. ***κλειστήν σφαῖραν***) ***κέντρου*** α ***καί ἀκτῖνος*** ρ τό σύνολον $B(a,\rho)$ (ἀντ. $\overline{B}(a,\rho)$) τῶν σημείων x τοῦ E, τά ὁποῖα πληροῦν τήν σχέσιν $d(a,x)<\rho$ (ἀντ. $d(a,x)\leq\rho$).

II. Καλοῦμεν ***ἐπιφάνειαν σφαίρας κέντρου*** α ***καί ἀκτῖνος*** ρ τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ E, τά ὁποῖα πληροῦν τήν σχέσιν $d(a,x)=\rho$.

Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ μετρικοῦ χώρου $\mathbb{R}^2$ συνηθίζεται ἀντί τῆς λέξεως σφαῖρα νά λέγωμεν δίσκος καί ἀντί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας νά λέγωμεν περιφέρεια κύκλου.

Ὁ χῶρος $\mathbb{R}^p$. Εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^p$ ἐφωδιασμένον μέ τήν ἀπόστασιν $d(a,x)=\|a-x\|=\left(\sum_{i=1}^{p}(a_i-\xi_i)^2\right)^{1/2}$, ὅπου $a=(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ καί $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p)$, ἡ ἀνοικτή σφαῖρα κέντρου α καί ἀκτῖνος ρ ὁρίζεται ὑπό τοῦ συνόλου:

$$B(a,\rho)=\{x\in\mathbb{R}^p : d(a,x)<\rho\}$$

Ἡ κλειστή σφαῖρα κέντρου α καί ἀκτῖνος ρ ὁρίζεται ὑπό τοῦ συνόλου:

$$\bar{B}(a,\rho)=\{x\in\mathbb{R}^\nu : d(a,x)\leq\rho\}$$

Ἡ δέ ἐπιφάνεια αὐτῆς ὁρίζεται ὑπό τοῦ συνόλου:

$$S(a,\rho)=\{x\in\mathbb{R}^\nu : d(a,x)=\rho\}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι, κάθε ἕνωσις ἀνοικτῶν σφαιρῶν κέντρου α εἶναι μία ἀνοικτή σφαῖρα. Ὁμοίως κάθε τομή κλειστῶν σφαιρῶν κέντρου α εἶναι ὁμοίως κλειστή σφαῖρα.

Πρέπει νά παρατηρήσωμεν ὅτι, αἱ σφαῖραι ἑνός μετρικοῦ χώρου E δέν ἔχουν ἐν γένει τάς αὐτάς γεωμετρικάς ἰδιότητας μέ τάς σφαίρας τοῦ χώρου $\mathbb{R}^\nu$.

<u>Ὁρισμός I-4-1.</u> ***Εἰς ἕνα μετρικόν χῶρον E θά λέγωμεν ὅτι ἕνα ὑποσύνολον A τοῦ E εἶναι ἀνοικτόν, ἐάν εἶναι τό κενόν ἤ διά κάθε $a\in A$ ὑπάρχῃ μία ἀνοικτή σφαῖρα κέντρου α καί ἀκτῖνος $\rho>0$ περιεχομένη ἐντός τοῦ A.***

Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν, ἐάν τό A εἶναι ἀνοικτόν σύνολον, τότε διά κάθε $a\in A$ ὑπάρχει $\rho>0$ τοιοῦτον, ὥστε $B(a,\rho)=\{x\in E : d(a,x)<\rho\}\subset A$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ παρατηροῦμεν ὅτι τό σύνολον τῶν ἀνοικτῶν συνόλων ἑνός μετρικοῦ χώρου E ἔχει τάς κάτωθι ἰδιότητας:

A_1 <u>Κάθε ἕνωσις</u> (πεπερασμένη ἤ μή) <u>ἀνοικτῶν συνόλων τοῦ</u> E <u>εἶναι ἀνοικτόν σύνολον.</u>

A_2 <u>Κάθε πεπερασμένη τομή ἀνοικτῶν συνόλων τοῦ</u> E <u>εἶναι ἀνοικτόν σύνολον.</u>

A_3 <u>Ὁ χῶρος</u> E <u>καί τό κενόν</u> ϕ <u>εἶναι ἀνοικτά σύνολα.</u>

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων εἶναι ἀνάλογος μέ τήν ἐκτεθεῖσαν εἰς τήν σελ. 130 τοῦ A_1 Τόμου.

Ἐάν ἕνας χῶρος E εἶναι δυνατόν νά καταστῇ μετρικός, τότε ὁρίζονται συγχρόνως τά ἀνοικτά καί κλειστά[1] σύνολα αὐτοῦ. Τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν εἰσάγει μίαν <u>μετρικήν τοπολογίαν</u> ἐπί τοῦ E. Χαρακτηριστικόν τοῦ μετρικοῦ χώρου ἤ τῆς μετρικῆς τοπολογίας αὐτοῦ εἶναι ὅτι, δυνάμεθα πάντοτε νά ὁρίσωμεν τήν σύγκλισιν μιᾶς ἀκολουθίας σημείων τοῦ χώρου.

Εἰδικῶς εἰς τόν διανυσματικόν χῶρον $\mathbb{R}^\nu$ εἰς τόν ὁποῖον ἔχομεν ὁρίσει τρεῖς ἰσοδυνάμους normes, ὡς ἐκ τούτου καί τάς ἀντιστοίχους πρός αὐτάς ἀποστάσεις, <u>ἐπειδή μέ ἑκάστην</u> τῶν ἀνωτέρω norme ἤ ἀποστάσεων ὁρίζεται ἡ αὐτή σύγκλισις

[1] βλ. ὁρισμόν I-4-2

δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι, ἡ ὑφ' ἑκάστης ἐξ αὐτῶν εἰσαγομένη μετρική τοπολογία εἶναι ἡ αὐτή.

Παρατήρησις: Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες A_1, A_2, A_3 χρησιμοποιοῦνται καί διά τόν ὁρισμόν ἑνός τοπολογικοῦ χώρου. Ἤτοι, ἐάν τά ὑποσύνολα A ἑνός συνόλου E πληροῦν τάς ἰδιότητας A_1, A_2, A_3, τότε ταῦτα καλοῦνται ***ἀνοικτά σύνολα*** καί τό σύνολον E καλεῖται ***τοπολογικός χῶρος***. Ἐπίσης λέγομεν ὅτι τά ὑποσύνολα ταῦτα ὁρίζουν ἐπί τοῦ E μίαν τοπολογίαν.

Ἐπί πλέον εἰς ἕνα μετρικόν χῶρον πληροῦται καί μία τετάρτη ἐνδιαφέρουσα ἰδιότης καλουμένη: ***"Ἀξίωμα τῆς διαχωρισιμότητος τοῦ Hausdorff"***, ἤτοι:

A_4: Οἱωνδήποτε ὄντων τῶν σημείων α καί β (α≠β) τοῦ μετρικοῦ χώρου E ὑπάρχουν δύο ἀνοικτά σύνολα περιέχοντα ἀντιστοίχως τά α καί β τῶν ὁποίων ἡ τομή εἶναι τό κενόν σύνολον.

Ἀπόδειξις: Ἐάν d εἶναι ἡ ἀπόστασις $d(\alpha,\beta)$· ἀρκεῖ νά λάβωμεν τάς ἀνοικτάς σφαίρας κέντρων α καί β καί ἀκτῖνος $\frac{d}{3}$. Αὗται δέν δύνανται νά ἔχουν οὐδέν κοινόν σημεῖον, διότι ἐάν ὑπῆρχεν ἕν τοιοῦτον σημεῖον γ ἡ τριγωνική ἰδιότης θά ἔδιδεν:

$$d(\alpha,\beta) \leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta) \text{ ἤ } d(\alpha,\beta) \leq \frac{d}{3}+\frac{d}{3}=\frac{2d}{3}, \text{ ὅπερ ἄτοπον.}$$

Παραδείγματα:

1ον/. Αἱ ἀνοικταί σφαῖραι εἶναι ἀνοικτά σύνολα.

2ον/. Ἐπί τῆς εὐθείας $\mathbb{R}$, ἐφωδιασμένης μέ τήν ἀπόστασιν τῆς ἀπολύτου τιμῆς, τά ἀνοικτά διαστήματα εἶναι ἀνοικτά σύνολα.

3ον/. Ἐπί τοῦ χώρου $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$, ἐφωδιασμένου μέ τό ὁρισθέν μέτρον τῆς ἀποστάσεως, τό σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἑνός κύκλου ἀκτῖνος $\rho>0$, εἶναι ἀνοικτόν σύνολον.

4ον/ Εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^p$, ἐφωδιασμένον μέ ἕν ἐκ τῶν γνωστῶν μέτρων, καλοῦμεν ***ἀνοικτόν ὑπερδιάστημα*** ἐπ' αὐτοῦ, μέ ἄκρα τά σημεῖα $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)$ καί $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p)$ τό σύνολον τῶν σημείων του, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι πληροῦν τάς ἀνισότητας:

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p)\in\mathbb{R}^p:\ \alpha_i<\xi_i<\beta_i,\ i=1,2,\ldots,p\}$$

Προφανῶς τοῦτο εἶναι ἕνα ἀνοικτόν σύνολον.

Εἰς κάθε μετρικόν χῶρον τό σύνολον τῶν σημείων τά ὁποῖα ἐπαληθεύουν τήν σχέσιν $d(\alpha,x)>\rho$ εἶναι ἀνοικτόν σύνολον.

Ορισμός I-4-2. ***Είς ένα μετρικόν χώρον Ε έν υποσύνολον Α αυτού θά καλήται κλειστόν, εάν τό συμπληρωματικόν του είναι ανοικτόν.***

Ευκόλως διαπιστούται, στηριζόμενοι εις τούς τύπους τού De Morgan, ότι διά τά κλειστά σύνολα ισχύουν αι κάτωθι ιδιότητες:

K_1: Κάθε τομή (πεπερασμένη ή μή) κλειστών συνόλων είναι κλειστόν σύνολον.

K_2: Κάθε πεπερασμένη ένωσις κλειστών συνόλων είναι κλειστόν σύνολον.

K_3: Τό κενόν σύνολον $\emptyset$ καί ό χώρος Ε είναι κλειστά σύνολα.

Τό αξίωμα τού Hausdorff δέν μεταφέρεται κατά ενδιαφέροντα τρόπον εις τά κλειστά σύνολα.

Παραδείγματα:

1ον/ Κάθε κλειστή σφαίρα είναι κλειστόν σύνολον.

2ον/ Εις τήν πραγματικήν ευθείαν $\mathbb{R}$ εφωδιασμένη μέ τό φυσικόν μέτρον τής απολύτου τιμής, κάθε κλειστόν διάστημα είναι ένα κλειστόν σύνολον.

3ον/ Τό σύνολον τών σημείων x τού μετρικού χώρου Ε μέ ιδιότητα: $d(a,x) \leq \rho$ είναι κλειστόν σύνολον.

4ον/ Εις τόν χώρον $\mathbb{R}^p$, εφωδιασμένον μέ τήν γνωστήν Ευκλείδειον απόστασιν ή norme, ένα κλειστόν υπερδιάστημα μέ άκρα τά σημεία $a=(a_1,a_2,\dots,a_p)$ καί $b=(b_1,b_2,\dots,b_p)$ ορίζεται από τάς ανισότητας:

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_p)\in\mathbb{R}^p : a_i \leq \xi_i \leq b_i,\ i=1,2,\dots,p\}$$

Τούτο δέ είναι ένα κλειστόν σύνολον.

Παρατηρήσεις:

1ον/ Υπάρχουν υποσύνολα ενός μετρικού χώρου τά οποία δέν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά σύνολα π.χ. τά ημιανοικτά διαστήματα τής $\mathbb{R}$, εφωδιασμένης διά τού φυσικού της μέτρου, δέν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά σύνολα.

2ον/ Τά σύνολα $\emptyset$ καί Ε τού μετρικού χώρου Ε είναι συγχρόνως ανοικτά καί κλειστά σύνολα.

3ον/ Μεταξύ τών ιδιοτήτων τών ανοικτών καί κλειστών συνόλων πρέπει νά προσέχωμεν όταν πρόκειται διά τομήν ή ένωσιν μή πεπερασμένου πλήθους συνόλων.

§ 5. ΠΕΡΙΟΧΑΙ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΕΩΣ ΣΥΝΟΛΟΥ Κ.Τ.Λ.

I. Περιοχαί ἑνός σημείου.

Ὁρισμός I-5-1. ***Καλοῦμεν περιοχή** V **ἑνός σημείου** α **τοῦ μετρικοῦ χώρου** E **κάθε ὑποσύνολον** V **τοῦ** E **περιέχον τουλάχιστον ἕν ἀνοικτόν σύνολον περιέχον τό** α, **ἤ ἀκόμη, περιέχον ἀνοικτήν σφαῖραν ἤ κλειστήν σφαῖραν κέντρου** α.*

Αἱ ἰδιότητες τῆς περιοχῆς αἱ μελετηθεῖσαι εἰς τήν σελ. 132 τοῦ A_1 Τόμου μεταφέρονται καί εἰς τούς μετρικούς χώρους. Παραθέτομεν ἁπλῶς, ἄνευ ἀποδείξεως, πρός ὑπενθύμισιν τό βασικόν θεώρημα:

Θεώρημα I-5-1. Ἵνα ἕνα ὑποσύνολον A τοῦ E εἶναι ἀνοικτόν πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι περιοχή ἑκάστου τῶν σημείων του.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι σχεδόν ἡ αὐτή μέ τήν ἐκτεθεῖσαν εἰς τήν σελ. 132 τοῦ A_1 Τόμου.

Παράδειγμα: Εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^p$ ἔστω τό σημεῖον $a=(a_1, a_2, \cdots, a_p)$. Μία περιοχή αὐτοῦ ὁρίζεται ἀπό τό σύνολον τῶν σημείων $\boldsymbol{x}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$ τά ὁποῖα πληροῦν τάς ἀνισότητας: $|\xi_1 - a_1| < \varepsilon$, $|\xi_2 - a_2| < \varepsilon, \ldots, |\xi_p - a_p| < \varepsilon$.

Ἡ ἀνωτέρω περιοχή καλεῖται καί ***συμμετρική περιοχή*** τοῦ σημείου α.

II. Σημεῖα συσσωρεύσεως ἤ ὁριακά σημεῖα

Ὁρισμός I-5-2. *Ἔστω A ἕν ὑποσύνολον τοῦ μετρικοῦ χώρου E. **Θά λέγωμεν ὅτι τό σημεῖον** x **εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως ἤ ὁριακόν σημεῖον τοῦ** A, **ἐάν κάθε περιοχή τοῦ** x **περιέχῃ ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ** A **διάφορον τοῦ** x.*

Αἱ ἰδιότητες τοῦ σημείου συσσωρεύσεως αἱ μελετηθεῖσαι εἰς τήν σελ. 133 τοῦ A_1 Τόμου μεταφέρονται καί ἐδῶ, ἤτοι:

i) Ἐάν τό x_0 εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ A εἰς κάθε περιοχήν αὐτοῦ ὑπάρχει μία ἀπειρία σημείων τοῦ A διαφόρων τοῦ x_0.

ii) Ἕνα κλειστόν σύνολον περιέχει τά σημεῖα συσσωρεύσεως αὐτοῦ. Ἀντιστρόφως: Κάθε σύνολον τό ὁποῖον περιέχει τά σημεῖα συσσωρεύσεως αὐτοῦ εἶναι κλειστόν.

III. Μεμονωμένον σημεῖον.

Ἔστω A ἕν ὑποσύνολον τοῦ μετρικοῦ χώρου E. Ἕνα σημεῖον $x \in A$ καλεῖται ***μεμονω-***

μένον σημεῖον, ἐάν τοῦτο δέν εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ A, ἤτοι ἐάν ὑπάρχη μία περιοχή V τοῦ x τοιαύτη, ὥστε $A \cap V = \{x\}$.

IV. Ἐγγύτατον ἤ συνοριακόν σημεῖον ἑνός συνόλου.

Ἔστω A ἕν ὑποσύνολον τοῦ μετρικοῦ χώρου E. Θά λέγωμεν ὅτι ἕνα σημεῖον x εἶναι ***ἐγγύτατον σημεῖον*** τοῦ συνόλου A, ἐάν κάθε περιοχή τοῦ x τέμνη τό A, δηλ. διά κάθε $V(x)$ ἔχομεν: $V(x) \cap A \neq \emptyset$.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμός ἰσοδυναμεῖ μέ τό κάτωθι: Τό x εἶναι ἐγγύτατον σημεῖον τοῦ A, ἐάν τό x εἶναι σημεῖον τοῦ A ἤ σημεῖον συσσωρεύσεως αὐτοῦ.

Τό ἐγγύτατον σημεῖον ἑνός συνόλου A θά εἶναι ἤ σημεῖον συσσωρεύσεως ἀμφοτέρων τῶν συνόλων A καί CA ἤ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ ἑνός ἐξ αὐτῶν καί μεμονωμένον τοῦ ἄλλου.

Τό σύνολον τῶν ἐγγυτάτων σημείων ἑνός συνόλου A καλεῖται Θήκη αὐτοῦ καί συμβολίζεται διά τοῦ $\overline{A}$.[1]

V. Συμπαγῆ σύνολα: Ἔστω ὁ μετρικός χῶρος (E,d) καί $A \subset E$. Θά λέγωμεν ὅτι τό A εἶναι φραγμένον ἐάν διά κάθε $x, y \in A$ ἡ $d(x,y) \leq M < +\infty$. Εἰδικῶς διά τόν διανυσματικόν χῶρον $(E, \|\cdot\|)$ τό ὑποσύνολον A θά εἶναι φραγμένον, ἐάν διά κάθε $x \in A$ ἡ $\|x\| \leq M' < +\infty$.

Ἕνα κλειστόν καί φραγμένον σύνολον ἑνός μετρικοῦ χώρου θά καλῆται ***συμπαγές***.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἕνωσις πεπερασμένου πλήθους συμπαγῶν συνόλων εἶναι συμπαγές σύνολον. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι: τά συμπαγῆ ὑποσύνολα ἑνός μετρικοῦ χώρου εἶναι κλειστά.

Παραδείγματα:

1ον/. Τό σύνολον $\overline{B}(\alpha,\rho)$ ἐν $\mathbb{R}^\nu$ εἶναι συμπαγές.

Πράγματι: $\|x\| \leq \|x-\alpha\| + \|\alpha\| \leq \rho + \|\alpha\| < +\infty$

2ον/. Κάθε κλειστόν καί φραγμένον διάστημα $[\alpha, \beta]$ ἐν $\mathbb{R}$ εἶναι συμπαγές.

3ον/. Τό σύνολον $A = \{0,1,2,\ldots,\nu\}$ εἶναι συμπαγές, ἐνῶ τό σύνολον $B = \{0,1,2,\ldots,\nu\ldots\}$ δέν εἶναι συμπαγές.

4ον/. Τό διάστημα $I = \prod_{i=1}^{n} I_i$, ἔνθα $I_i = \{x \in \mathbb{R} : \alpha_i \leq x \leq \beta_i\}$ εἶναι συμπαγές.

VI. Σύνολον συνεκτικόν

Ἔστω τό σύνολον $A \subset \mathbb{R}^\nu$. Τοῦτο θά καλῆται ***συνεκτικόν***, ἐάν διά κάθε διαμέρισιν αὐτοῦ εἰς δύο μή κενά σύνολα A_1 καί A_2 ὑπάρχη τουλάχιστον ἕν σημεῖον τοῦ ἑνός τό ὁποῖον

---

[1] *Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἡ θήκη $\overline{A}$ ἑνός συνόλου A, ταυτίζεται μέ τό ἐλάχιστον κλειστόν σύνολον περιέχον τό A.*

εἶναι ὁριακόν τοῦ ἄλλου. Ἢ ὅπερ ἰσοδυνάμως: Ἡ σχέσις $A = A_1 \cup A_2$, ὅπου A_1, A_2 δύο σύνολα $\neq \phi$ τοιαῦτα, ὥστε οὐδέν ἐξ αὐτῶν νά περιέχη ὁριακά σημεῖα τοῦ ἄλλου (χωρισμένα σύνολα) νά μήν εἶναι δυνατή.

Παραδείγματα:

1ον/ Εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^2$ τό σύνολον $A = \{(x,0): 0 \leq x < 2\} \cup \{(0,y): 0 < y < 1\}$ εἶναι συνεκτικόν.

2ον/ Εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^\nu$ μία σφαῖρα ἤ ἕνα διάστημα εἶναι σύνολα συνεκτικά.

3ον/ Ἐπί τῆς εὐθείας $\mathbb{R}$ τά κάτωθι σύνολα εἶναι συνεκτικά:

$$(-\infty, \beta),\ (-\infty, \beta],\ (\alpha, +\infty),\ [\alpha, +\infty),\ (-\infty, +\infty),\ (\alpha, \beta),\ [\alpha, \beta),\ (\alpha, \beta].$$

4ον/ Θεωροῦμεν τό σύνολον Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἐν $\mathbb{R}$. Εἶναι $Q \subset \mathbb{R}$. Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη μίαν τυχοῦσαν διαμέρισιν τοῦ Q ὁριζομένην ὡς ἀκολούθως:

$$A_1 = \{x \in Q : x < \sqrt{3}\},\quad A_2 = \{x \in Q : x > \sqrt{3}\}.$$

Προφανῶς $A_1 \cup A_2 = Q$, ἀλλά τά ὁριακά σημεῖα τοῦ A_1 εἶναι $< \sqrt{3} \notin Q$ καθώς καί τά ὁριακά σημεῖα τοῦ A_2 εἶναι $> \sqrt{3}$. Ὅθεν δέν ὑπάρχει τουλάχιστον ἕν σημεῖον τοῦ ἑνός τό ὁποῖον νά εἶναι ὁριακόν τοῦ ἄλλου. Ἄρα τό σύνολον Q δέν εἶναι συνεκτικόν.

Ἕν ἀνοικτόν καί συνεκτικόν σύνολον θά καλῆται ***πεδίον***.

Εἰς τά προαναφερθέντα παραδείγματα 1ον/ καί 2ον/ τά σύνολα εἶναι πεδία, ὅπου ἡ θεωρηθεῖσα σφαῖρα εἶναι ἀνοικτή.

§ 6. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Ἔστω εἷς διανυσματικός χῶρος E ὡρισμένος ἐπί τοῦ K (K: Τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἤ μιγαδικῶν ἀριθμῶν). Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν $(x,y) \to \langle x,y \rangle$ τοῦ $E \times E$ ἐντός τοῦ K ἔχουσα τάς κάτωθι ἰδιότητας:

1ον/ $\langle x, x \rangle \geq 0$ διά κάθε $x \in E$

2ον/ $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = \mathcal{O}$

3ον/ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ διά κάθε $x \in E$ καί $y \in E$ (ὅπου μέ $\bar{\alpha}$ συμβολίζομεν τό συζυγές τοῦ $\alpha \in K$).

4ον/ $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ διά κάθε $\lambda, \mu \in K$ καί $x, y, z \in E$.

Ἡ τιμή $\langle x, y \rangle$ καλεῖται ***ἐσωτερικόν γινόμενον*** τῶν διανυσμάτων x, y.

Ἐκ τῆς 3ης καί 4ης ἰδιότητος προκύπτει ὅτι:

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \bar{\mu} \langle x, z \rangle, \text{ ἐάν τά } \lambda, \mu \in K \text{ καί } x, y, z \in E.$$

Ἐάν $K=\mathbb{R}$, τότε ἐκ τῆς 3ης ἰδιότητος ἔχομεν: $<x,y>=<y,x>$.

Τό ἐσωτερικόν γινόμενον ὁρίζει ἐπί τοῦ E μία norme ὑπό τῆς σχέσεως:

$$\|x\|=\sqrt{<x,x>} \qquad (1)$$

Πράγματι αἱ ἰδιότητες 1 καί 2 αὐτῆς διαπιστοῦνται εὐκόλως. Τήν τριγωνικήν ἰδιότητα τήν ἀποδεικνύομεν ὡς ἀκολούθως:

Θεωροῦμεν τήν ἔκφρασιν:

$$<x+\lambda y, x+\lambda y>=<x,x>+\lambda\overline{<x,y>}+\bar{\lambda}<x,y>+|\lambda|^2<y,y> \qquad (2)$$

ἥτις εἶναι πάντοτε θετική.

Ἐάν ὁ λ εἶναι πραγματικός ἀριθμός τό κάτωθι τριώνυμον ὡς πρός λ μέ πραγματικούς συντελεστάς, ἤτοι τό:

$$<x,x>+2\,\mathrm{Re}<x,y>\cdot\lambda+<y,y>\cdot\lambda^2$$

εἶναι λόγῳ τῆς (2), μονίμως μή ἀρνητικόν.

Συνεπῶς $(\mathrm{Re}<x,y>)^2-<x,x>\cdot<y,y>\leq 0$, ἤ $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\leq\|x\|\cdot\|y\|$.

Ὅθεν,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= <x+y, x+y>\\ &= <x,x>+<x,y>+<y,x>+<y,y>\\ &= \|x\|^2+2\,\mathrm{Re}<x,y>+\|y\|^2\\ &\leq(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

ἤτοι:

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$$

Ἤδη ἄς θεωρήσωμεν τήν ἀνισότητα:

$$<x,x>+\lambda\overline{<x,y>}+\bar{\lambda}<x,y>+|\lambda|^2<y,y>\geq 0$$

Θέτοντες $\lambda=-\frac{<x,y>}{<y,y>}$ λαμβάνομεν τελικῶς:

$$|<x,y>|\leq\|x\|\cdot\|y\| \qquad (3)$$ (Ἀνισότης τοῦ Schwartz).

Ἕνας διανυσματικός χῶρος E εἰς τόν ὁποῖον ἔχομεν ὁρίσει ἕν ἐσωτερικόν γινόμενον καί κατ' ἀκολουθίαν μίαν norme ὑπό τῆς σχέσεως (1) θά καλῆται ***χῶρος τοῦ Hilbert*** ἐάν συγχρόνως οὗτος εἶναι καί πλήρης ὡς πρός τήν (μετρικήν) ἀπόστασιν τήν ὁριζομένην ὑπό τῆς norme.

Λαβόντες ὑπ' ὄψιν τήν σχέσιν (1), εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι εἰς ἕνα χῶρον τοῦ Hilbert πληροῦται ἡ σχέσις:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\,(\|x\|^2+\|y\|^2) \qquad (4)$$ (Νόμος τοῦ παραλληλογράμμου).

Εἰς ἕναν χῶρον τοῦ Hilbert δύο στοιχεῖα x, y αὐτοῦ θὰ καλοῦνται **ὀρθογώνια** καὶ θὰ γράφωμεν $x \perp y$, ἐάν $<x, y> = 0$. Τότε προφανῶς καὶ $<y, x> = 0$, ἤτοι καὶ $y \perp x$.

Ἐπειδὴ δέ, $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = <x+y, x+y> - <x-y, x-y>$

$$= <x,x> + <y,y> - <x,x> - <y,y> = 0,$$

ἔχομεν: $\|x+y\| = \|x-y\|$.

Ὅθεν ὁ Νόμος τοῦ παραλληλογράμμου, λόγῳ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως, καθίσταται:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (5) \qquad \text{(Πυθαγόρειος σχέσις).}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\mathbb{R}^p$ ὁρίζομεν ἓν ἐσωτερικὸν γινόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot y_i$$

ὅπου $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ καὶ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ καὶ κατὰ συνέπειαν μίαν norme ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 \Big)^{1/2}$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι οὗτος εἶναι καὶ πλήρης, ἄρα εἶναι χῶρος τοῦ Hilbert.

<u>Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις</u>:

1. Ἔστω E ὁ διανυσματικὸς χῶρος τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἐπὶ τοῦ $[0,1]$. Ἐάν $f \in E$ ὁρίζομεν τὴν L^1 – norme ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

Δείξατε ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις ὁρίζει πράγματι μίαν norme.

2. Ἔστωσαν E καὶ F δύο διανυσματικοὶ χῶροι μὲ normes παριστωμένας ὑπὸ τοῦ συμβόλου $\|\cdot\|$. Ἔστω $E \times F$ τὸ Καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν χώρων.

Ὁρίζομεν τὴν πρόσθεσιν δύο στοιχείων τοῦ $E \times F$ καὶ τὸ γινόμενον ἑνὸς στοιχείου αὐτοῦ μὲ ἕναν πραγματικὸν ἀριθμὸν ὡς ἀκολούθως:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\gamma \cdot (x, y) = (\gamma x, \gamma y), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Δείξατε ὅτι ὁ $E \times F$ εἶναι διανυσματικὸς χῶρος.

Ἐν συνεχείᾳ ὁρίζομεν: $\|(x,y)\| = \max\,(\|x\|, \|y\|)$

Δείξατε ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις ὁρίζει μίαν norme ἐπὶ τοῦ $E \times F$.

3. Ἔστω E ἕνας μετρικός χῶρος μέ μέτρον (ἀπόστασιν) ρ καί ἔστω ἡ συνάρτησις σ ὡρισμένη ἐπί τοῦ $E\times E$ μέ τύπον: $\sigma(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$

Δείξατε ὅτι ἡ σ εἶναι ἕνα μέτρον ἐπί τοῦ E.

4. Ἔστω X ἕνας μετρικός χῶρος μέ ἀπόστασιν ρ, E ἕνα μή κενόν ὑποσύνολον τοῦ X καί f_E μία πραγματική συνάρτησις ἐπί τοῦ X ὁριζομένη ὑπό τοῦ τύπου $f_E(x)=\inf\limits_{y\in E}\rho(x,y)$. (Ὁ ἀριθμός $f_E(x)$ καλεῖται ***ἀπόστασις τοῦ x ἀπό τοῦ E***). Δείξατε ὅτι:

i) $|f_E(x)-f_E(x')|\leq\rho(x,x')$ διά κάθε $x,x'\in E$

ii) Ἡ f_E εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ X

iii) $f_E(x)=0$, ἐάν, καί μόνον ἐάν, $x\in\overline{E}$.

5. Ἔστω X εἶναι ἕνας μετρικός χῶρος μέ ἀπόστασιν ρ καί διά κάθε μή κενόν καί φραγμένον σύνολον $A\subset X$ ὁρίζομεν ὡς διάμετρον τοῦ A τόν ἀριθμόν $\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A}\rho(x,y)$. Δείξατε ὅτι: ἄν $A\subseteq B\subset X$, τότε $\delta(A)\leq\delta(B)$.

6. Ἔστω E εἶναι ὁ διανυσματικός χῶρος τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἐπί τοῦ διαστήματος [0,1]. Ἐάν $f,g\in E$, ὁρίζομεν:

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$$

Δείξατε ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις ὁρίζει ἕνα πραγματικόν ἐσωτερικόν γινόμενον.

Ἐν συνεχείᾳ δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν μίαν L^2-norme ὑπό τοῦ τύπου:

$$\|f\|_2=\langle f,f\rangle^{1/2}=\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

Θέτοντες $\|f\|_0=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Δείξατε ὅτι: $\|f\|_2\leq\|f\|_0$

7. Ἔστω E τυχόν μή κενόν σύνολον. Ὁρίζομεν τήν συνάρτησιν:

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ἄν } x\neq y\\ 0, & \text{ἄν } x=y\end{cases}\quad\text{διά κάθε } x,y\in E$$

i) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ d εἶναι μία ἀπόστασις ἐπί τοῦ E.

ii) Νά ἐξετασθῇ ποῖαι ἀκολουθίαι συγκλίνουν ἐν E.

iii) Νά ἐξετασθῇ ἄν ὁ (E,d) εἶναι πλήρης μετρικός χῶρος.

iv) Δείξατε ὅτι κάθε ὑποσύνολον τοῦ χώρου αὐτοῦ εἶναι ἀνοικτόν καί κλειστόν.

8. Ἔστω εἷς μετρικός χῶρος (E,d) καί $\theta>0$. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις:

$$d_\theta(x,y)=\theta . d(x,y),\ \forall (x,y)\in E\times E$$

εἶναι μία ἀπόστασις ἐπί τοῦ E καί ὅτι αἱ ἑξῆς προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι.

i) $A\subseteq E$ εἶναι ἀνοικτόν ἐν (E,d)

ii) A εἶναι ἀνοικτόν ἐν (E,d_θ).

9. Δείξατε ἐάν (E,d) εἶναι εἷς μετρικός χῶρος, τότε καί ὁ χῶρος (E,d^*) μέ $d^*(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $(x,y)\in E\times E$ εἶναι ἐπίσης εἷς μετρικός χῶρος καί μάλιστα φραγμένος.

10. Ἔστω $C_{[0,1]}$ τό σύνολον τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό διάστημα $[0,1]$, ἤτοι:

$$C_{[0,1]}\equiv\{f\,|\,[0,1] \text{ συνεχής},\ f([0,1])\subseteq\mathbb{R}\}.$$

Ὁρίζομεν τήν συνάρτησιν:

$$d(f,g)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|,\ f,g\in C_{[0,1]}$$

Δείξατε ὅτι ἡ $d(f,g)$ εἶναι μία (μετρική) ἀπόστασις ἐν $C_{[0,1]}$ καί ὅτι ὁ οὕτως ὁριζόμενος μετρικός χῶρος $C_{[0,1]}$ εἶναι πλήρης.

Δείξατε ἐπί πλέον ὅτι διά τόν ἀνωτέρω χῶρον $C_{[0,1]}$ ἡ συνάρτησις:

$$\|f\|=\left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right)^{1/2},\ f\in C_{[0,1]}$$

εἶναι μία norme ἐπ' αὐτοῦ.

11. Δείξατε ὅτι τό κάτωθι σύνολον:

$$A\equiv\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ 0\le x\le y\le 1\}$$

εἶναι συμπαγές, ἐνῷ δέν συμβαίνει τό αὐτό διά τό:

$$B\equiv\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}.\ x^2+4y^2\le 4,\ x^2-y^2\neq 0,\ y\ge 0\}.$$

12. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεκτικόν σύνολον.

13. Δείξατε ὅτι κάθε διάστημα ἐπί τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεκτικόν σύνολον.

14. Δείξατε ὅτι ἰσχύει: εἷς τοπολογικός χῶρος E εἶναι συνεκτικός (συνεκτικόν σύνολον), τότε καί μόνον τότε, ἄν τά μόνα ὑποσύνολα, τά ὁποῖα εἶναι συγχρόνως ἀνοικτά καί κλειστά εἶναι ὁ χῶρος E καί τό κενόν σύνολον.

15. Δείξατε ὅτι τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὡς ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}$ δέν εἶναι συνεκτικόν σύνολον.

16. Ὁμοίως δείξατε ὅτι τό σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι συνεκτικόν σύνολον.

17. Ἔστω $E=\mathbb{R}^2$. Ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν $d: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ διά τῆς σχέσεως:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_1-y_1|+|x_2|+|y_2|, & \text{ἐάν } x_1 \neq y_1 \\ |x_2-y_2|, & \text{ἐάν } x_1 = y_1 \end{cases}$$

ἔνθα $x=(x_1,x_2)$ καί $y=(y_1,y_2)$. Δείξατε ὅτι ὁ (E,d) εἶναι εἷς μετρικός χῶρος.

18. Ἔστω (E,d) εἷς μετρικός χῶρος. Ἐξετάσατε ἐάν τά ζεύγη (E,d^2) καί $(E,d^{1/2})$ εἶναι μετρικοί χῶροι.

19. Ἔστω ὁ Εὐκλείδειος χῶρος $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$. Ὁρίζομεν τάς κάτωθι δύο συναρτήσεις ἐπί τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$:

$$d_1: \quad d_1[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = \max[|x_1-x_2|, |y_1-y_2|]$$
$$d_2: \quad d_2[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

Δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν ὡς ἄνω συναρτήσεων εἶναι μία ἀπόστασις ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^2$.

20. Ἔστω E τό σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀκολουθιῶν. Ὁρίζομεν ὡς

$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \min\{|x_n-y_n|, 1\}$, ἔνθα $x=(x_n), n\in\mathbb{N}$ καί $y=(y_n), n\in\mathbb{N}$.

Δείξατε ὅτι ὁ (E,d) εἶναι εἷς μετρικός χῶρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΡΙΣΜΕΝΑΙ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΜΕ ΤΙΜΑΣ ΕΠΙΣΗΣ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

§1. ΟΡΙΟΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἔστω ἡ συνάρτησις $f: X \to Y$, ὅπου X, Y δύο τυχόντες μετρικοί χῶροι. Ἐάν συμβῆ οἱ μετρικοί χῶροι νά εἶναι καί διανυσματικοί, τότε ἡ f καλεῖται *διανυσματική συνάρτησις*.

Ὁρισμός II-1-1. *Ἔστω ἡ συνάρτησις* $f: E \to Y$, *ὅπου* $E \subset X$ *καί* X, Y *μετρικοί χῶροι. Ἔστωσαν ἐπί πλέον τά σημεῖα* $x_0 \in \bar{E}$ *καί* $\ell \in Y$. *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ* $f(x)$ *τείνει πρός τό σημεῖον* ℓ, *ἤ ἔχει ὅριον τό* ℓ, *τοῦ* x *τείνοντος πρός τό σημεῖον* x_0 *καί θά γράφωμεν*:

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x) = \ell \quad \text{ἤ} \quad f(x) \to \ell \ \text{τοῦ} \ x \to x_0,$$

τότε καί μόνον τότε, ἄν διά κάθε $\varepsilon > 0$ *δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἕν* $n(\varepsilon) > 0$ *τοιοῦτον, ὥστε ἡ σχέσις*:

$$0 < d_E(x, x_0) < n(\varepsilon) \Longrightarrow d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

(Παριστῶμεν διά τοῦ d_E τήν ἀπόστασιν ἐντός τοῦ E καί διά τοῦ d_Y τήν ἀπόστασιν ἐντός τοῦ Y).

Παρατηρήσεις 1η/ Στηριζόμενοι εἰς τήν τριγωνικήν ἰδιότητα τῆς ἀποστάσεως εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι τό ἀνωτέρω ὅριον, ἐάν ὑπάρχη, εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένον.

2α/ Ἐάν οἱ X, Y εἶναι διανυσματικοί χῶροι μέ norme, τότε δυνάμεθα εἰς τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν νά ἀντικαταστήσωμεν τήν ἀπόστασιν $d(\cdot,\cdot)$ διά τῆς norme $\|\cdot\|$.

Ὁρισμός II-1-2α. *Μέ τάς ἀνωτέρω ὑποθέσεις διά τήν συνάρτησιν* f, *ἐάν συμβῆ* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *τότε ἡ συνάρτησις* $f(x)$ *θά καλῆται συνεχής εἰς τό σημεῖον* x_0.

Ἐάν ἡ f εἶναι συνεχής εἰς κάθε σημεῖον τοῦ E, τότε αὕτη θά καλῆται *συνεχής ἐπί τοῦ* E.

Ὁ ὁρισμός δύναται νά διατυπωθῆ καί ὑπό τήν κάτωθι τοπολογικήν μορφήν:

Ὁρισμός II-1-2β. *Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις* $f: E \to Y$ *εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον* x_0 *τοῦ* E, *ἐάν διά κάθε περιοχήν* V *τοῦ* $f(x_0)$ *ὑπάρχη μία περιοχή* V' *τοῦ* x_0 *τῆς*

ὁποίας ἡ εἰκών, μέσω τῆς f, νά κεῖται ἐντός τῆς V, δηλ. $f(V' \cap E) \subset V$.

Εἶναι φανερόν ὅτι οἱ ὁρισμοί II-1-2α καί II-1-2β εἶναι ἰσοδύναμοι, ἤτοι:

Ὁ ὁρισμός II-1-2α συνεπάγεται τόν II-1-2β καί ἀντιστρόφως:

__Ἀπόδειξις__: Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν II-1-2α διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἷς θετικός ἀριθμός $n(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ σχέσις:

$$d_E(x, x_0) < n(\varepsilon) \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \qquad (1)$$

Ἔστω $V' = B(x_0, n(\varepsilon)) = \{x \in E : d_E(x, x_0) < n(\varepsilon)\}$ (2)

καί $V = \mathcal{N}(f(x_0), \varepsilon) = \{f(x) \in Y : d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\}$ (3)

Ἔστω ἕν $x \in V' \cap E$ συμφώνως πρός τήν σχέσιν (1) τό $f(x) \in V \Longrightarrow f(V' \cap E) \subset V$

Εὐκόλως διαπιστοῦται καί τό ἀντίστροφον.

Ἡ συνέχεια μιᾶς συναρτήσεως εἶναι μία ἰδιότης __τοπική__, δηλ. ἵνα ἡ f εἶναι συνεχής εἰς ἕνα σημεῖον x_0 πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ περιορισμός αὐτῆς εἰς μίαν οἱανδήποτε περιοχήν τοῦ x_0 νά εἶναι συνεχής.

__Πρότασις II-1-1.__ __Ἔστωσαν (X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3) τρεῖς μετρικοί χῶροι καί αἱ συνεχεῖς συναρτήσεις: $f_1 : X \to Y$ καί $f_2 : Y \to Z$. Τότε ἡ $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ εἶναι μία συνεχής συνάρτησις.__

__Ἀπόδειξις__: Ἔστω $x_0 \in X$ καί ἔστω $\varepsilon > 0$. Θέτομεν $y_0 = f_1(x_0)$. Ὑπάρχει ἕνας ἀριθμός $n(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ $d_2(y, y_0) < n \longrightarrow d_3(f_2(y), f_2(y_0)) < \varepsilon$.

Ἐπί πλέον ὑπάρχει ἕνας ἀριθμός $n'(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ $d_1(x, x_0) < n'(\varepsilon) \Longrightarrow d_2(f_1(x), y_0) < n$.

Ὅθεν, ἡ $d_1(x, x_0) < n'(\varepsilon) \Longrightarrow d_2(f_1(x), y_0) < n \Longrightarrow d_3(f_2(f_1(x)), f_2(f_1(x_0))) < \varepsilon$.

Ἡ τελευταία συνεπαγωγή ἀποδεικνύει τήν συνέχειαν τῆς $f_2 \circ f_1$ εἰς τό σημεῖον x_0.

__Πρότασις II-1-2__ __Ἔστω E ἕν ὑποσύνολον ἑνός μετρικοῦ χώρου X καί ἔστω $f : E \to Y$ εἶναι μία συνάρτησις τοῦ E ἐντός τοῦ μετρικοῦ χώρου Y. Ἔστω $a \in E$. Ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής εἰς τό a, ἐάν καί μόνον ἐάν, διά κάθε ἀκολουθίαν $\{x_n\}$ σημείων τοῦ E, ἥτις συγκλίνει πρός τό a, νά ἔχωμεν: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.__

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος μέ αὐτήν τῆς περιπτώσεως τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων.

Μία σχετική πρότασις ἀφορῶσα τάς συνεχεῖς συναρτήσεις καί τά ἀνοικτά σύνολα εἶναι ἡ κάτωθι:

__Πρότασις II-1-3.__ __Ἡ $f : E \to Y$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ E, ἐάν καί μόνον ἐάν, ἡ ἀντίστροφος εἰκών μέσω τῆς f παντός ἀνοικτοῦ συνόλου τοῦ Y νά εἶναι ἀνοικτόν σύνολον τοῦ E.__

<u>Πρότασις II-1-4.</u> <u>Ἔστω ὁ μετρικός χῶρος</u> (E, d) <u>καί</u> a <u>ἕνα σημεῖον τοῦ</u> E. <u>Τότε ἡ συνάρτησις</u> $x \to d(a,x)$ <u>τοῦ</u> E <u>ἐντός τῆς</u> $\mathbb{R}$ <u>εἶναι συνεχής</u>.

<u>Ἀπόδειξις:</u> Ἔστω $x_0 \in E$ καί ἕν τυχόν $\varepsilon > 0$. Θεωροῦμεν ἕν τυχόν $x \in E$ εὑρισκόμενον ἐντός ἀνοικτῆς σφαίρας κέντρου x_0 καί ἀκτῖνος $< \varepsilon$, τότε θά ἔχωμεν:
$d(x, x_0) < \varepsilon$. Ὅθεν, $|d(a,x) - d(a,x_0)| \leq d(x,x_0) < \varepsilon$. Ἡ τελευταία σχέσις ἀποδεικνύει τήν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως $d(a,x)$.

§2. <u>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ</u> <u>$(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p)$</u>.

Ἔστω I ἕνα διάστημα τῆς $\mathbb{R}$ καί ἡ συνάρτησις $f: I \to \mathbb{R}^p$, δηλ. $f(t) \in \mathbb{R}^p$, ὅπου p φυσικός ἀριθμός.

Λέγοντες ὅτι αὐτή ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον t_0, κατά τόν ὁρισμόν II-1-1 ἐννοοῦμεν ὅτι: <u>Διά κάθε</u> $\varepsilon > 0$ <u>ὑπάρχει ἕν</u> $\eta(\varepsilon) > 0$ <u>τοιοῦτον, ὥστε ἡ σχέσις</u> $t \in I, |t - t_0| < \eta(\varepsilon) \longrightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$ (1)

Τότε θά γράφωμεν: $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.

Διά κάθε $t \in I$ ἔχομεν:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)),$$

ὅπου $f_1, f_2, \dots, f_p$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ I ἐντός τῆς $\mathbb{R}$ καλούμεναι ***συντεταγμέναι συναρτήσεις τῆς*** $f(t)$.

Ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας τῆς f εἰς τό σημεῖον t_0 εἶναι ἡ ἰδία καί διά τάς τρεῖς normes τοῦ $\mathbb{R}^p$.

Ἑπομένως αἱ σχέσεις (1) αἱ καθορίζουσαι τήν συνέχειαν τῆς f ἰσοδυναμοῦν μέ τάς κάτωθι σχέσεις:

$$t \in I \text{ καί } |t - t_0| < \eta(\varepsilon) \longrightarrow \sup\left(|f_1(t) - f_1(t_0)|, \dots, |f_p(t) - f_p(t_0)|\right) < \varepsilon. \quad \text{ἤ}$$

$$t \in I \text{ καί } |t - t_0| < \eta(\varepsilon) \Longrightarrow \begin{cases} |f_1(t) - f_1(t_0)| < \varepsilon \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ |f_p(t) - f_p(t_0)| < \varepsilon \end{cases} \qquad (2)$$

Ὅθεν, ἐκ τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν τήν κάτωθι πρότασιν:

<u>Πρότασις II-2-1.</u> <u>Ἔστω ἡ συνάρτησις</u> $f: I \to \mathbb{R}^p$. <u>Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἡ</u> f <u>εἶναι συνεχής εἰς τό</u> $t_0 \in I$ <u>εἶναι αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις</u> $f_1, \dots, f_p$ αὐτῆς <u>νά εἶναι συνεχεῖς εἰς τό</u> $t_0 \in I$.

Παράδειγμα: Ἡ συνάρτησις $f(t)=(\text{συν}t, \text{ημ}t, t)$ εἶναι μία συνεχής διανυσματική συνάρτησις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς t μὲ τιμὰς εἰς τὸν χῶρον $\mathbb{R}^3$. Αὐτή, ὡς γνωστόν, παριστᾷ γεωμετρικῶς τὴν κυκλικὴν στερεὰ ἕλικα.

§ 3. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ($f:\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$)

I. Ἔστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις f ὡρισμένη εἰς ἓν ὑποσύνολον E τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbb{R}^q$ ($f:\mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$). Ἑπομένως διὰ κάθε $x=(x_1, x_2, \dots, x_q)\in\mathbb{R}^q$ θὰ ἔχωμεν: $f(x_1, x_2, \dots, x_q)\in\mathbb{R}$.

Ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας διὰ τὰς τρεῖς ἰσοδυνάμους normes τὰς ὁρισθείσας ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}^q$ μεταφέρεται καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὡς ἀκολούθως:

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $x_0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0)$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν II-1-1, τότε καὶ μόνον τότε ἄν:

Διὰ κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχῃ ἓν $n(\varepsilon)>0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ πᾶν $x=(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ἡ σχέσις:

$$\|x-x_0\|<n(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x_1, x_2, \dots, x_q)-f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0)|<\varepsilon$$

ἢ ὅπερ ἰσοδυνάμως: Αἱ σχέσεις:

$$|x_1-x_1^0|<n(\varepsilon), |x_2-x_2^0|<n(\varepsilon), \dots, |x_q-x_q^0|<n(\varepsilon)$$

συνεπάγονται τήν:

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_q)-f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0)|<\varepsilon .$$

Τότε θὰ γράφωμεν:

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_q)\to(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0)} f(x_1, x_2, \dots, x_q) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0).$$

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅπως καὶ εἰς τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς, ὅτι:

Ἐὰν $x=(x_1, x_2, \dots, x_q)\in E\subset\mathbb{R}^q$ καὶ αἱ συναρτήσεις $f(x)$ καὶ $g(x)$ εἶναι συνεχεῖς διὰ κάθε $x\in E$, τότε καὶ αἱ συναρτήσεις:

α) $f(x)+g(x)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ E

β) $f(x)\cdot g(x)$ » » » »

γ) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ » » » » E διὰ κάθε x μὲ $g(x)\neq 0$.

● Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν τῆς συνεχείας πραγματικῆς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν ἤτοι τῆς $z=f(x,y)$. Συμφώνως πρός τόν τεθέντα ἀνωτέρω ὁρισμόν τῆς συνεχείας αὕτη θά εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον (ξ,η) τοῦ χωρίου D τοῦ xy- ἐπιπέδου ἐάν διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχη ἕνας θετικός ἀριθμός $\delta(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε δι' ὅλα τά (x,y) πού πληροῦν τήν ἀνισότητα $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<\delta^2$ νά ἔχωμεν:

$$|f(x,y)-f(\xi,\eta)|<\varepsilon \quad (1).$$

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμός τροποποιεῖται ὡς ἀκολούθως:

Ἡ $f(x,y)$ θά εἶναι συνεχής εἰς τό (ξ,η) ἐάν πληροῦται ἡ σχέσις:

$$|f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta)|<\varepsilon \quad (2)$$

δι' ὅλας τάς τιμάς τῶν (h,k) τοιαύτας, ὥστε $h^2+k^2<\delta$ καί τῶν σημείων $(\xi+h,\eta+k)$ ἀνηκόντων ἐντός τοῦ D.

Ὁμοίως ὁ ἀνωτέρω ὁρισμός δύναται νά ἔχη καί τήν ἰσοδύναμον διατύπωσιν: Ἡ $f(x,y)$ θά εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον (ξ,η) ἐάν διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχη ἕνας θετικός ἀριθμός $\delta_1(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν: $|f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta)|<\varepsilon$ (3)
δι' ὅλα τά h καί k τοιαῦτα ὥστε: $|h|<\delta_1(\varepsilon), |k|<\delta_1(\varepsilon)$.

II. Μερική συνέχεια.

Ἔστω ἡ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα συνάρτησις $f(x_1,x_2,\dots,x_q)$. Θά λέγωμεν ὅτι αὕτη εἶναι μερικῶς συνεχής ὡς πρός τήν μεταβλητήν x_λ εἰς τό σημεῖον $(x_1^\circ,x_2^\circ,\dots,x_\lambda^\circ,\dots,x_q^\circ)$, ἐάν διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχη ἕν $n(\varepsilon)>0$ τοιοῦτον, ὥστε ἡ σχέσις:

$$|x_\lambda-x_\lambda^\circ|<n(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x_1^\circ,x_2^\circ,\dots,x_\lambda,\dots,x_q^\circ)-f(x_1^\circ,x_2^\circ,\dots,x_\lambda^\circ,\dots,x_q^\circ)|<\varepsilon,$$

Μία συνάρτησις μερικῶς συνεχής ὡς πρός ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν δέν εἶναι κατ' ἀνάγκην καί συνεχής.

Ἂς περιορισθῶμεν, χάριν ἁπλότητος, εἰς τήν συνάρτησιν $f(x,y)$ ὡρισμένην ἐπί τοῦ $E\subset\mathbb{R}^2$ καί ἔστω τό σημεῖον $M=(a,b)\in E$. Εἰς τό σημεῖον τοῦτο αὕτη θά εἶναι μερικῶς συνεχής ὡς πρός τάς μεταβλητάς x,y ἐάν αἱ συναρτήσεις $f(x,b)$ καί $f(a,y)$ εἶναι συνεχεῖς ὡς πρός x καί y ἀντιστοίχως.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τήν συνάρτησιν:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ἐάν } x\neq 0 \text{ ἤ } y\neq 0\\ 0, & \text{ἐάν } x=y=0\end{cases}$$

Ἡ συνάρτησιν $f(x,0)=0$ ὡς σταθερά συνάρτησις καί διά $x=0$ εἶναι συνεχής.

Ὁμοίως ἡ $f(0,y)=0$ ὡς σταθερά συνάρτησις καί διά $y=0$ εἶναι συνεχής.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι μερικῶς συνεχής ὡς πρός ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν εἰς τό σημεῖον $(0,0)$.

Ἤδη θά ἐξετάσωμεν ἐάν αὕτη εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον $(0,0)$.

Πρός τοῦτοις ἀρκεῖ διά κάθε $\varepsilon > 0$ νά ὑπάρχη ἕν $\eta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διά κάθε (x,y) τό ὁποῖον πληροῖ τάς σχέσεις: $|x| < \eta(\varepsilon)$, $|y| < \eta(\varepsilon)$ νά συνεπάγεται $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ ἤ $|x| < \eta(\varepsilon)$, $|y| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$.

Διά $x=y$ ἀρκεῖ ἡ $|x| = |y| < \eta(\varepsilon)$ νά συνεπάγεται $|f(x,x)| < \varepsilon$.

Ἀλλά $f(x,x) = \frac{1}{2}$.

Ὥστε ἡ τελευταία σχέσις, δηλ. $\frac{1}{2} < \varepsilon$, δέν πληροῦται πάντοτε. Ἄρα ἡ $f(x,y)$ δέν εἶναι συνεχής εἰς τό $(0,0)$.

Τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἀποδεικνύει ἐπί πλέον ὅτι, δέν δυνάμεθα νά μελετήσωμεν "τάς ἀπροσδιορίστους μορφάς" μέ συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν, ὅπως μέ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς, καθ' ὅτι τό ὅριον μιᾶς τοιαύτης ἀπροσδιορίστου μορφῆς δύναται νά ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὅν τείνει τό μεταβλητόν σημεῖον Μ πρός τό σημεῖον Α εἰς ὅ μελετῶμεν τήν συνάρτησιν, τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν τεινούσης πρός τό μηδέν.

§.4. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $(x,y) \to f(x,y)$

Τήν περίπτωσιν τοῦ ὁρίου τῆς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν κρίνομεν σκόπιμον νά μελετήσωμεν ἐκτενέστερον.

Ἐάν τό σημεῖον $M(x,y)$ τείνη πρός τό σημεῖον $M_0(x_0,y_0)$ ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ δύναται νά τείνη πρός ἕνα ὅριον, τό ὁποῖον ἐξαρτᾶται οὐσιωδῶς ἐκ τοῦ δρόμου τόν ὁποῖον ἀκολουθεῖ τό σημεῖον $M(x,y)$, ἤ νά μήν τείνη πρός οὐδέν ὅριον.

π.χ. α) Ἐάν τό $M(x,y)$ ἀκολουθῆ ἕν εὐθύγραμμον τμῆμα πολικῆς γωνίας θ_0, τό ὅριον ἐξαρτᾶται, ἐν γένει, ἐκ τῆς πολικῆς γωνίας θ_0.

β) Ἐάν τό $M(x,y)$ ἀκολουθῆ μίαν καμπύλην ἔχουσα εἰς τό σημεῖον $M_0(x_0,y_0)$ μίαν ἐφαπτομένην πολικῆς γωνίας θ_0, τό ὅριον ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἐκ τῆς θ_0.

γ) Τέλος, ἐάν τό $M(x,y)$ διαγράφη μίαν σπεῖραν ἔχουσα τό $M_0(x_0,y_0)$ ὡς ἕν ἀσύμπτωτον σημεῖον, τότε δυνατόν νά μήν ὑπάρχει ὅριον.

Ἐάν τό ὅριον πρός τό ὁποῖον τείνει ἡ $f(x,y)$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τόν ὁποῖον ἀκολουθεῖ τό σημεῖον $M(x,y)$ τεῖνον πρός τό $M_0(x_0,y_0)$, τότε θά λέγωμεν ὅτι ὑπάρχει τό ὅριον τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν δέν εἶναι καί τόσο ἁπλό. Τό νά διαπιστώσωμεν ὅτι μία συνάρτησις δέν ἔχει ὅριον ἀντιμετωπίζεται σχετικῶς εὔκολα. Ἡ δυσκολία ἐγκειται ἐάν ἡ συνάρτησις ἔχῃ ὅριον, νά εὕρωμεν τοῦτο.

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀναφέρομεν διαφόρους μεθόδους, αἵτινες εἶναι ἰσοδύναμοι:

I. Διά στοιχειώδεις συναρτήσεις τό πιθανόν ὅριον μιᾶς συναρτήσεως, ἐάν δέν μᾶς δίδεται, τό προσδιορίζομεν μέ μίαν κατάλληλον ἀκολουθίαν.

Τά κάτωθι παραδείγματα θά μᾶς δείξουν περίπου τήν μέθοδον, τήν ὁποίαν θά ἀκολουθῶμεν πρός εὕρεσιν τοῦ ὁρίου.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,\eta\mu\frac{1}{y}, & \text{ἐάν } y\neq 0\\ 0, & \text{ἐάν } y=0\end{cases}$$

Νά εὑρεθῇ τό $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Λύσις: Διά τήν εὕρεσιν τοῦ πιθανοῦ ὁρίου θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν: $\left(x_n=\frac{1}{\pi n},\ y_n=\frac{1}{\pi n}\right)$ τοῦ $n\uparrow\infty$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν δοθεῖσαν συνάρτησιν καί λαμβάνοντες τά ὅρια τοῦ $n\uparrow\infty$ ἔχομεν:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\pi n},\frac{1}{\pi n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi n}\cdot\eta\mu\,\pi n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\right)\cdot 0=0$$

Ὅθεν, τό πιθανόν ὅριον τῆς συναρτήσεως εἶναι τό μηδέν.

Ἵνα λοιπόν τό 0 εἶναι τό ὅριον τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y)\to(0,0)$ ἀρκεῖ διά κάθε $\varepsilon>0$ νά ὑπάρχῃ ἕν $\delta(\varepsilon)>0$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν τήν κάτωθι συνεπαγωγήν.

$$|x-0|=|x|<\delta(\varepsilon)\ \text{καί}\ |y-0|=|y|<\delta(\varepsilon)\Longrightarrow\left|x\,\eta\mu\frac{1}{y}\right|<\varepsilon\quad \text{ἤ}$$

$$\text{αἱ}\ |x|<\delta(\varepsilon)\ \text{καί}\ |y|<\delta(\varepsilon)\longrightarrow\left|\eta\mu\frac{1}{y}\right|<\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}.$$

θέτοντες $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, ἀρκεῖ αἱ $|x|<\varepsilon$ καί $|y|<\varepsilon$ νά συνεπάγωνται τήν $|\eta\mu\frac{1}{y}|<\frac{\varepsilon}{\varepsilon}=1$, τό ὁποῖον ἰσχύει πάντοτε.

Ἄρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Προφανῶς ἡ $f(x,y)$ εἶναι καί συνεχής εἰς τό σημεῖον $(0,0)$.

28/ Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\cdot(x^2-y^2), & \text{ἐάν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ \text{〃}\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Νά εὑρεθῆ, ἐάν ὑπάρχη, τό $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ καί νά ἐξετασθῆ ἡ συνέχεια ταύτης εἰς τό σημεῖον $(0,0)$.

<u>Λύσις</u>: Θέτοντες $x=\frac{1}{n}$ καί $y=\frac{1}{n+1}$ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται μετά τάς πράξεις:

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n+1}{n^2+(n+1)^2}\,\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\,\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+(1+\frac{1}{n})^2}\longrightarrow 0$$

Τό πιθανόν λοιπόν ὅριον τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y)\to(0,0)$ εἶναι τό 0.

Εἶναι δέ $\left|\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\,(x^2-y^2)-0\right|=|x\cdot y|\cdot\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leq|x\cdot y|<\varepsilon$, ἀρκεῖ $|x|=|x-0|<\delta=\sqrt{\varepsilon}$ καί $|y|=|y-0|<\delta=\sqrt{\varepsilon}$.

Ὅθεν ἡ $f(x,y)\longrightarrow 0$ τοῦ $(x,y)\longrightarrow(0,0)$. Εἶναι φανερόν τώρα ὅτι ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον $(0,0)$.

II. Τό πιθανόν ὅριον τῆς $f(x,y)$, τοῦ $(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)$, δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν συχνά καί μέ τήν βοήθειαν τῶν πολικῶν συντεταγμένων:

Πρός τοῦτο θέτομεν $x=x_0+\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=y_0+\rho\,\eta\mu\theta$. Τοῦ $(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)\Longrightarrow\rho\longrightarrow 0+$ καί τό θ δύναται νά μεταβάλλεται καθ᾽ οἱονδήποτε τρόπον. Δύναται δέ τό $\theta\longrightarrow\pm\infty$.

Ἐκτελοῦντες τόν μετασχηματισμόν εἰς τήν $f(x,y)$ λαμβάνομεν.

$$f(x,y)=f(x_0+\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ y_0+\rho\,\eta\mu\theta)=F(\rho,\theta).$$

Ἐάν τό $\lim\limits_{\rho\to 0+}F(\rho,\theta)=\ell$ ὑπάρχη καί εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ θ, τότε τό <u>πιθανόν</u> ὅριον τῆς $f(x,y)$, τοῦ $(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)$, εἶναι τό ℓ. Ἐν συνεχεία θά ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τά προαναφερθέντα παραδείγματα. Τονίζομεν ἰδιαιτέρως – ὅπως ἐξ ἄλλου θά φανῆ καί ἀπό ἕνα παράδειγμα – ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁρίου τῆς $F(\rho,\theta)$ τοῦ $\rho\longrightarrow 0+$ καί ἡ ἀνεξαρτησία αὐτοῦ ἐκ τοῦ θ <u>δέν μᾶς ἐξασφαλίζει</u> τήν ὕπαρξιν τοῦ ὁρίου τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)$.

Εἰς ἣν περίπτωσιν τό $\lim\limits_{\rho\to 0+} F(\rho,\theta)$ δέν ὑπάρχει ἢ δέν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ θ, τότε καί ἡ $f(x,y)$ δέν ἔχει ὅριον τοῦ $(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)$.

Παράδειγμα 1ον/ Νά εὑρεθῆ τό $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\eta\mu(xy)}{x^2+y^2}$.

Λύσις: Θέτομεν $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$ καί ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται:

$$\lim_{\rho\to 0+}\frac{\eta\mu(\rho^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0+}\frac{\eta\mu(\frac{\rho^2}{2}\eta\mu 2\theta)}{(\frac{\rho^2}{2}\eta\mu 2\theta)}\cdot\frac{\eta\mu 2\theta}{2}=1\,\frac{\eta\mu 2\theta}{2}.$$

Τό ὅριον δέν εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς (πολικῆς) γωνίας θ, συνεπῶς τό ζητούμενον ὅριον δέν ὑπάρχει.

2ον/ Ἔστω ἡ συνάρτησις f μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ διδομένη ὑπό τοῦ τύπου:

$$f(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot e^{-\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)^2}.$$

Ἐξετάσατε ἐάν ὑπάρχῃ τό $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Λύσις: Θέτοντες $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$ ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις γράφεται:

$$f(x,y)=f(\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\rho\eta\mu\theta)=\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho}\cdot e^{-\frac{4\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\rho^2}}\longrightarrow 0 \text{ τοῦ } \rho\longrightarrow 0+.$$

Ἐντεῦθεν ἡ $f(x,y)$ τείνει πρός τό 0, ὅταν τό $(x,y)\to(0,0)$ ἐπί ἑκάστης εὐθείας διερχομένης διά τῆς ἀρχῆς.

Ἐξ ἄλλου ἐάν τό σημεῖον $M(x,y)$ κινεῖται ἐπί τῆς περιφερείας Γ μέ ἐξίσωσιν $x^2+y^2=2x$ (ἥτις διέρχεται διά τῆς ἀρχῆς), τότε $f(x,y)=\frac{1}{e}$ διά κάθε $(x,y)\in\Gamma-\{(0,0)\}$.

Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ἡ $f(x,y)$ δέν ἔχει ὅριον τοῦ $(x,y)\longrightarrow(0,0)$.

II. Διά τήν εὕρεσιν τοῦ πιθανοῦ ὁρίου πολλάκις δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τήν ἀκολουθίαν $(x_n,\lambda x_n)$, $\lambda\neq 0$ μέ $x_n\to 0$ διά $n\to\infty$ καί ἐάν τό $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,\lambda x_n)$ ὑπάρχῃ καί εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ λ, τοῦτο θά εἶναι τό πιθανόν ὅριον τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y)\to(0,0)$. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἐάν τό ὅριον τῆς $f(x_n,\lambda x_n)$ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ λ, τότε τό ὅριον τῆς $f(x,y)$ δέν ὑπάρχει.

Παράδειγμα: Νά ἐξετασθῆ ἐάν ὑπάρχῃ τό $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\eta\mu(xy)}{x^2+y^2}$.

Λύσις: Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν $(x_n,\lambda x_n)$, $\lambda\neq 0$ μέ $x_n\longrightarrow 0$ τοῦ $n\uparrow\infty$. Τότε

καί $(x_n, \lambda x_n) \longrightarrow (0,0)$ τοῦ $n\uparrow\infty$. Θά ἔχωμεν:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta\mu(x_n \cdot \lambda x_n)}{x_n^2 + \lambda^2 x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\eta\mu(\lambda x_n^2)}{(\lambda^2+1)x_n^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\eta\mu(\lambda x_n^2)}{(\lambda x_n^2)} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \cdot 1 = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}.$$

Ἤτοι τό ὅριον ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ λ.

Ἄρα τό ὅριον τῆς δοθείσης συναρτήσεως δέν ὑπάρχει.

§5. ΕΠΑΛΛΗΛΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ $(x,y) \longrightarrow f(x,y)$.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y)$. Καλοῦμεν ***ἐπάλληλα*** ὅρια ταύτης τά $\lim\limits_{x\to x_0} (\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ καί $\lim\limits_{y\to y_0} (\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$. Ταῦτα δέν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἴσα.

Ἡ ἰσότης τῶν ἀνωτέρω ὁρίων δέν συνεπάγεται πάντοτε τήν ὕπαρξιν τοῦ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Ἤ διαφορετικῶς: Ἐάν τά ἐπάλληλα ὅρια $\lim\limits_{x\to x_0} (\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ καί $\lim\limits_{y\to y_0} (\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$ εἶναι ἴσα, τότε ἡ κοινή τιμή των εἶναι τό πιθανόν ὅριον τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y) \longrightarrow (x_0, y_0)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$. Θά ἔχωμεν:

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} (1) = 1.$$

$$\lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0} (-1) = -1.$$

Ὅθεν τά ἐπάλληλα ὅρια δέν εἶναι ἴσα καί κατά συνέπειαν τό $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δέν ὑπάρχει.

<u>Παρατήρησις</u>: Ἐκ τῆς ὑπάρξεως τοῦ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ δέν συνεπάγεται πάντοτε ἡ ὕπαρξις τῶν ἐπαλλήλων ὁρίων.

<u>Παράδειγμα</u>: Ἔστω ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu\frac{1}{y}, & \text{ἐάν } y \neq 0 \\ 0, & \text{ἐάν } y = 0 \end{cases}$$

Ἀπεδείχθη (βλ. παράδειγμα 1ον §4) ὅτι, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ καί ὅτι τό $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ δέν ὑπάρχει.

Πράγματι λαμβάνοντες τάς ἀκολουθίας $y_n = \frac{1}{\pi n}$ καί $y_n^* = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ θά ἔχωμεν:

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_n) = \lim_{n\to\infty} (x\eta\mu\pi n) = 0 \quad \text{καί}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_n^*) = \lim_{n\to\infty} (x\eta\mu(2\pi n + \tfrac{\pi}{2})) = x$$

Ὅθεν τό $\lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ ὑπάρχει, ἐνῶ τό $\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ δέν ὑπάρχει.

§ 6. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $f:\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$.

Ἔστω ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις f ὡρισμένη εἰς ἓν ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}^q$ μὲ τιμὰς ἐντὸς τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbb{R}^p$.

Ἔστω διὰ κάθε $x=(x_1,x_2,\dots,x_q)\in\mathbb{R}^q$ τὸ σημεῖον $f(x_1,x_2,\dots,x_q)$ ἔχει συντεταγμένας $(f_1(x_1,x_2,\dots,x_q), f_2(x_1,x_2,\dots,x_q),\dots, f_p(x_1,x_2,\dots x_q))$, ὅπου αἱ $f_1,f_2,\dots,f_p$ εἶναι πραγματικαὶ συναρτήσεις καλούμεναι *συντεταγμέναι συναρτήσεις τῆς* $f(x_1,x_2,\dots,x_q)$.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι: ἵνα ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν II-2-1, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ πραγματικαὶ συναρτήσεις $f_1(x_1,x_2,\dots,x_q)$, $f_2(x_1,x_2,\dots,x_q),\dots, f_p(x_1,x_2,\dots,x_q)$ νὰ εἶναι συνεχεῖς.

Σπουδαία Παρατήρησις: Ἐπειδὴ τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον $\mathbb{C}$ «ταυτίζεται» πρὸς τὸν χῶρον $\mathbb{R}^2$, τ᾽ἀνωτέρω συμπεράσματα ἐφαρμόζονται εἰς μιγαδικὰς συναρτήσεις μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς.

Παράδειγμα: Ἡ συνάρτησις $(x,y)\to(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸν δίσκον $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$ εἶναι μία διανυσματικὴ συνάρτησις δύο μεταβλητῶν τοῦ χώρου $\mathbb{R}^2$ ἐντὸς τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$.

Πράξεις μὲ διανυσματικὰς συναρτήσεις.

Ἔστωσαν αἱ διανυσματικαὶ συναρτήσεις f,g ὡρισμέναι ἐπὶ τοῦ $E\subset\mathbb{R}^q$ μὲ τιμὰς ἐν $\mathbb{R}^p$. Ἔστω δὲ $f=\{f_1,f_2,\dots,f_p\}$ καὶ $g=\{g_1,g_2,\dots,g_p\}$ αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις αὐτῶν.

Ὁρίζομεν:

$$f+g=\{f_1+g_1, f_2+g_2,\dots, f_p+g_p\}$$

καὶ

$$\lambda\cdot f=\{\lambda\cdot f_1,\lambda\cdot f_2,\dots,\lambda\cdot f_p\}.$$

Συμφώνως πρὸς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμούς, διὰ κάθε $x\in E\subset\mathbb{R}^q$ θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \{(f_1+g_1)(x), (f_2+g_2)(x),\dots,(f_p+g_p)(x)\}\\ &= \{f_1(x)+g_1(x), f_2(x)+g_2(x),\dots, f_p(x)+g_p(x)\}\\ &= \{f_1(x), f_2(x),\dots,f_p(x)\}+\{g_1(x),g_2(x),\dots,g_p(x)\}\\ &= f(x)+g(x)\end{aligned}$$

ὁμοίως: $(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)$.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι: τό σύνολον τῶν ἀνωτέρω διανυσματικῶν συναρτήσεων τῆς διανυσματικῆς μεταβλητῆς ἀποτελεῖ ἕναν διανυσματικόν χῶρον.

Ὁμοίως ὁρίζομεν ὡς γινόμενον τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως f ἐπί μίαν πραγματικήν συνάρτησιν φ, ἀμφοτέρων ὡρισμένων ἐπί τοῦ $E \subset \mathbb{R}^q$, ὡς ἀκολούθως:

$$f \cdot \varphi = \{f_1 \cdot \varphi, f_2 \cdot \varphi, \ldots, f_p \cdot \varphi\}$$

Προφανῶς ἔχομεν: $(f \cdot \varphi)(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$.

Παρατήρησις: Ἐάν $q=1$, τότε ἔχομεν τήν διανυσματικήν συνάρτησιν $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ καί ἔχομεν πάλιν τούς ἐν §2, ὁρισμούς καί συμπεράσματα.

Πρότασις II – 6-1. Ἔστωσαν f, g διανυσματικαί συναρτήσεις ὡρισμέναι ἐπί τοῦ $E \subset \mathbb{R}^q$ μέ τιμάς ἐν $\mathbb{R}^p$. Ἐάν διά κάθε $x \in E$ αἱ f, g εἶναι συνεχεῖς, τότε καί αἱ συναρτήσεις $f \pm g$ καί $\lambda \cdot f$ θά εἶναι συνεχεῖς.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος μέ τήν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων.

Διανυσματική ἔκφρασις μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως.

Ἄς περιορισθῶμεν εἰς τήν διανυσματικήν συνάρτησιν f ὡρισμένην εἰς ἕν ὑποσύνολον E τοῦ $\mathbb{R}^3$ μέ τιμάς ἐντός τοῦ $\mathbb{R}^3$.

Ἔστωσαν $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις τῆς f. Εἰς κάθε σημεῖον $M(x,y,z)$ τοῦ E ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖον:

$$f(x,y,z) = \{X(x,y,z),\ Y(x,y,z),\ Z(x,y,z)\} \text{ τοῦ } \mathbb{R}^3.$$

Ἔστω $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ μία τυχοῦσα βάσις τοῦ $\mathbb{R}^3$ ἀρχῆς O. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}(x,y,z) = \vec{r}$ καλεῖται *διάνυσμα θέσεως τοῦ σημείου* $M(x,y,z)$.

Δυνάμεθα λοιπόν τήν ἀνωτέρω συνάρτησιν f νά τήν γράψωμεν οὕτω:

$$f(\vec{r}) = \vec{i} \cdot X(x,y,z) + \vec{j} \cdot Y(x,y,z) + \vec{k}\, Z(x,y,z). \qquad (1)$$

Ἡ συνάρτησις $f(\vec{r})$ ὡρισμένη ἐπί τοῦ E λέγομεν ὅτι εἶναι ἕνα διανυσματικόν πεδίον ἐπί τοῦ E.

Εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $f: I \to \mathbb{R}^3$, ὅπου $I \subset \mathbb{R}$ διά κάθε $t \in I$ καί ἡ $f(t)$ ἔχει συντεταγμένας συναρτήσεις $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, ἡ (1) γράφεται:

$$f(t) = \vec{i}\, X(t) + \vec{j} \cdot Y(t) + \vec{k} \cdot Z(t).$$

§ 7. ΟΜΑΛΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ἔστω ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις f ὡρισμένη εἰς ἓν ὑποσύνολον A τοῦ $\mathbb{R}^q$ μὲ τιμὰς ἐντὸς τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbb{R}^p$. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ f εἶναι ***ὁμαλῶς συνεχὴς*** ἐπὶ τοῦ A, τότε καὶ μόνον τότε, ἄν:

Διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἓν $\eta(\varepsilon)$ (ἐξαρτώμενον μόνον ἐκ τοῦ ε), τοιοῦτον ὥστε:

$$\forall\, x', x'' \in A \ \text{μὲ}\ \|x'-x''\| < \eta(\varepsilon) \Longrightarrow \|f(x')-f(x'')\| < \varepsilon \qquad (1)$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἂν ἡ f εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπὶ τοῦ A, εἶναι καὶ συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ.

Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν εἶναι ἀληθές.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ (1) εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἡ κάτωθι:

<u>Πρότασις II – 7 – 1</u>. <u>Ἡ συνάρτησις</u> $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ <u>εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν</u> $A \subset \mathbb{R}^q$ <u>τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἑκάστη τῶν συντεταγμένων συναρτήσεων</u> $f_1, f_2, \ldots, f_p$ <u>εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν</u> A.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἔστω ὅτι ἡ f εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν A, τότε

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \eta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x', x'' \in A \ \text{μὲ}\ |x'-x''| < \eta(\varepsilon) \longrightarrow |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$$

τότε ὅμως θὰ ἰσχύη καί:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \eta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x', x'' \in A \ \text{μὲ}\ |x'-x''\| < \eta(\varepsilon) \longrightarrow |f_i(x')-f_i(x'')| < \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots, p$$

ἄρα αἱ f_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχεῖς.

<u>Ἀντιστρόφως</u>: Ἔστω ὅτι $\forall\, i = 1, 2, \ldots, p$ ἡ $f_i(x)$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν A, τότε:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \eta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x', x'' \in A \ \text{μὲ}\ \|x'-x''\| < \eta(\varepsilon) \longrightarrow |f_i(x')-f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$$

Τότε ὅμως εἶναι:

$$\|f(x')-f(x'')\| = \left(\sum_{i=1}^{p} |f_i(x')-f_i(x'')|^2\right)^{1/2} < \left(p\frac{\varepsilon^2}{p}\right)^{1/2} = \varepsilon. \ \forall x', x'' \in A \ \text{μὲ}\ \|x'-x''| < \eta(\varepsilon).$$

Ἄρα ἡ f εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν A.

Διὰ διανυσματικὰς συναρτήσεις τὸ Θεώρημα II-7-1, Τόμος Α' σελ. 339, διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

<u>Θεώρημα II – 7 – 1</u>. <u>Πᾶσα συνάρτησις</u> $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ <u>συνεχὴς εἰς ἓν συμπαγὲς ὑποσύνολον</u> K <u>τοῦ</u> $\mathbb{R}^q$ <u>εἶναι καὶ ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ.</u>

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:

1. Εὕρατε τό πεδίον ὁρισμοῦ τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

i) $f(x,y)=\log(16-x^2-y^2):(x^2+y^2-4)$. ii) $f(x,y)=\sqrt{6-(2x+3y)}$ iii) $f(x,y,z)=(x+z)^y$.

2. Ἔστω ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x,y)$, $(x,y)\in U\subseteq \mathbb{R}^2$, ὅπου U ἀνοικτόν σύνολον καί ἔστω ἕν σημεῖον $(x_0,y_0)\in \bar{U}$. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχει τό $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell<+\infty$, ἐπί πλέον δέ ὅτι ὑπάρχουν ἐν $\mathbb{R}$ τά ὅρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. Νά δειχθῆ ὅτι τότε ὑπάρχουν καί τά ἐπάλληλα ὅρια $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$ καί ἕκαστον τούτων εἶναι ἴσον πρός ℓ.

3. Ἐξετάσατε ἐάν ὑπάρχουν τά κάτωθι ὅρια καί ἐάν καταφατικῶς ὑπολογίσατε αὐτά.

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$, iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1+y^2)\eta\mu x}{x}$, iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\eta\mu(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

4. Νά δειχθῆ ὅτι δέν ὑπάρχει τό ὅριον $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,-1)} \dfrac{y^2+z}{x+yz}$

Ὑπόδ: Θεωρήσατε ὅτι τό σημεῖον $M(x,y,z)$ κινεῖται κατά μῆκος τῆς εὐθείας (ε) τῆς διερχομένης διά τοῦ σημείου $A(1,1-1)$ καί παραλλήλου πρός τό διάνυσμα $(\lambda,1,1)$, ὅπου λ παράμετρος, ἤτοι ἐπί τῆς εὐθείας τῆς ἐχούσης ἐξίσωσιν:

$\dfrac{x-1}{\lambda}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}=\rho$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν $x=\rho\lambda+1$, $y=\rho+1$, $z=\rho-1$

Τότε ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται: $\dfrac{y^2+z}{x+yz}=\dfrac{\rho^2+3\rho}{\rho\lambda+\rho^2}=\dfrac{\rho+3}{\lambda+\rho}\xrightarrow[\rho\to 0]{}\dfrac{3}{\lambda}$

Παρατηροῦμεν ὅτι τό ὅριον ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς εὐθείας (ε). Ἄρα δέν ὑπάρχει.

5. Ἐάν $a>0$ καί b πραγματικός ἀριθμός νά δειχθῆ ὅτι: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x^y=a^b$. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι δέν ὑπάρχει τό $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^y$.

5α. Δείξατε τό θεώρημα: i) Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι ὡρισμένη εἰς ἕνα πεδίον D καί συνεχής εἰς τό σημεῖον (x_1,y_1) τοῦ D. Ἐάν $f(x_1,y_1)>0$, τότε ὑπάρχει μία περιοχή τοῦ (x_1,y_1) ἐντός τῆς ὁποίας ἰσχύει: $f(x,y)>\frac{1}{2}f(x_1,y_1)>0$.

ii) Ἔστω ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής ἐντός τοῦ D καί εἶναι θετική δι' ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ D καί ἀρνητική δι' ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ D. Τότε ἡ $f(x,y)=0$ δι' ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ D.

(Ὑπόδ: i) Εἰς τόν ὁρισμόν τῆς συνεχείας θέσατε $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_1,y_1)$).

6. Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot \eta\mu\frac{1}{y}, & \text{ἄν} \quad y\neq 0 \\ 0, & \text{»} \quad y=0 \end{cases}$$

Δείξατε ὅτι ἰσχύει: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, ἐπὶ πλέον νὰ ἐξετασθῇ, ἄν ὑπάρχουν τὰ ὅρια:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \text{ καὶ } \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right).$$

7. Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\cdot \eta\mu\frac{1}{y}, & \text{ἄν } x\neq 0 \text{ καὶ } y\neq 0. \\ 0, & \text{ἄν } x=0 \text{ ἤ } y=0 \end{cases}$$

Προσδιορίσατε ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι ὁρίων ὑπάρχουν:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Εἰς καταφατικὴν περίπτωσιν ὑπολογίσατε ταῦτα.

8. Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, \text{ μὲ } x^2y^2+(x-y)^2\neq 0.$$

Δείξατε ὅτι δὲν ὑπάρχει τὸ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ἐπὶ πλέον δείξατε ὅτι τὰ ἐπάλληλα ὅρια ὑπάρχουν καὶ εἶναι ἴσα μεταξύ των.

9. Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\begin{cases} 3xy, & \text{ἄν} \quad (x,y)\neq(1,2) \\ 0, & \text{ἄν} \quad (x,y)=(1,2) \end{cases}$$

Στηριζόμενοι εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς συνεχείας, ὅπως διετυπώθη εἰς τὴν §3, ἐξετάσατε τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως εἰς τὰ σημεῖα:

i) $(x_0,y_0)\neq(1,2)$, ii) $(1,2)$.

Πῶς δύνασθε νὰ ἐπιτύχετε μίαν ἄρσιν τῆς ἀσυνεχείας εἰς τὸ σημεῖον $(1,2)$;

10. Ἐξετάσατε μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πολικῶν συντεταγμένων τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ἄν} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ἄν} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$.

11. Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ἄν } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0, & \text{ἄν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Δείξατε ὅτι αὕτη εἶναι συνεχὴς εἰς τό σημεῖον (0,0).

12. Εὕρατε, ἄν ὑπάρχουν, τά κάτωθι ὅρια:

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^3-2y^3}{x^2+y^2}$, ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\pi)} x\cdot\eta\mu\dfrac{y}{x}$, iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2)$.

13. Ἐξετάσατε ὡς πρός τήν συνέχειαν εἰς τό σημεῖον (0,0) τήν συνάρτησιν μέ τύπον:

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\log(x^2+y^2), & \text{ἄν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ἄν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

14. Διά ποίαν τιμήν τοῦ α ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ἄν } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] \alpha, & \text{ἄν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

εἶναι συνεχὴς εἰς τό σημεῖον (0,0);

15. Μελετήσατε ὡς πρός τήν συνέχειαν τήν συνάρτησιν μέ τύπον:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}, & \text{ἄν } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\[2mm] 0, & \text{ἄν } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

16. Ἐξετάσατε ὡς πρός τήν ὁμαλήν συνέχειαν τήν συνάρτησιν μέ τύπον:

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{ἄν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ἄν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

εἰς τόν τόπον, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ὑπό τοῦ συνόλου $A=\{(x,y):|x|+|y|\leq 1\}$.

17. Δείξατε ὅτι ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχὴς ἐάν:

i) Ὅταν τό y εἶναι σταθερόν ἡ f εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x;

ii) Ὅταν τό x εἶναι σταθερόν ἡ f εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ὡς πρός y ὑπό τήν ἔννοιαν:

Διά κάθε ε>0 ὑπάρχει ἕν δ(ε) ἀνεξάρτητον τῶν x καί y τοιοῦτον ὥστε νά ἔχωμεν:

$$|f(x,y_1)-f(x,y)|<\varepsilon \quad \text{ὅταν} \quad |y_1-y|<\delta(\varepsilon).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

§1. ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Ἔστω $M=(x_1,x_2,\ldots,x_q)\longrightarrow f(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ μία πραγματική συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν σύνολον V τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbb{R}^q$. Ἔστω $M\in\mathbb{R}^q$. Προτιθέμεθα νά ὁρίσωμεν τάς q μερικάς παραγώγους τῆς f εἰς τό σημεῖον M.

Κατ' ἀρχάς ἄς περιορισθῶμεν εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$.

Ἔστω $M=(x,y,z)\longrightarrow f(M)=f(x,y,z)$ μία πραγματική συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον V τοῦ $\mathbb{R}^3$ καί ἔστω $M_0=(x_0,y_0,z_0)\in V$.

Ἡ συνάρτησις $x\longrightarrow f(x,y_0,z_0)$ εἶναι μία πραγματική συνάρτησις μιᾶς μόνον πραγματικῆς μεταβλητῆς, τῆς x, ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν διάστημα κέντρου x_0 καί ἡ παράγωγος αὐτῆς, ὡς πρός x, ἐφ' ὅσον ὑπάρχει, δηλ. τό:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

καλεῖται ***μερική παράγωγος*** τῆς f, ὡς πρός x, εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0,z_0).

Ἡ ἀνωτέρω μερική παράγωγος συμβολίζεται οὕτω:

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)\quad \text{ἤ}\quad \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}.$$

Θεωροῦντες τάς συναρτήσεις $y\to f(x_0,y,z_0)$ καί $z\to f(x_0,y_0,z)$, ὁρίζομεν ἀναλόγως τάς μερικάς παραγώγους τῆς f ὡς πρός y ἤ z εἰς τό σημεῖον $M(x_0,y_0,z_0)$ καί τάς συμβολίζομεν οὕτω:

$$f'_y(x_0,y_0,z_0)\quad \text{ἤ}\quad \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}$$

$$f'_z(x_0,y_0,z_0)\quad \text{ἤ}\quad \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}.$$

Γενικῶς ἡ μερική παράγωγος τῆς $f(x_1,x_2,\ldots,x_\lambda,\ldots,x_q)$ εἰς τό σημεῖον $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_\lambda^0,\ldots,x_q^0)$, ὡς πρός x_λ, ἔνθα $1\leq\lambda\leq q$, ὁρίζεται ὡς ἡ παράγωγος, ἐάν ὑπάρχῃ, τῆς συναρτήσεως $x_\lambda\to f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_\lambda,\ldots,x_q^0)$, ἤτοι:

$$\frac{\partial f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_\lambda^0,\ldots,x_q^0)}{\partial x_\lambda}=\lim_{x_\lambda\to x_\lambda^0}\frac{f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_\lambda,\ldots,x_q^0)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_\lambda^0,\ldots,x_q^0)}{x_\lambda-x_\lambda^0}$$

Συμβολίζεται δέ αὕτη καί οὕτω: $f'_{x_\lambda}(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_\lambda^\circ, \ldots, x_q^\circ)$.

Μία συνάρτησις q μεταβλητῶν ἔχει q τό πλῆθος μερικάς παραγώγους α΄ τάξεως.

<u>Οἱ κανόνες παραγωγίσεως συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς ἰσχύουν καί διά τάς μερικάς παραγώγους συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν.</u>

Εἰδικῶς ἔχομεν:

α) Ἡ μερική παράγωγος σταθερᾶς συναρτήσεως ὡς πρός οἱανδήποτε μεταβλητήν εἶναι 0, ἤτοι: $\frac{\partial c}{\partial x_\lambda} = 0$.

β) Ἡ μερική παράγωγος μιᾶς μεταβλητῆς ὡς πρός αὐτήν τήν ἰδίαν εἶναι ἴση πρός 1, ἤτοι: $\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\lambda} = 1$.

γ) Ἡ μερική παράγωγος μιᾶς μεταβλητῆς ὡς πρός μίαν ἄλλην ἰσοῦται πρός μηδέν, ἤτοι: $\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\lambda} = 0$.

<u>Παραδείγματα</u>:

1ον) Ἔστω $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + y^3 - 1$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 3y^2$

2ον) Ἔστω $f(x,y) = a \cdot x$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = a$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

3ον) Ἔστω $f(x,y) = a$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

4ον) Ἔστω $f(x,y,z) = x + y + z + 1$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 1$.

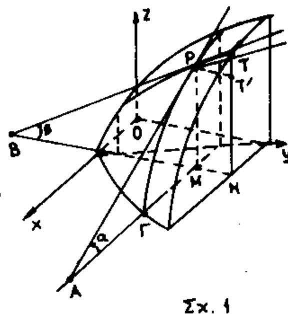
5ον) Ἔστω $f(x,y) = x^y$, $x > 0$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$.

6ον) Ἔστω $f(x,y) = \text{τοξ εφ}\,\frac{y}{x}$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$ καί $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

<u>Γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν μερικῶν παραγώγων</u> $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

Ἔστω $z = f(x,y)$ μία ἐπιφάνεια (Πρβλ. §3. Κεφ. II) μέ γραφικήν παράστασιν ὡς ἐν σχ. 1 (βλ. ἑπομένην σελίδα).

Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον $P(x_0, y_0, z_0)$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Τὸ ἐπίπεδον $y=y_0$ τέμνει τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν γραμμὴν ΡΓ μὲ ἐξίσωσιν: $z=f(x, y_0)$, $y=y_0$.



Σχ. 1

Τότε ὅμως, συμφώνως πρὸς τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τῆς παραγώγου συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς (βλ. Τόμος A_1 σελ. 269), εἶναι:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \text{εφ } a,$$

ὅπου a εἶναι ἡ γωνία τοῦ ἄξονος τῶν x μὲ τὴν ἐφαπτομένην ΡΑ τῆς τομῆς ΡΓ εἰς τὸ σημεῖον $P(x_0, y_0, z_0)$. Ὁμοίως σκεπτόμενοι ἔχομεν ὅτι (βλ. σχ. 1):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \text{εφ } \beta .$$

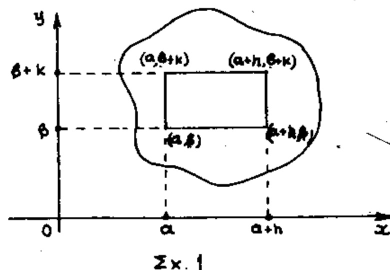
§2. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Πρότασις III-2-1. Ἐὰν ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(M)$, ὅπου $M=(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ ἐπιδέχεται εἰς τὸ σημεῖον Α μερικὰς παραγώγους συνεχεῖς, τότε ἡ $f(M)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἀπόδειξις: Ἂς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς τὴν συνάρτησιν $f(x,y)$, ἥτις ἔχει εἰς τὸ σημεῖον $A(a,\beta)$ καὶ εἰς μίαν περιοχὴν V αὐτοῦ μερικὰς παραγώγους $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ καὶ τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν συνεχεῖς εἰς τὸ σημεῖον $A(a,\beta)$.

Εἰς τὸ σημεῖον $M(x,y)$ θέτομεν: $x=a+h$, $y=\beta+k$ καὶ ἔστω $\Delta=f(M)-f(A)=f(a+h,\beta+k)-f(a,\beta)$.

Ὑποθέτομεν ὅτι, τὰ $|h|$, $|k|$ εἶναι ἀρκετὰ μικρά, ὥστε πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος ὡς ἀπέναντι κορυφὰς τὰ Α καὶ Μ καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας ν' ἀνήκουν εἰς τὴν θεωρηθεῖσαν περιοχὴν V (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

Δυνάμεθα λοιπόν νά γράψωμεν:

$$\Delta = f(a+h,\ \beta+k) - f(a,\beta+k) + f(a,\beta+k) - f(a,\beta)$$

$$= h\cdot f'_x\ (a+\theta\cdot h,\ \beta+k) + k f'_y\ (a,\beta+\theta' k) \quad (1) \quad \text{ὅπου } 0<\theta,\theta'<1.$$

Λόγω τῆς ὑποθέσεως τῆς συνεχείας τῆς f'_x εἰς τό σημεῖον $A(a,\beta)$ ἔχομεν:

$$f'_x(a+\theta\cdot h,\ \beta+k) = f'_x(a,\beta) + \varepsilon_1(h,k)$$

ὅπου ἡ συνάρτησις $\varepsilon_1(h,k) \to 0$ τοῦ $M \to A$.

Ὁμοίως $f'_y(a,\beta+\theta k) = f'_y(a,\beta) + \varepsilon_2(k)$, ὅπου ἡ $\varepsilon_2(k) \to 0$ τοῦ $M \to A$

Ὅθεν, ἡ (1) γράφεται: $f(M)-f(A) = h\cdot f'_x(A) + k\cdot f'_y(A) + h\cdot\varepsilon_1 + k\cdot\varepsilon_2$ (2)

Τοῦ $M \to A$ τά $(h,k) \to (0,0)$ καί συγχρόνως τά $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$.

Ἄρα $\lim\limits_{M\to A} f(M) = f(A)$, δηλ. ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον $A(a,\beta)$.

Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἐπεκτείνεται καί διά συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητῶν.

<u>Παρατήρησις</u>: <u>Ἡ ὕπαρξις τῶν μερικῶν παραγώγων μιᾶς συναρτήσεως εἰς ἕνα σημεῖον δέν συνεπάγεται τήν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως εἰς αὐτό τό σημεῖον</u>.

Περί τοῦ ἀνωτέρω βεβαιούμεθα καί ἐκ τοῦ κάτωθι παραδείγματος:

$$\text{Ἔστω ἡ συνάρτησις: } f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } xy \neq 0 \\ x+y, & \text{ἄν } xy = 0 \end{cases}$$

Ἡ ὡς ἄνω συνάρτησις εἰς τό σημεῖον (0,0) ἔχει μερικάς παραγώγους ἴσας, ἤτοι:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1 \quad \text{καί}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Ἡ f ὅμως δέν εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον (0,0), διότι ἐάν θεωρήσωμεν τήν ἀκολουθίαν $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, τότε $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = 1$, διότι $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \neq 0$ καί $f(0,0) = 0 \neq 1$. Δηλαδή διά $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \neq f(0,0)$. Ἄρα ἡ f <u>δέν</u> εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον (0,0), παρ' ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι αὐτῆς εἰς τό ἐν λόγῳ σημεῖον.

§ 3. <u>ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

Ἔστω $M = (x,y,z) \to f(M) = f(x,y,z)$ μία πραγματική συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον U τοῦ $\mathbb{R}^3$.

Θά λέγωμεν ὅτι ἡ f εἶναι ***διαφορίσιμος*** εἰς τό σημεῖον $M_0(x_0,y_0,z_0)\in U$, ἐάν ὑπάρχουν σταθεραί a_0, a_1, a_2, a_3 τοιαῦται, ὥστε ἡ $f(M)$ νά δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν κάτωθι μορφήν:

$$f(M)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)+\|M-M_0\|\cdot\varepsilon(\|M-M_0\|), \qquad (1)$$

ὅπου ἡ συνάρτησις $\varepsilon(\|M-M_0\|)$, ὁριζομένη ὑπό τῆς ἀνωτέρω σχέσεως διά $M\neq M_0$ ἔχει τήν ἰδιότητα: $\varepsilon(\|M-M_0\|)\to 0$ τοῦ $M\to M_0$ καί $\varepsilon(0)=0$.

Ὁ συμβολισμός $\|\cdot\|$ παριστᾶ μία τῶν τριῶν γνωστῶν normes ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^3$.

Θά λέγωμεν ὅτι ἡ f εἶναι διαφορίσιμος ἐν U, ὅταν εἶναι διαφορίσιμος εἰς κάθε σημεῖον αὐτοῦ.

Πρότασις ΙΙΙ- 3-1. Ἐάν μία συνάρτησις $f(x,y,z)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τό σημεῖον $M_0(x_0,y_0,z_0)$, τότε ἰσχύουν τά κάτωθι:

α) Ἡ f εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον M_0 καί ἰσχύει: $f(M_0)=a_0$

β) Ἡ f ἐπιδέχεται μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως εἰς τό σημεῖον M_0 καί ἰσχύουν:

$$f'_x(M_0)=a_1,\ f'_y(M_0)=a_2,\ f'_z(M_0)=a_3.$$

Ἀπόδειξις: α) Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) διά $M=M_0$ λαμβάνομεν: $f(M_0)=a_0$.

Εἶναι δέ $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=a_0=f(M_0)$. Ὅθεν ἡ f εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον M_0.

β) Ἡ (1) διά $y=y_0$, $z=z_0$ γράφεται:

$$f(x,y_0,z_0)=f(x_0,y_0,z_0)+a_1(x-x_0)+|x-x_0|\cdot\varepsilon(|x-x_0|).$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος διά $x\neq x_0$ λαμβάνομεν:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}=a_1$$

Συνεπῶς ἡ $f'_x(x_0,y_0,z_0)$ ὑπάρχει καί ἰσοῦται πρός a_1.

Δι' ἀναλόγου συλλογισμοῦ εὑρίσκομεν:

$$f'_y(x_0,y_0,z_0)=a_2 \text{ καί } f'_z(x_0,y_0,z_0)=a_3$$

Κατόπιν τούτων ἡ (1) γράφεται:

$$f(M)=f(M_0)+f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)+\|M-M_0\|\cdot\varepsilon(\|M-M_0\|)$$

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἐπεκτείνεται καί διά μίαν συνάρτησιν p τό πλῆθος μεταβλητῶν.

Πρότασις ΙΙΙ - 3-2. Κάθε πραγματική συνάρτησις πολλῶν μεταβλητῶν ἔχουσα μερικάς παραγώγους συνεχεῖς εἰς ἕνα σημεῖον εἶναι διαφορίσιμος εἰς αὐτό τό σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἄς θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)$ τριῶν μεταβλητῶν. Ἔστωσαν τὰ σημεῖα $M_0(x_0,y_0,z_0)$ καὶ $M(x,y,z)$.

Λόγω τοῦ ὅτι ἡ συνάρτησις ἔχει μερικὰς παραγώγους συνεχεῖς, ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν (2) τῆς προτάσεως III-2-1 (βλ. ἀπόδειξιν προτάσεως) διὰ τὴν περίπτωσιν τριῶν μεταβλητῶν, θὰ ἔχωμεν:

$$f(M)=f(M_0)+h\cdot f'_x(M_0)+k\cdot f'_y(M_0)+\ell\cdot f'_z(M_0)+h\cdot\varepsilon_1+k\cdot\varepsilon_2+\ell\,\varepsilon_3, \quad (1)$$

ὅπου τοῦ $M\to M_0$ τὰ $(h,k,\ell)\to(0,0,0)$ καθὼς καὶ τὰ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\to(0,0,0)$.

Ὁρίζομεν ἤδη τὴν συνάρτησιν:

$$\varepsilon(\|M-M_0\|)=\begin{cases}\dfrac{h\varepsilon_1+k\varepsilon_2+\ell\varepsilon_3}{\|M-M_0\|}, & \text{ἄν } M\neq M_0\\ 0, & \text{ἄν } M=M_0\end{cases}$$

Λόγω τῆς ἰσοδυναμίας τῶν τριῶν normes ἐν $\mathbb{R}^3$ ἔχομεν:

$$\|M-M_0\|=\operatorname{Sup}(|h|,|k|,|\ell|), \text{ συνεπῶς } \frac{|h|}{\|M-M_0\|}\leq 1, \frac{|k|}{\|M-M_0\|}\leq 1, \frac{|\ell|}{\|M-M_0\|}\leq 1$$

Ὅθεν: $|\varepsilon(\|M-M_0\|)|\leq|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|$, ὅπερ ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς $\varepsilon(\|M-M_0\|)$ εἰς τὸ M_0, ὁπότε $\varepsilon(\|M-M_0\|)\to 0$ τοῦ $M\to M_0$.

Ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ τῆς $\varepsilon(\|M-M_0\|)$ καὶ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$f(M)=f(M_0)+f'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+f'_z(M_0)\cdot(z-z_0)+\|M-M_0\|\cdot\varepsilon(\|M-M_0\|).$$

Ἡ τελευταία σχέσις ἀποδεικνύει ὅτι ἡ συνάρτησις $f(M)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τὴν θέσιν M_0.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως προκύπτει ὅτι τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν χρησιμοποιουμένων συναρτήσεων εἶναι διαφορίσιμοι (π.χ. πολυώνυμα, ἐκθετικαὶ συναρτήσεις κ.τ.λ.).

Μία συνάρτησις πληροῦσα τὰς ὑποθέσεις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως καλεῖται ***κατὰ συνέχειαν διαφορίσιμος***.

Παρατήρησις: Εἶναι δυνατὸν μία συνάρτησις νὰ εἶναι διαφορίσιμος εἰς ἓν σημεῖον καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι νὰ εἶναι εἰς αὐτὸ ἀσυνεχεῖς. Παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ συνάρτησις: $f(x,y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ μὲ $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)=t^2\cdot \text{ημ}\,t^{-1}$, $t\neq 0$.

§4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἔστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x,y)$, ἥτις ἐπιδέχεται εἰς τὸ σημεῖον $(\xi,\eta)\in I\subset\mathbb{R}^2$ μερικὰς παραγώγους συνεχεῖς, δηλ. εἶναι διαφορίσιμος ἐπ᾽ αὐτοῦ τοῦ σημείου. Τότε,

συμφώνως πρός τόν τύπον (2) τῆς §2 θά ἔχωμεν:

$f(x,y)-f(\xi,\eta)=h\cdot f'_x(\xi,\eta)+k\cdot f'_y(\xi,\eta)+h\cdot\varepsilon_1+k\cdot\varepsilon_2$, ὅπου $h=x-\xi$, $k=y-\eta$, καί τοῦ $(x,y)\longrightarrow(\xi,\eta)$ τό $(h,k)\longrightarrow(0,0)$ καί συγχρόνως τό $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\longrightarrow(0,0)$.

<u>Ὁρισμός III-4-1</u>. ***Ἡ παράστασις $h\cdot f'_x(\xi,\eta)+k\cdot f'_y(\xi,\eta)$, ἥτις ἐξαρτᾶται γραμμικῶς ἐκ τῶν h καί k καλεῖται ὁλικόν διαφορικόν τῆς $f(x,y)$ εἰς τό σημεῖον (ξ,η) καί συμβολίζεται οὕτω.***

$$df(\xi,\eta)=f'_x(\xi,\eta)\cdot h+f'_y(\xi,\eta)\cdot k \qquad (1)$$

Τά $h=x-\xi$, $k=y-\eta$ εἶναι ἀντιστοίχως τά διαφορικά τῶν συναρτήσεων $\varphi(x,x)=x,\psi(y,y)=y$ ὡρισμένων ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^2$.

Πράγματι, $\varphi'_x(x,x)=1$, $\varphi'_y(x,x)=0$, $\psi'_x(y,y)=0$, $\psi'_y(y,y)=1$. καί $d\varphi(x,x)=dx=1\cdot h+0\cdot k=h$, $d\psi(y,y)=dy=0\cdot h+1\cdot k=k$.

Ὅθεν ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$df(\xi,\eta)=f'_x(\xi,\eta)\,dx+f'_y(\xi,\eta)\,dy \quad (2)$$

Εἰς τήν τυχοῦσαν θέσιν (x,y) τό διαφορικόν τῆς $f(x,y)$ γράφεται:

$$\boxed{df(x,y)=f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy} \quad (3).$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3) προκύπτει ὅτι, τό διαφορικόν τῆς $f(x,y)$ εἰς τήν γενικήν θέσιν (x,y) εἶναι συνάρτησις τῶν x,y,dx,dy. Συνήθως ὅμως τάς αὐξήσεις dx,dy τάς θεωροῦμεν σταθεράς, ὅτε τό διαφορικόν εἶναι συνάρτησις τῶν x,y.

Αἱ παραστάσεις $f'_x(\xi,\eta)\,dx$, $f'_y(\xi,\eta)\,dy$ καλοῦνται ***μερικά διαφορικά*** ὡς πρός x,y (ἀντιστοίχως) εἰς τό σημεῖον (ξ,η).

Γενικῶς διά τήν διαφορίσιμον συνάρτησιν $f(x_1,x_2,\dots,x_q)$ τό διαφορικόν αὐτῆς εἰς τό σημεῖον $(x_1,x_2,\dots,x_q)$ ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως:

$$\boxed{df(x_1,x_2,\dots,x_q)=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_q}dx_q} \quad (4)$$

Ἡ παράστασις $d(\cdot)=\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q}dx_q$ καλεῖται ***διαφορικός τελεστής 1ης τάξεως*** ἐφαρμοζόμενος ἐπί τῆς διαφορισίμου συναρτήσεως $f(x_1,x_2,\dots,x_q)$ εἰς τό σημεῖον $(x_1,x_2,\dots,x_q)$.

<u>Παράδειγμα 1ον</u> Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x_1,x_2,\dots,x_q)=\log(1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_q^2)$ ὡρισμένη ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^q$. Αὐτή ἔχει μερικάς παραγώγους ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^q$ καί εἶναι: $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{2x_i}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_q^2}$, $i=1,2,\dots,q$.

Ὅθεν,
$$df=\sum_{i=1}^{q}\frac{2x_i\,dx_i}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_q^2}$$

2ον/. Διά τόν μετασχηματισμόν: $x=\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\,\eta\mu\theta$, $\rho>0$, $0\leq\theta<2\pi$ ἀπό ὀρθογωνίους εἰς πολικάς συντεταγμένας εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι θά ἔχωμεν:

i) $dx=\sigma\upsilon\nu\theta\,d\rho-\rho\,\eta\mu\theta\,d\theta$. ii) $dy=\eta\mu\theta\,d\rho+\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta$

Ἐπειδή δέ θά εἶναι τότε: $\rho^2=x^2+y^2$, $\theta=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\tau o\xi\eta\mu\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ θά ἔχωμεν:

iii) $d\rho=\sigma\upsilon\nu\theta\,dx+\eta\mu\theta\,dy$ iv) $d\theta=-\dfrac{\eta\mu\theta}{\rho}dx+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho}dy$.

Θά εἶναι δέ καί:

v) $\left(\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\right)_\theta^{1)}=\sigma\upsilon\nu\theta$, $\left(\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\right)_y=\tau\epsilon\mu\theta$, $\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\right)_y=\sigma\upsilon\nu\theta$, $\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\right)_\theta=\tau\epsilon\mu\theta$

§5. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

I. Περίπτωσις μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Πρότασις III-5-1. Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $u(t)$, $v(t)$ ὡρισμέναι ἐπί τοῦ $I\subset\mathbb{R}$, ἔχουσαι παραγώγους συνεχεῖς ἐπ' αὐτοῦ καί ἡ συνάρτησις $f(u,v)$ ὡρισμένη ἐπί τοῦ $E\subset\mathbb{R}^2$ ἔχουσα μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ E. Τότε ἡ σύνθετος συνάρτησις: $F(t)=f(u(t),v(t))$ ἔχει παράγωγον συνεχῆ ἐπί τοῦ I διδομένην ὑπό τοῦ τύπου:

$$\boxed{F'(t)=f'_u(u,v)\,u'(t)+f'_v(u,v)\,v'(t)} \qquad (1)$$

Γενικῶς: Ἐάν $F(t)=f(u_1(t),u_2(t),\dots,u_q(t))$, ὅπου ἡ f καί $u_1,u_2,\dots,u_q$ πληροῦν τάς ἀνωτέρω συνθήκας, τότε $F'(t)=f'_{u_1}(M)\cdot u'_1(t)+f'_{u_2}(M)\cdot u'_2(t)+\dots+f'_{u_q}(M)\cdot u'_q(t)$, ὅπου

$$M=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_q(t)).$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω διά $t=t_0$ εἶναι $u(t_0)=a$ καί $v(t_0)=b$.

Θεωροῦμεν τήν τιμήν $t=t_0+\Delta t$ καί λόγῳ τῆς συνεχείας τῶν $u(t)$, $v(t)$ θά ἔχωμεν:

$$u(t_0+\Delta t)=u(t_0)+h=a+h$$
$$v(t_0+\Delta t)=v(t_0)+k=b+k$$

ὅπου τά $(h,k)\longrightarrow(0,0)$ τοῦ $\Delta t\longrightarrow 0$.

Εἶναι δέ,

$$F(t_0+\Delta t)-F(t_0)=f(a+h,b+k)-f(a,b)=h\cdot f'_u(a,b)+k\cdot f'_v(a,b)+h\cdot\varepsilon_1+k\,\varepsilon_2 \qquad (1)$$

1) *Οἱ κάτω δεῖκται θ,y σημαίνουν ὅτι, αὗται αἱ μεταβληταί κατά τήν παραγώγισιν παραμένουν σταθεραί.*

καί $\frac{F(t_0+\Delta t)-F(t_0)}{\Delta t}=\frac{h}{\Delta t}\cdot f'_u(\alpha,\beta)+\frac{k}{\Delta t}\cdot f'_v(\alpha,\beta)+\frac{h}{\Delta t}\cdot\varepsilon_1+\frac{k}{\Delta t}\cdot\varepsilon_2$ (2)

ὅπου τά $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\longrightarrow(0,0)$ τοῦ $\Delta t\longrightarrow 0$.

Θά ἔχωμεν ἐπί πλέον:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t_0+\Delta t)-u(t_0)}{\Delta t}=u'_t(t_0).$$

$$\text{καί}\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{k}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}=v'_t(t_0)$$

Ὅθεν τοῦ $t\to t_0$ τό ὅριον τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (2) ὑπάρχει καί εἶναι ἴσον πρός $f'_u(A)\cdot u'(t_0)+f'_v(A)\cdot v'(t_0)$, ὅπου $A=(\alpha,\beta)$.

Συνεπῶς θά ὑπάρχῃ καί τό ὅριον τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) καί θά ἰσχύῃ διά κάθε $t\in I$:

$$F'(t)=f'_u(M)\cdot u'(t)+f'_v(M)\cdot v'(t),\ \text{ὅπου } M=(u(t),v(t)).$$

$$\text{ἤ}\quad F'(t)=f'_u(u,v)\cdot u'(t)+f'_v(u,v)\cdot v'(t).$$

__Παρατήρησις__: Ὁ ἀνωτέρω κανών παραγωγίσεως μιᾶς συνθέτου συναρτήσεως περιέχει ὡς μερικάς περιπτώσεις τούς κανόνας παραγωγίσεως, οἵτινες δίδουν τήν παράγωγον ἑνός ἀθροίσματος, γινομένου ἤ πηλίκου συναρτήσεως.

π.χ. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(u,v,w)=u\cdot v\cdot w$, ὅπου αἱ u,v,w εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t. Εἶναι $f'_u=v\cdot w$, $f'_v=u\cdot w$, $f'_w=u\cdot v$.

Ὅθεν βάσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἔχομεν:

$$(u\cdot v\cdot w)'_t=v\cdot w\cdot u'_t+u\cdot w\cdot v'_t+u\cdot v\cdot w'_t.$$

__Ἐφαρμογαί__: 1η) Ἔστω $f(u,v)=u^v$, ὅπου αἱ u,v εἶναι συναρτήσεις τοῦ t καί $u(t)>0$.

Εἶναι $f'_u=v\cdot u^{v-1}$, $f'_v=u^v\cdot\log u$.

Ὅθεν, βάσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου, ἔχομεν: $(u^v)'_t=u'_t\cdot v\cdot u^{v-1}+v'_t\cdot u^v\cdot\log u$.

2α) Μία συνάρτησις $f(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ καλεῖται ***ὁμογενής K-τάξεως***, ἐάν ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$f(tx_1,tx_2,\ldots,tx_q)=t^K f(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ διά $t\in\mathbb{R}$: Παραγωγίζοντες ὡς πρός t τήν ἀνωτέρω συνάρτησιν καί θέτοντες $t=1$ λαμβάνομεν τήν σχέσιν:

$x_1f'_{x_1}+x_2f'_{x_2}+\cdots+x_qf'_{x_q}=K\cdot f(x_1,x_2,\ldots,x_q)$, ἥτις καλεῖται ***σχέσις τοῦ Euler*** χαρακτηρίζουσα τάς ὁμογενεῖς συναρτήσεις τάξεως K.

II. Περίπτωσις περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν:

Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(u,v,w)$, ὅπου τά u,v,w εἶναι συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν τῶν x καί y, ἤτοι: $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, $w=\sigma(x,y)$.

Οὕτω ἐπιτυγχάνεται μία σύνθετος συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν x,y ἤτοι:

$$F(x,y)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y),\sigma(x,y)).$$

Ἀρκεῖ νά φαντασθῶμεν διαδοχικῶς ὅτι τό y καί ἔπειτα τό x ἔχουν σταθεράς τιμάς διά νά ἐπιτύχωμεν: $F'_x(x,y)=f'_u(u,v,w)\cdot\varphi'_x(x,y)+f'_v(u,v,w)\cdot\psi'_x(x,y)+f'_w(u,v,w)\,\sigma'_x(x,y)$ (2)

Ὁμοίως: $F'_y(x,y)=f'_u(u,v,w)\cdot\varphi'_y(x,y)+f'_v(u,v,w)\cdot\psi'_y(x,y)+f'_w(u,v,w)\,\sigma'_y(x,y)$ (2′)

Διαφορικόν τῆς συνθέτου συναρτήσεως:

I. Διά τήν περίπτωσιν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἔχομεν βάσει τοῦ τύπου (1)

$df(u(t),v(t))=dF(t)=F'(t)dt=\{f'_u(u,v)\,u'(t)+f'_v(u,v)\,v'(t)\}\,dt=f'_u(u,v)\cdot u'(t)\,dt+f'_v(u,v)\,v'(t)dt$

ἤ $df(u(t),v(t))=f'_u(u,v)\cdot du+f'_v(u,v)\,dv$ (3)

II. Διά τήν περίπτωσιν περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν π.χ. ὡς διά τήν συνάρτησιν $f(u,v,w)$, ὅπου $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, $w=\sigma(x,y)$, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τούς τύπους (2) καί (2′) ἔχομεν:

$$\begin{aligned}
df(u,v,w)&=df(\varphi(x,y),\psi(x,y),\sigma(x,y))=dF(x,y)=F'_x(x,y)dx+F'_y(x,y)dy\\
&=\{f'_u(u,v,w)\cdot\varphi'_x(x,y)+f'_v(u,v,w)\cdot\psi'_x(x,y)+f'_w(u,v,w)\sigma'_x(x,y)\}\,dx\\
&+\{f'_u(u,v,w)\,\varphi'_y(x,y)+f'_v(u,v,w)\,\psi'_y(x,y)+f'_w(u,v,w)\sigma'_y(x,y)\}\,dy\\
&=f'_u(u,v,w)\,(\varphi'_x dx+\varphi'_y dy)+f'_v(u,v,w)\cdot(\psi'_x dx+\psi'_y dy)+f'_w(u,v,w)\,(\sigma'_x dx+\sigma'_y dy)\\
&=f'_u(u,v,w)du+f'_v(u,v,w)dv+f'_w(u,v,w)dw.
\end{aligned}$$

Ὅθεν:

$$df(u,v,w)=f'_u(u,v,w)du+f'_v(u,v,w)dv+f'_w(u,v,w)dw \quad (4)$$

• Ἀναλλοίωτον τοῦ ὁλικοῦ Διαφορικοῦ

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τόν ὁρισμόν ὁλικοῦ διαφορικοῦ συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν βλ. § 4 τύπους (3) καί (4) καί τούς τύπους (3) καί (4) τῆς παρούσης παραγράφου παρατηροῦμεν ὅτι: Τό ὁλικόν διαφορικόν (συντόμως: τό πρῶτον διαφορικόν) ἔχει πάντοτε τήν αὐτήν μορφήν, εἴτε αἱ μεταβληταί εἶναι ἀνεξάρτητοι εἴτε συναρτήσεις ἄλλων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Ἐφαρμογαί τῶν τύπων (3) ἤ (4)

Ἔστωσαν u καί v δύο συναρτήσεις μιᾶς ἤ περισσοτέρων μεταβλητῶν, ἔχουσα μερι-

κάς παραγώγους $1^{ης}$ τάξεως συνεχεῖς. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3) ἤ (4) εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι:

1ον) $$d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du$$

2ον) $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad \text{μέ } v \neq 0$$

3ον) $$\begin{cases} d(u+v) = du + dv \\ d(\lambda\cdot u) = \lambda\cdot du, \ \lambda \text{ σταθερά} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

1η) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων διαπιστοῦμεν ὅτι, δυνάμεθα νά ὑπολογίζωμεν τό διαφορικόν μιᾶς συναρτήσεως κατά ἕναν ἀνάλογον τρόπον, ὅπως καί τάς παραγώγους αὐτῶν.

2α) Παρατηροῦμεν ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων ὅτι, ἐάν τά u καί v εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μόνον μεταβλητῆς x, οἱ ἀνωτέρω τύποι μᾶς δίδουν πάλιν, ἐάν διαιρέσωμεν διά τοῦ dx, τούς κλασσικούς τύπους ὑπολογισμοῦ τῶν παραγώγων.

3η) Οἱ τύποι (3) ἤ (4) μᾶς ἐπιτρέπουν νά γράψωμεν πολλούς ἄλλους τύπους δίδοντες τά διαφορικά διαφόρων συναρτήσεων. Π.χ. Ἔστω u μία συνάρτησις μιᾶς ἤ περισσοτέρων μεταβλητῶν, ὑποθέτοντες ὅτι αὐτη ἔχει μερικάς παραγώγους συνεχεῖς.

Τότε:

$$d(u^a) = a\cdot u^{a-1}\cdot du, \quad d(e^u) = e^u\cdot du$$

$$d(\sigma\upsilon\nu u) = -\eta\mu u\cdot du, \quad d(\eta\mu u) = \sigma\upsilon\nu u\cdot du \quad \text{κ.τ.λ.}$$

§ 6. ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ἔστω $(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$ μία πραγματική συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν σύνολον U τοῦ $\mathbf{R}^3$.

Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ f'_x, f'_y, f'_z εἶναι ὡρισμέναι ἐντός τοῦ U. Ἐάν ἡ συνάρτησις $f'_x(x,y,z)$ ἐπιδέχεται μερικάς παραγώγους $(f'_x)_x$, $(f'_x)_y$, $(f'_x)_z$, αὗται καλοῦνται ***μερικαί παράγωγοι δευτέρας τάξεως*** καί συμβολίζονται οὕτω: $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{xz}$.

(Τά σύμβολα x^2, xy, xz δέν παριστοῦν οὐδόλως γινόμενα).

Ὁμοίως αἱ μερικαί παράγωγοι τῶν f'_y, f'_z, ἐάν ὑπάρχουν, συμβολίζονται οὕτω:

$$f''_{yx},\ f''_{y^2},\ f''_{yz},\ f''_{zx},\ f''_{zy},\ f''_{z^2}$$

Συνήθως χρησιμοποιοῦμεν καί τόν συμβολισμόν:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

__Παράδειγμα__: Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y)=x^y\ (x>0)$

Εἶναι $f'_x = y\cdot x^{y-1}$, $f'_y = x^y\cdot \log x$ καί

$$f''_{x^2} = y\,(y-1)\,x^{y-2} \qquad f''_{yx} = yx^{y-1}\log x + x^y\cdot\frac{1}{x}$$

$$f''_{xy} = x^{y-1} + y\cdot x^{y-1}\log x \qquad f''_{y^2} = x^y\ (\log x)^2$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $f''_{xy}=f''_{yx}$. Ἐξ αὐτοῦ θά ἴδωμεν ὅτι πρόκειται περί μιᾶς γενικῆς ἰδιότητος τῶν μερικῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων.

__Πρότασις III– 6-1.__ Ἔστω $(x,y)\longrightarrow f(x,y)$ __μία συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕνα ἀνοικτό σύνολον A τοῦ $\mathbb{R}^2$ καί ἔστω ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι $f'_x,\ f'_y,\ f''_{xy},\ f''_{yx}$ μέ__ $f''_{xy},\ f''_{yx}$ __συνεχεῖς εἰς τό A. Τότε ἰσχύει__ $f''_{xy}=f''_{yx}$ (Θεώρημα τοῦ Schwartz).

__Ἀπόδειξις__: Ἔστω $(x_0,y_0)\in A$. Θεωροῦμεν τοιαύτας τιμάς τῶν x,y ἀρκετά πλησίον τῶν x_0,y_0 ὥστε τό ζεῦγος $(x,y)\in A$.

Θέτομεν:

$$u=f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0) \qquad (1)$$

$$F(x)=f(x,y_0+k)-f(x,y_0) \qquad (2)$$

$$G(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y) \qquad (3)$$

Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$u=F(x_0+h)-F(x_0) \qquad (4)$$

καί ἐπίσης:

$$u=G(y_0+k)-G(y_0). \qquad (5)$$

Ἡ συνάρτησις $F(x)$ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς τό διάστημα $[x_0,x_0+h]$, ἑπομένως θά ἔχωμεν:

$$F'(x)=f'_x(x,y_0+k)-f'_x\ (x,y_0) \qquad (6)$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς εἰς τήν συνάρτησιν $u=F(x_0+h)-F(x_0)$ λαμβάνομεν:

$$u=h\cdot F'(x_0+\theta\cdot h),\ \text{ὅπου}\ 0<\theta<1 \qquad (7)$$

Ἡ (7), λόγω τῆς (6), γίνεται:

$$u=h\cdot\ [f'_x(x_0+\theta\cdot h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)] \qquad (8)$$

Ἡ συνάρτησις $y\longrightarrow f'_x\ (x_0+\theta h\ y)$ εἶναι παραγωγίσιμος καί τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος,

ὡς πρός y, εἶναι $f''_{xy}(x_0+\theta h, y)$. Ἐπομένως δυνάμεθα νά ἔχωμεν:

$f'_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta h, y_0) = k\cdot f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1\cdot k)$ ὅπου $0<\theta_1<1$.

Ἡ σχέσις λοιπόν (8) γράφεται:

$$u = h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1\cdot k) \qquad (9)$$

Δι' ἀναλόγου συλλογισμοῦ μεταξύ τῶν (3) καί (5) λαμβάνομεν:

$$u = k\cdot G'(y_0+\theta_2 k) = k\left[f'_y(x_0+h, y_0+\theta_2\cdot k) - f'_y(x_0, y_0+\theta_2 k)\right] = k\cdot h\cdot f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_2\cdot k) \qquad (10)$$

ὅπου $0<\theta_2<1$, $0<\theta_3<1$.

Ἐάν $h\neq 0$ καί $k\neq 0$ ἐκ τῶν (9) καί (10) λαμβάνομεν:

$$f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1\cdot k) = f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_2\cdot k) \qquad (11)$$

Ὅταν τά $(h,k)\longrightarrow(0,0)$, καί ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ f''_{xy}, f''_{yx} εἶναι συνεχεῖς συνεπάγεται ὅτι τά δύο μέλη τῆς (11) τείνουν ἀντιστοίχως πρός τούς ἀριθμούς $f''_{xy}(x_0,y_0)$ καί $f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Συνεπῶς $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

<u>Γενίκευσις</u>: Ἔστω $(x_1,x_2,\ldots,x_p)\longrightarrow f(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ μία συνάρτησις ὡρισμένη καί ἐπιδεχομένη μερικάς παραγώγους πρώτης καί δευτέρας τάξεως συνεχεῖς εἰς ἕνα ἀνοικτόν ὑπερδιάστημα τοῦ $\mathbb{R}^p$, τότε:

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$$

Πράγματι, ἐάν π.χ. $i=1$ καί $j=2$, αὐταί αἱ παράγωγοι ἐπιτυγχάνονται παραγωγίζοντες τήν συνάρτησιν $(x_1,x_2)\longrightarrow f(x_1,x_2,x_3^0,x_4^0,\ldots,x_p^0)$.

Οὕτω ἀνήχθημεν εἰς τήν περίπτωσιν συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν.

<u>Ὁρισμός III-6-1</u>. *Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ὡρισμένη ἐπί τοῦ $I\subset\mathbb{R}^2$ ἔχουσα μερικάς παραγώγους, μέχρι δευτέρας τάξεως, συνεχεῖς. Καλοῦμεν διαφορικόν δευτέρας τάξεως τῆς $f(x,y)$ καί τό συμβολίζομεν οὕτω $d^2f(x,y)$, τό διαφορικόν τῆς $df(x,y)$.*

Εἶναι,
$$\begin{aligned} d^2f(x,y) &= d(df(x,y)) \\ &= d(f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy) \\ &= (df_x(x,y))dx + (df_y(x,y))dy \\ &= (f''_{x^2}(x,y)dx + f''_{xy}(x,y)dy)dx + (f''_{yx}(x,y)dx + f''_{y^2}(x,y)dy)dy \end{aligned}$$

(ἐπειδή $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$). Ὅθεν:

$$\boxed{d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)\,dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)\,dx\,dy + f''_{y^2}(x,y)\,dy^2}$$

Ἡ τελευταία ἔκφρασις γράφεται συντόμως καί οὕτω:

$$(f_x dx + f_y dy)^{(2)} \quad ἤ \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)^{(2)}$$

__Παράδειγμα:__ Νά εὑρεθῆ τό $d^2 f(x,y)$, ἔνθα $f(x,y)=\frac{1}{2}\log(x^2+a^2y^2)$.

__Λύσις:__ Εἶναι: $f_x = \dfrac{x}{x^2+a^2y^2}$, $f_y = \dfrac{a^2y}{x^2+a^2y^2}$

$$f''_{x^2} = \frac{a^2y^2-x^2}{(x^2+a^2y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{-2a^2xy}{(x^2+a^2y^2)^2}$$

$$f''_{yx} = \frac{-2a^2xy}{(x^2+a^2y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{a^2(x^2-a^2y^2)}{(x^2+a^2y^2)^2}.$$

Ὅθεν, $d^2 f(x,y) = \dfrac{a^2y^2-x^2}{(x^2+a^2y^2)^2}dx^2 + \dfrac{-4a^2xy}{(x^2+a^2y^2)^2}dx\,dy + \dfrac{a^2(x^2-a^2y^2)}{(x^2+a^2y^2)^2}dy^2$

Παρατηροῦμεν δέ ὅτι, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

§7. ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ἐπαγωγικῶς δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τάς μερικάς παραγώγους 3ης, 4ης, ..., nης τάξεως π.χ. Ἔστω ἡ συνάρτησις $(x,y) \longrightarrow f(x,y)$ ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}^2$.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ f ἐπιδέχεται μερικάς παραγώγους συνεχεῖς μέχρι 3ης τάξεως.

Ἐφαρμόζοντες τά ἀποτελέσματα τῆς προηγουμένης παραγράφου ἔχομεν:

$$f'''_{x^2y} = (f'_x)''_{xy} = (f'_x)''_{yx} = f'''_{xyx} = (f''_{xy})'_x = (f''_{yx})'_x = f'''_{yxx} = f'''_{yx^2}.$$

Ὥστε, $f'''_{x^2y} = f'''_{xyx} = f'''_{yx^2}$.

Ὁμοίως, $f'''_{xy^2} = f'''_{yxy} = f'''_{y^2x}$.

Ἐάν λοιπόν ἔχωμεν μερικάς παραγώγους μέχρι 3ης τάξεως τῆς συναρτήσεως $f(x,y)$, δέν ἔχομεν παρά νά θεωρήσωμεν τάς κάτωθι:

$$f'''_{x^3},\ f'''_{x^2y},\ f'''_{xy^2},\ f'''_{y^3}$$

Αἱ ἀνωτέρω μερικαί παράγωγοι συμβολίζονται καί οὕτω:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Αἱ μερικαί παράγωγοι nης τάξεως τῆς συναρτήσεως $f(x,y)$ θά εἶναι, ἐάν αὗται εἶναι συνεχεῖς, αἱ κάτωθι:

$$f^{(n)}_{x^n},\ f^{(n)}_{x^{n-1}y},\ f^{(n)}_{x^{n-2}y^2},\ \dots,\ f^{(n)}_{y^n}$$

Ὁ ἀντίστοιχος συμβολισμός αὐτῶν θά εἶναι ὁ κάτωθι:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y},\ \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

Εἰς τήν γενικήν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ἡ μερική παράγωγος ἡ πλέον γενική θά εἶναι:

$$f^{(n_1+n_2+\cdots+n_p)}_{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_p^{n_p}} \quad ἤ \quad \frac{\partial f^{(n_1+n_2+\cdots+n_p)}}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\cdots\partial x_p^{n_p}}$$

ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ μερικαί παράγωγοι μέχρι τῆς τάξεως $n_1+n_2+\cdots+n_p$ εἶναι συνεχεῖς.

Ἐάν ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ἔχῃ μερικάς παραγώγους μέχρι k-τάξεως συνεχεῖς, τότε τό ***διαφορικόν K-τάξεως*** τῆς $f(x,y)$ συμβολίζομεν οὕτω $d^k f(x,y)$ ὁρίζεται δέ τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀναδρομικοῦ τύπου:

$$d^k f(x,y) = d\left(d^{k-1} f(x,y)\right),\ k = 2,3,4,\ldots$$

Ἐπαγωγικῶς λοιπόν εὑρίσκομεν:

$$d^k f = f_{x^k}dx^k + k\cdot f_{x^{k-1}y}dx^{k-1}dy + \frac{k(k-1)}{2!}f_{x^{k-2}y^2}dx^{k-2}dy^2 + \cdots + kf_{xy^{k-1}}dx\,dy^{k-1} + f_{y^k}dy^k.$$

$$(\text{ἤ συμβολικῶς}) = (f_x dx + f_y dy)^{(k)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^{(k)}$$

Ἡ παράστασις $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(k)}$ $k = 1,2,3,\ldots$, καλεῖται ***διαφορικός τελεστής K-τάξεως*** ἐφαρμοζόμενος ἐπί τῆς μέχρι k-τάξεως διαφορισίμου συναρτήσεως $f(x,y)$.

§8. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

I. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y)$, ἥτις ἐπιδέχεται μερικάς παραγώγους συνεχεῖς μέχρι p-τάξεως ἐντός ἑνός ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^2$. Ἔστωσαν ἐπί πλέον αἱ συναρτήσεις: $x=u(t)$, $y=v(t)$ ἐπιδεχόμεναι συνεχεῖς παραγώγους μέχρι p-τάξεως εἰς ἕνα διάστημα τῆς $\mathbb{R}$. Τότε ἡ συνάρτησις $F(t)=f(u(t),v(t))$ ἐπιδέχεται εἰς αὐτό τό διάστημα παραγώγους μέχρι p-τάξεως, αἵτινες ὑπολογίζονται δι' ἐφαρμογῆς τῆς προτάσεως III-5-1. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$F'(t) = f'_u(u(t), v(t))\cdot u'(t) + f'_v(u(t), v(t))\cdot v'(t)$$

$$F''(t) = f''_{u^2}(u(t),v(t))\cdot u'^2(t) + 2\cdot f''_{uv}(u(t),v(t))\cdot u'(t)\cdot v'(t) +$$

$$+ f''_{v^2}(u(t),v(t))\cdot v'^2(t) + f'_u(u(t),v(t))\,u''(t) + f'_v(u(t),v(t))v''(t)$$

Τό διαφορικόν δευτέρας τάξεως τῆς $F(t)$ ὑπολογίζεται ὡς ἀκολούθως:

$$d^2F(t) = F''(t)dt^2 = f''_{u^2}(u(t),v(t))(u'(t)dt)^2 +$$
$$+2f''_{uv}(u(t),v(t))(u'(t)dt)\cdot(v'(t)dt) + f''_{v^2}(u(t),v(t))(v'(t)dt)^2 +$$
$$+ f'_u(u(t),v(t))(u''(t)dt^2) + f'_v(u(t),v(t))(v''(t)dt^2)$$
$$= f''_{u^2}(u(t),v(t))\,du^2(t) + 2f''_{uv}(u(t),v(t))\,du(t)\cdot dv(t) +$$
$$+ f''_{v^2}(u(t),v(t))\,dv^2(t) + f'_u(u(t),v(t))d^2u(t) + f'_v(u(t),v(t))d^2v(t).$$

Διατυποῦμεν καί ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν βασικήν πρότασιν.

Πρότασις III – 8-1. (Θεώρημα Μέσης Τιμῆς διά συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν). Ἐάν $f(x,y)$ εἶναι μία συνεχής συνάρτησις δύο μεταβλητῶν εἰς μίαν κλειστήν περιοχήν καί ἐάν αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι ὑπάρχουν εἰς τήν ἀνοικτήν περιοχήν, τότε ἰσχύει ὁ τύπος:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = h\cdot f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\cdot f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \quad \text{ὅπου } 0<\theta<1.$$

Ἀπόδειξις: Θέτομεν $F(t) = f(x_0+t\cdot h, y_0+t\cdot k)$, ὅπου $0\leq t\leq 1$.

Συμφώνως πρός τό θεώρημα Μέσης τιμῆς διά συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς ἔχομεν:

$$F(1)-F(0) = F'(\theta),\ \text{ὅπου } 0<\theta<1 \qquad (1)$$

Ἐάν θέσωμεν $x = x_0+t\cdot h$, $y = y_0+t\cdot k$, τότε $F(t) = f(x,y)$ ὁπότε θά ἔχωμεν:

$$F'(t) = f_x\cdot\frac{dx}{dt} + f_y\cdot\frac{dy}{dt} = h\cdot f_x + k\cdot f_y$$

καί $F'(\theta) = h\cdot f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta\cdot k) + k\cdot f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ ὅπου $0<\theta<1$.

Τότε ἡ (1) γράφεται:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = h\cdot f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\cdot f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \quad \text{ὅπου } 0<\theta<1.$$

II. Ἔστω ὅτι αἱ συναρτήσεις $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ ἔχουν μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου $W\subset\mathbb{R}^2$ μέχρι δευτέρας τάξεως. Ἔστω ἐπί πλέον ἡ συνάρτησις $f(u,v)$, ἥτις ἔχει μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ $O\subset\mathbb{R}^2$ μέχρι δευτέρας τάξεως.

Τότε διά τήν συνάρτησιν $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ ἔχομεν:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

καί

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\cdot\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

Διά τά διαφορικά πρώτης καί δευτέρας τάξεως ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\,.$$

Ὥστε:

$$\boxed{dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv} \qquad (1)$$

Διά δέ τό διαφορικόν δευτέρας τάξεως ἔχομεν:

$$\boxed{d^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2} \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (2) τάς $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ διά τῶν ἴσων των καί ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du,\ \frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=dv,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2=d^2u,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2=d^2v.$$

εὑρίσκομεν:

$$\boxed{d^2F=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial f}{\partial u}d^2u+\frac{\partial f}{\partial v}d^2v} \qquad (3)$$

Ἐφαρμογή. Ἔστω ἡ συνάρτησις $z=f(x,y)$ διά τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι μέχρι δευτέρας τάξεως εἶναι δέ καί συνεχεῖς. Ἐκτελοῦμεν ἀλλαγήν τῶν μεταβλητῶν εἰσάγοντες πολικάς συντεταγμένας ἤτοι:

$x=\rho\,\text{συν}\theta,\ y=\rho\,\text{ημ}\theta,\ \rho>0,\ 0\leq\theta<2\pi$, ὅτε θά εἶναι

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\text{τοξσυν}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\text{τοξημ}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ἡ δέ συνάρτησις γράφεται:

$$z=f(x,y)=f(\rho\,\text{συν}\theta,\rho\,\text{ημ}\theta)=F(\rho,\theta)\,.$$

Ζητοῦμεν νά ὑπολογίσωμεν τάς μερικάς παραγώγους $z_x, z_y, z_{x^2}, z_{xy}, z_{y^2}$ συναρτήσει τῶν ρ καί θ.

Λύσις: Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος παραγωγίσεως συνθέτων συναρτήσεων ἔχομεν:

$$Z_x = Z_\rho \cdot \rho_x + Z_\theta \cdot \theta_x = Z_\rho \cdot \frac{x}{\rho} - Z_\theta \cdot \frac{y}{\rho^2} = Z_\rho \,\text{συν}\theta - Z_\theta \cdot \frac{\text{ημ}\theta}{\rho} \qquad (1)$$

$$Z_y = Z_\rho \cdot \rho_y + Z_\theta \cdot \theta_y = Z_\rho \cdot \frac{y}{\rho} + Z_\theta \frac{x}{\rho^2} = Z_\rho \,\text{ημ}\theta + Z_\theta \cdot \frac{\text{συν}\theta}{\rho} \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι: $Z_x^2 + Z_y^2 = Z_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \cdot Z_\theta^2 \qquad (3)$

Ἡ σχέσις (3) χρησιμοποιεῖται συχνά. Διά τάς παραγώγους $\beta^{\text{ας}}$ τάξεως ἔχομεν:

$$Z_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(Z_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Z_\rho \text{συν}\theta - Z_\theta \frac{\text{ημ}\theta}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(Z_\rho \,\text{συν}\theta - Z_\theta \frac{\text{ημ}\theta}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(Z_\rho \text{συν}\theta - Z_\theta \cdot \frac{\text{ημ}\theta}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \left(Z''_{\rho^2} \,\text{συν}\,\theta - Z''_{\theta\rho} \cdot \frac{\text{ημ}\theta}{\rho} + Z_\theta \frac{\text{ημ}\theta}{\rho^2}\right) \text{συν}\theta +$$

$$+ \left(Z''_{\rho\theta} \,\text{συν}\,\theta - Z_\rho \,\text{ημ}\theta - Z''_{\theta^2} \cdot \frac{\text{ημ}\theta}{\rho} - Z_\theta \frac{\text{συν}\theta}{\rho}\right)\left(-\frac{\text{ημ}\theta}{\rho}\right)$$

Ἐκτελοῦντες τάς πράξεις εὑρίσκομεν:

$$Z_{x^2} = Z_{\rho^2} \,\text{συν}^2\theta + Z_{\theta^2} \frac{\text{ημ}^2\theta}{\rho^2} - 2 Z_{\rho\theta} \frac{\text{συν}\theta\text{ημ}\theta}{\rho} + Z_\rho \frac{\text{ημ}^2\theta}{\rho} + 2 Z_\theta \cdot \frac{\text{συν}\theta\text{ημ}\theta}{\rho^2} \quad (4)$$

Ὁμοίως: $Z_{xy} = Z_{\rho^2} \,\text{συν}\theta\text{ημ}\theta - Z_{\theta^2} \cdot \frac{\text{συν}\theta\text{ημ}\theta}{\rho^2} + Z_{\rho\theta} \cdot \frac{\text{συν}^2\theta - \text{ημ}^2\theta}{\rho} + Z_\theta \frac{\text{ημ}^2\theta - \text{συν}^2\theta}{\rho^2} - Z_\rho \frac{\text{ημ}\theta\text{συν}\theta}{\rho} \quad (5)$

Ὁμοίως: $Z_{y^2} = Z_{\rho^2} \,\text{ημ}^2\theta + Z_{\theta^2} \cdot \frac{\text{συν}^2\theta}{\rho^2} + 2 Z_{\rho\theta} \frac{\text{συν}\theta\text{ημ}\theta}{\rho} + Z_\rho \frac{\text{συν}^2\theta}{\rho} - 2 Z_\theta \frac{\text{συν}\theta\text{ημ}\theta}{\rho^2} \quad (6).$

Ἐκ τῶν (4) καί (5) ἔχομεν: $\Delta Z = Z''_{x^2} + Z''_{y^2} = Z''_{\rho^2} + Z''_{\theta^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} + Z'_\rho \cdot \frac{1}{\rho} \qquad (7)$

Ἡ συνάρτησις Z πού πληροῖ τήν διαφ. ἐξίσωσιν $Z_{x^2} + Z_{y^2} = 0$ (7) λέγεται ἁρμονική συνάρτησις. Συνήθως ἡ (7) γράφεται εἰς πολικάς συντεταγμένας ὑπό τήν κάτωθι εὔχρηστον μορφήν:

$$\Delta Z = Z_{x^2} + Z_{y^2} = Z_{\rho^2} + Z_{\theta^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} + Z_\rho \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\left\{\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial Z}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2}\right\} \qquad (8)$$

§9. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ TAYLOR ΔΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἔστω ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x,y)$ ὡρισμένη ἐπί μιᾶς κλειστῆς περιοχῆς U τοῦ $\mathbb{R}^2$ καί ἐπιδεχομένη μερικάς παραγώγους συνεχεῖς μέχρι τῆς τάξεως $p+1$.

Ἔστω ὅτι τό σημεῖον $(x_0, y_0) \in U$. Ἔστωσαν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί h, k τοιοῦτοι, ὥστε τό τμῆμα μέ ἄκρα τά σημεῖα (x_0,y_0) καί (x_0+h, y_0+k), δηλ. τό σύνολον τῶν σημείων $(x_0+t\cdot h,\ y_0+t\cdot k)$, ὅπου $0 \le t \le 1$, νά κεῖται ἐντός τοῦ U. Τότε θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = {} & f(x_0,y_0) + h \cdot f_x(x_0,y_0) + k \cdot f_y(x_0,y_0) \; + \\ & + \frac{h^2}{2!} f_{xx}(x_0,y_0) + \frac{h}{1!} \cdot \frac{k}{1!} f_{xy}(x_0,y_0) + \frac{k^2}{2!} f_{yy}(x_0,y_0) \\ & + \frac{h^3}{3!} f_{x^3}(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{k}{1!} f_{x^2y}(x_0,y_0) + \frac{h}{1!} \frac{k^2}{2!} f_{xy^2}(x_0,y_0) + \frac{k^3}{3!} f_{y^3}(x_0,y_0) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \sum_{m+n=p} \frac{h^m}{m!} \frac{k^n}{n!} f^{(p)}_{x^m y^n}(x_0,y_0) \\ & + \sum_{m+n=p+1} \frac{h^m}{m!} \frac{k^n}{n!} f^{(p+1)}_{x^m y^n}(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ὅπου $0 < \theta < 1$.

Ἀπόδειξις: θέτομεν $F(t)=f(x_0+th,\ y_0+tk)$, διά $0\leq t\leq 1$.

Συμφώνως πρός τόν τύπον τοῦ Taylor διά συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς ἔχομεν:

$$F(t)=F(0)+F'(0)\cdot t+\frac{F''(0)\cdot t^2}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)\cdot t^n}{n!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}\,t^{n+1},\quad 0<\theta<1$$ καί ἐάν $t=1$,

ἔχομεν:

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\quad 0<\theta<1.$$

Ἀλλά (βλ. ἀπόδειξιν προτάσεως III – Β-1):

$$F'(0)=h\cdot f_x(x_0,y_0)+k\cdot f_y(x_0,y_0)$$

καί $$F''(t)=\frac{d}{dt}F'(t)=\frac{d}{dt}\left(h\cdot f_x+k\cdot f_y\right)=h^2 f_{xx}+2hk\cdot f_{xy}+k^2\cdot f_{yy}$$

καί ἑπομένως, λόγω τῆς συνεχείας τῶν μερικῶν παραγώγων, ἔχομεν:

$$F''(0)=h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2h\cdot k\, f_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0).$$

Ἐργαζόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον ἐπαγωγικῶς εὑρίσκομεν ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος:

$$F^{(q)}(0)=\sum_{m+n=q} q!\,\frac{h^m}{m!}\cdot\frac{k^n}{n!}\cdot f^{(q)}_{x^m y^n}(x_0,y_0),$$ ὅπου $1\leq q\leq p$ καί

$$F^{(q+1)}(\theta)=\sum_{m+n=q+1}(q+1)!\,\frac{h^m}{m!}\cdot\frac{k^n}{n!}\,f^{(q+1)}_{x^m y^n}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),$$ ὅπου $0<\theta<1$.

- Ἐάν εἰς τόν ἀνωτέρω τύπον (1) θέσωμεν ἀντί x_0+h τό x καί ἀντί τοῦ y_0+k τό y, ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$\left.\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_0,y_0)+(x-x_0)\,f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)\,f_y(x_0,y_0)+\\&+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f_{x^2}(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}\cdot\frac{(y-y_0)}{1!}f_{xy}(x_0,y_0)+\frac{(y-y_0)^2}{2!}f_{y^2}(x_0,y_0)\\&+\cdots\cdots\\&+\sum_{m+n=p+1}\frac{(x-x_0)^m}{m!}\cdot\frac{(y-y_0)^n}{n!}f^{(p+1)}_{x^m y^n}\big(x_0+\theta(x-x_0),\ y_0+\theta(y-y_0)\big),\quad 0<\theta<1\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Κατά ἕνα ἀνάλογο τρόπο ἀποδεικνύομεν τόν τύπον τοῦ Taylor διά συναρτήσεις τριῶν, τεσσάρων κ.τ.λ. μεταβλητῶν.

- Ὁ τύπος (1) γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\left.\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=&f(x_0,y_0)+\left\{h\cdot f_x(x_0,y_0)+k\cdot f_y(x_0,y_0)\right\}+\\&+\frac{1}{2!}\left\{h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hk f_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0)\right\}+\\&+\cdots\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left\{h^n f_{x^n}(x_0,y_0)+\binom{n}{1}h^{n-1}k f_{x^{n-1}y}(x_0,y_0)+\cdots+k^n f_{y^n}(x_0,y_0)\right\}+R_n\end{aligned}\right\}\quad(1')$$

ὅπου R_n συμβολίζει τόν ὑπόλοιπο ὅρο:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left\{h\cdot f_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+k\cdot f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right\}^{(n+1)} \text{ μέ } 0<\theta<1.$$

Ἔχοντες τώρα ὑπ' ὄψιν τούς ὁρισμούς III-4-1, III-6-1 καί τούς συμβολισμούς τῆς §7 τοῦ παρόντος κεφαλαίου διαπιστοῦμεν ὅτι τά ὁμογενῆ πολυώνυμα μέ βαθμόν 1,2,3,…, n, n+1 ἀντιστοίχως, τό ὁποῖα περικλείονται μέ ἐνωτικάς γραμμάς (ἄγγιστρα) εἰς τό ἀνωτέρω ἀνάπτυγμα εἶναι ἀντιστοίχως τό πρῶτο, δεύτερο,… n-τάξεως διαφορικό:

$$\left.\begin{aligned} df&=h f_x+k\cdot f_y\\ d^2f&=(h f_x+k\cdot f_y)^{(2)}=h^2 f_{xx}+2hk f_{xy}+k^2 f_{yy}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ d^nf&=(h f_x+k\cdot f_y)^{(n)}=h^n f_{x^n}+\binom{n}{1}h^{n-1}\cdot k\cdot f_{x^{n-1}y}+\cdots+k^n f_{y^n}\end{aligned}\right\}\quad(2')$$

τῆς $f(x,y)$ εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) καί τό $(n+1)$-τάξεως διαφορικό $d^{n+1}f$ εἰς ἕνα ἐνδιάμεσον σημεῖον τῆς εὐθείας πού ἑνώνει τά σημεῖα (x_0,y_0) καί $(x_0+h,\ y_0+k)$.

Ὅθεν ὁ τύπος (1') τοῦ Taylor μπορεῖ νά γραφῆ πιό συνοπτικά ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+R_n}\quad(3)$$

ὅπου:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)\ \text{ μέ }\ 0<\theta<1$$

<u>Παρατήρησις</u>: Ἀπό τόν τύπο (1') διά $n=1$ λαμβάνομεν τό θεώρημα III-8-1 Μέσης τιμῆς διά συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν.

<u>§10. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΝ</u>.

Ἐάν ἡ $f(x,t)$ εἶναι συνεχής συνάρτησις τῶν x καί t εἰς τό ὀρθογώνιον χωρίον $a\le x\le \beta$, $\gamma\le t\le\delta$, δυνάμεθα κατ' ἀρχάς, νά λάβωμεν τήν μεταβλητήν x ὡς σταθεράν καί νά ὁλοκληρώσωμεν τήν συνάρτησιν $f(x,t)$ μέ μεταβλητήν τήν t καί οὕτω καταλήγομεν εἰς τήν ἔκφρασιν: $F(x)=\int_\gamma^\delta f(x,t)dt$ (1)

<u>Θεώρημα III-10-1</u>. <u>Ἐάν ἡ $f(x,t)$ εἶναι συνεχής εἰς τό χωρίον</u> $a\le x\le\beta,\ \gamma\le t\le\delta$ <u>τό ὁλοκλήρωμα</u> (1) <u>δηλ. ἡ $F(x)$ εἶναι συνεχής συνάρτησις τῆς παραμέτρου</u> x.

Ἀπόδ: Εἶναι: $|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_\gamma^\delta (f(x+h,t)-f(x,t))dt\right|\le\int_\gamma^\delta|f(x+h,t)-f(x,t)|dt\to 0$ τοῦ $h\to 0$.

<u>Θεώρημα III-10-2</u>. <u>Μέ τάς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος καί ἐάν ἐπί πλέον ἡ $f(x,t)$ ἔχει συνεχεῖς μερικάς παραγώγους ὡς πρός</u> x <u>καί</u> t <u>τότε θά ἰσχύη</u>:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int_\gamma^\delta f(x,t)dt\right)=\int_\gamma^\delta f_x'(x,t)\,dt$$

<u>Ἀπόδ:</u> Ἔχομεν $F(x+h)-F(x)=\int_\gamma^\delta \{f(x+h,t)-f(x,t)\}\,dt$ (1)

Ἐπειδὴ ἡ $f(x,t)$ ὑπετέθη διαφορίσιμος ἐντὸς τοῦ ἀνωτέρω ὀρθογωνίου κατὰ τὸ Θεώρημα τῆς Μέσης τιμῆς θὰ ἔχωμεν: $f(x+h,t)-f(x,t)=h\cdot f_x(x+\theta h,t)$, (2) διὰ $0<\theta<1$.

Ὁ (1) λόγῳ τῆς (2) γράφεται·

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\int_\gamma^\delta f_x(x+\theta h,t)dt \quad (3).$$

Ἐπειδὴ ἡ f_x ὑπετέθη συνεχὴς εἰς τὸ κλειστὸν χωρίον ἕπεται διὰ κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ τοιοῦτον, ὥστε $|f_x(x+\theta h,t)-f_x(x,t)|<\varepsilon$ (4) διὰ $|h|<\delta(\varepsilon)$.

Ὅθεν, $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_\gamma^\delta f_x(x,t)dt\right|\leq\int_\gamma^\delta |f_x(x+\theta h,t)-f_x(x,t)|dt<\int_\gamma^\delta \varepsilon\cdot dt=\varepsilon(\delta-\gamma)$, διὰ $|h|<\delta(\varepsilon)$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁρίου ἔχομεν:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\equiv F'(x)=\int_\gamma^\delta f_x(x,t)\,dt.$$

§ 11. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Πρότασις III-11-1. <u>Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $f(x_1,\dots,x_p)$, ὡρισμένης ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^p$, εἶναι ἴσον πρὸς μηδὲν εἶναι ἡ $f(x_1,\dots,x_p)$ νὰ εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ U.</u>

Ἀπόδειξις: Ἔστω ἡ $f(x_1,\dots,x_p)=c$ διὰ κάθε $(x_1,\dots,x_p)\in U\subset\mathbb{R}^p$.

Ἐπειδὴ $\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$ διὰ $i=1,\dots,p$ θὰ εἶναι καὶ $df\equiv 0$ διὰ κάθε $(x_1,\dots,x_p)\in U$.

Ἀντιστρόφως: Ἔστω $df\equiv 0$ διὰ κάθε $(x_1,\dots,x_p)\in U$ ἢ $\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_p}dx_p\equiv 0$ διὰ κάθε $(x_1,\dots,x_p)\in U$.

Ὑποθέτοντες τὰ $x_2,\dots,x_p$ σταθερὰ καὶ τὸ x_1 μεταβλητόν, ἤτοι $dx_2=\dots=dx_p=0$ καὶ $dx_1\neq 0$ ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως λαμβάνομεν:

$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1=0$ ἢ $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$, ἤτοι ἡ συνάρτησις f εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς x_1, δηλ. δὲν περιέχει τὴν μεταβλητὴν x_1. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις δὲν περιέχει τὰς μεταβλητὰς $x_1,\dots,x_p$. Ὅθεν ἡ f εἶναι σταθερὰ συνάρτησις ἐπὶ τοῦ U.

Πρότασις III-11-2. <u>Ἔστω ἡ διαφορικὴ ἔκφρασις</u> $\varphi_1dx_1+\dots+\varphi_pdx_p$, <u>ὅπου αἱ συναρτήσεις</u> $\varphi_i(x_1,\dots,x_p)$ $i=1,\dots,p$ <u>εἶναι συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ</u> $U\subset\mathbb{R}^p$, εἶναι τὸ <u>διαφορικὸν μιᾶς συναρ-</u>

τήσεως $f(x_1,\dots,x_p)$ διά πάν $(x_1,\dots,x_p)\in U\subset\mathbb{R}^p$. Τότε διά πάν $(x_1,\dots,x_p)\in U$ ἰσχύει: $\varphi_i(x_1,\dots,x_p)=\frac{\partial f(x_1,\dots,x_p)}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,p$.

Ἀπόδειξις: Διά $(x_1,\dots,x_p)\in U$ ἔχομεν:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_p}dx_p \qquad (1)$$

$$\text{καί}\quad df=\varphi_1 dx_1+\dots+\varphi_p dx_p. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-\varphi_1\right)dx_1+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_p}-\varphi_p\right)dx_p=0 \qquad (3)$$

διά πάν $(x_1,\dots,x_p)\in U$.

Θέτοντες $dx_2=\dots=dx_p=0$ καί $dx_1\neq 0$, ἤτοι $x_2,\dots,x_p$ σταθερά καί x_1 μεταβλητόν ἡ (3) δίδει:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-\varphi_1\right)dx_1=0 \Longrightarrow \varphi_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν: $\varphi_2=\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\varphi_p=\frac{\partial f}{\partial x_p}$.

Ὁρισμός III-11-1. *Πληρουμένων τῶν ὑποθέσεων τῆς ἀνωτέρω προτάσεως διά τάς συναρτήσεις φ_i, $i=1,\dots,p$, ἡ ἔκφρασις $\varphi_1 dx_1+\dots+\varphi_p dx_p$ θά καλῆται τέλειον διαφορικόν.*

Ἤδη θά ἐξετάσωμεν τό θέμα τοῦ τελείου διαφορικοῦ εἰδικῶς διά συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν.

Πρότασις III-11-3. Ἐάν ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial P}{\partial y}$ καί $\frac{\partial Q}{\partial x}$, εἶναι συνεχεῖς καί ἡ διαφορική ἔκφρασις $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ εἶναι τέλειον διαφορικόν διά $(x,y)\in U\subset\mathbb{R}^2$, τότε θά ἰσχύῃ: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ δοθεῖσα διαφορική ἔκφρασις εἶναι τέλειον διαφορικόν, ὑπάρχει συνάρτησις $f(x,y)$, $(x,y)\in U\subset\mathbb{R}^2$ τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\quad\text{καί}\quad Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y},\ (x,y)\in U$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων λαμβάνομεν: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ καί $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Λόγῳ ὅμως τῆς συνεχείας τῶν παραγώγων $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων λαμβάνομεν: $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, $(x,y)\in U$

Πρότασις III-11-4. (Ἀντίστροφος) Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y εἶναι συνεχεῖς διά κάθε $(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ καί ἐπί πλέον πληροῦν τήν σχέσιν $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Τότε ὑπάρχουν συναρτήσεις $F(x,y)$ ἔχουσαι ὡς διαφορικόν διά κάθε $(x,y) \in U$ τήν ἔκφρασιν $Pdx+Qdy$ (τέλειον διαφορικόν), δηλ. ὑπάρχουν συναρτήσεις $F(x,y)$ πληροῦσαι τάς δύο συνθήκας $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.

Ἀπόδειξις: Διά y σταθερόν προσδιορίζομεν μίαν συνάρτησιν $F(x,y)$ διδομένην ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος:

$$\xrightarrow{*} F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + f(y) \xleftarrow{*} \qquad (1),$$

ὅπου $f(y)$ εἶναι μία πραγματική συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς y.

Ἔστω
$$A = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt\right). \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt\right)$$
$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Ἤτοι ἡ συνάρτησις A εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς x.

Ἤδη προσδιορίζομεν τήν συνάρτησιν $f(y)$ εἰς τρόπον ὥστε:

$$f'(y) = A = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt\right) \quad (3) \quad \text{ἤ} \quad Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt\right) + f'(y) \quad (3')$$

Λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \qquad (4)$$

Καί λόγῳ τῆς (3') ἔχομεν:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt\right) + f'(y) = Q(x,y).$$

Ὅθεν, $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = dF(x,y)$.

Ἤτοι ἡ διαφορική ἔκφρασις $P\,dx + Q\,dy$ εἶναι τέλειον διαφορικόν.

Ἀπομένει εἰς τόν τύπον (1) τόν διδόντα τήν $F(x,y)$ νά προσδιορίσωμεν τήν συνάρτησιν $f(y)$. Ὁ προσδιορισμός αὐτῆς γίνεται δι' ὁλοκληρώσεως τῆς σχέσεως (3), ἤτοι:

$$\xrightarrow{*} f(y) = \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt\right)\right] dy \xleftarrow{*} (6)$$

Ἐφαρμογή: Δείξατε ὅτι ἡ παράστασις

$$(e^x συνy - e^y ημx)\,dx + (e^y συνx - e^x ημy)\,dy$$

εἶναι τέλειον διαφορικόν καί νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις $F(x,y)$ τῆς ὁποίας εἶναι διαφορικόν.

Λύσις: Θέτομεν $P = e^x συνy - e^y ημx$, $Q = e^y συνx - e^x ημy$, ὅτε ἔχομεν: $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x ημy - e^y ημx = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω διαφορική ἔκφρασις εἶναι τέλειον διαφορικόν. Ἔστω $F(x,y)$ ἡ συνάρτησις τῆς ὁποίας εἶναι τό διαφορικόν. Θά ἔχωμεν λοιπόν: $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ ἤ $\frac{\partial F}{\partial x} = e^x συνy - e^y ημx$ (1). Ὁλοκληροῦντες τήν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς πρός x λαμβάνομεν:

$$F(x,y) = e^x συνy + e^y συνx + C(y) \quad (2).$$

Διαφορίζοντες τήν (2) ὡς πρός y, εὑρίσκομεν:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^x ημy + e^y συνx + C'(y) = Q = e^y συνx - e^x ημy \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $C'(y) = 0$ ἤτοι $C(y) = C$ δηλ. σταθερά. Ὅθεν, ἡ ζητουμένη συνάρτησις εἶναι $F(x,y) = e^x συνy + e^y συνx + C$.

Συμπληρώματα καί Ἀσκήσεις.

I. Μερικαί παράγωγοι πρώτης τάξεως.

1. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις μέ τύπον

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ἄν} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{»} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Εἶναι παντοῦ συνεχής καί ὅτι $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Ἐξετάσατε τήν συνέχεια τῆς $f_x(0,y)$ είς τό $y=0$ καί τῆς $f_y(x,0)$ εἰς τό $x=0$.

2. Ἔστω $f(x,y) = \begin{cases} xy/x^2+y^2, & \text{ἐάν} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ἐάν τό } (x,y) \text{ δέν πληροῖ τήν ἀνωτέρω σχέσιν.} \end{cases}$

Δείξατε ὅτι α) $f_x(0,0)$ καί $f_y(0,0)$ ἀμφότεραι ὑπάρχουν. β) Ἡ $f(x,y)$ εἶναι ἀσυνεχής εἰς τό σημεῖον (0,0).

Λύσις: τῆς β). Ἔστω $x \to 0$ καί $y \to 0$ ἀκολουθοῦντα τήν γραμμήν $y = \lambda x$ τοῦ ἐπιπέδου xoy. Τότε θά ἔχωμεν: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, τό ὅριον τῆς $f(x,y)$ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ συντελεστοῦ κλίσεως τῆς ἑκλεγείσης εὐθείας $y = \lambda \cdot x$ κατά μῆκος τῆς ὁποίας κινοῦνται τά x, y. Ἄρα ἡ $f(x,y)$ δέν εἶναι συνεχής εἰς τό (0,0).

3. Νά εὑρεθοῦν αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

α) $f(x,y)=x^2 \eta\mu y$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ β) $f(x,y,z)=x^2+y^2+\lambda x z^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

γ) $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ κ.τ.λ. δ) $f(x,y,z)=\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

ε) $f(x,y,z)=\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ στ) $f(x,y)=x^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

3α. Νά ἐξετασθῆ ἐάν ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial f(0,1)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,1)}{\partial y}$ τῆς συναρτήσεως:

$$f(x,y)=\begin{cases} y\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

II. Μερικαί παράγωγοι δευτέρας καί ἀνωτέρας τάξεως:

4. Ἔστω $f(x,y)=x^3y+e^{xy^2}$. Νά εὑρεθοῦν α) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, β) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, γ) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}$, δ) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

5. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $U(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν:

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$. (Διαφορική ἐξίσωσις τοῦ Laplace)

6. Ἔστω $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

7. Δείξατε ὅτι: ἐάν $z=\varphi(y+ax)+f(y-ax)$, τότε $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, ὅπου αἱ φ, f συναρτήσεις παραγωγίσιμοι μέχρι δευτέρας τάξεως.

8. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι n-τάξεως τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

α) $f(x,y)=\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 y$, β) $f(x,y,z)=\eta\mu x\cdot\eta\mu y\cdot\eta\mu z$.

9. Ὑπολογίσατε τάς $f''_{xy}(0,0)$ καί $f''_{yx}(0,0)$ διά τήν συνάρτησιν $f(x,y)$ ὁριζομένη ὡς ἀκολούθως:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\eta\mu\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x-y}{x+y}, & \text{ἐάν } x+y\neq 0 \\ 0, & \text{ἐάν } x+y=0. \end{cases}$$

III. Ὁλικά διαφορικά.

10. Νά ὑπολογισθοῦν τά ὁλικά διαφορικά α΄ς καί β΄ς τάξεως τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

α) $f(x,y)=x^2+xy^2+\eta\mu y$, β) $f(x,y)=\log(x\cdot y)$, γ) $f(x,y,z)=\varepsilon\varphi(3x-y)+6^{y+z}$,

δ) Νά ὑπολογισθῆ τό $df(x,y)$ διά $x=1, y=0, dx=\frac{1}{2}, dy=\frac{1}{4}$, ἐάν $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

11. α) Ἔστω $U(x,y) = x^2 \cdot e^{y/x}$. Νά εὑρεθῇ τό dU.

β) Δείξατε ὅτι τό $(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy$ δύναται νά γραφῇ ὡς ἕν τέλειον διαφορικόν μιᾶς συναρτήσεως $f(x,y)$ καί νά εὑρεθῇ αὐτή ἡ συνάρτησις.

IV. Μερικαί παράγωγοι καί διαφορικά συνθέτων συναρτήσεων.

12. Ἐάν $z = e^{xy^2}$ καί $x = t\,\sigma\upsilon\nu t$, $y = t\,\eta\mu t$, νά ὑπολογισθῇ τό $\frac{dz}{dt}$ διά $t = \frac{\pi}{2}$.

13. Ἐάν $z = 4x^2 - 9y^2$, ὅπου $x = \frac{t}{s}$ καί $y = s^2 + t^2$ νά εὑρεθοῦν $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$.

14. Ἐάν $z = \log\sqrt{x^2+y^2}$, ὅπου $x = s\cdot e^t$ καί $y = s\cdot e^{-t}$ νά εὑρεθοῦν $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$

15. Ἐάν $u = z\,\eta\mu\frac{y}{x}$, ὅπου $x = 3\tau^2 + 2s$, $y = 4\tau - 2s^3$, $z = 2\tau^2 - 3s^2$. Νά εὑρεθοῦν:

α) $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, β) $\frac{\partial u}{\partial s}$, γ) du

16. Ἐάν $z = e^x \eta\mu y$, ὅπου $x = t^2$, $y = 3t$. Νά ὑπολογισθῇ $\frac{d^2z}{dt^2}$

17. Ἐάν $z = f(x,y)$ καί $x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \rho\,\eta\mu\theta$ δείξατε ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\eta\mu\theta}{\rho} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\eta\mu\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho} \end{aligned}\right\}$$

18. Ἐάν $x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\phi$, $y = \rho\,\eta\mu\phi$, τότε δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $V(x,y)$ πληροῖ τήν σχέσιν:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^2$$

<u>Ὑπόδ.</u> Εἶναι $V_\rho = V_x \cdot x_\rho + V_y \cdot y_\rho = V_x \cdot \sigma\upsilon\nu\phi + V_y \cdot \eta\mu\phi$

$V_\phi = V_x \cdot x_\phi + V_y \cdot y_\phi = V_x(-\rho\,\eta\mu\phi) + V_y(\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\phi)$ καί ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίσατε τό $V_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}V_\phi^2$.

19. Δείξατε ὅτι ἡ $z = f(x^2y)$, ὅπου ἡ f εἶναι παραγωγίσιμος, ἱκανοποιεῖ τήν σχέσιν:

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

20. Ἐάν διά κάθε πραγματικήν τιμήν τῆς παραμέτρου λ καί διά κάποιαν σταθεράν p ἰσχύῃ: $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p \cdot F(x,y)$, ὅπου ἡ F ὑπετέθη παραγωγίσιμος, τότε δείξατε ὅτι:

$$x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = p\cdot F$$

21. Έστω $F = F(xy, yz)$. Δείξατε ότι: $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = z\frac{\partial F}{\partial z}$.

22. Δείξατε ότι ή άντικατάστασις: $x = e^s$, $y = e^t$ μετασχηματίζει τήν έξίσωσιν:

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$ είς τήν έξίσωσιν: $$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

23. Δείξατε ότι ή άντικατάστασις $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ μετασχηματίζει τήν έξίσωσιν:

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ είς τήν: $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

24. Εάν $x = 2r - s$ καί $y = r + 2s$ καί ή συνάρτησις $U(x, y)$ έχει μερικάς παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως συνεχείς, τότε δείξατε ότι:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{1}{25}\left(2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial s} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right).$$

25. Δείξατε ότι διά οίασδήποτε συναρτήσεις f, g μιᾶς μεταβλητῆς ή συνάρτησις:

$$z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + y\, g\left(\frac{y}{x}\right)$$

έπαληθεύει τήν κάτωθι, μέ μερικάς παραγώγους, έξίσωσιν:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

26. Εάν ή συνάρτησις $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι συνεχής καί έχη μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχείς, δείξατε ότι:

i) $\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x_1} F(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = \dots = \frac{1}{a_n}\frac{\partial}{\partial x_n} F(a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$

ii) $x_1\frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1 \cdots x_n) = \dots = x_n\frac{\partial}{\partial x_n} F(x_1 \cdots x_n)$

iii) $\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \dots = \frac{1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n} F(x_1^2 + \dots + x_n^2)$.

26α Άν $z = f(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ δείξατε ότι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{df}{dr}$$

27. Δείξατε ότι διά τήν συνάρτησιν $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = F\left(\dfrac{\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4}}{\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}}\right)$

ίσχύουν:

i) $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = 0$, ii) $x_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \dots + x_4\frac{\partial \phi}{\partial x_4} = 0$, iii) $x_1^2\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \dots + x_4^2\frac{\partial \phi}{\partial x_4} = 0$.

27α Έστω $z = xy\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$, όπου f διαφορίσιμος.

Νά δειχθῆ ότι: $x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = (x-y)z$

(28) Δείξατε ὅτι διά τήν συνάρτησιν $\Phi(x,y,z)$, ἥτις ταυτίζεται μέ μίαν τῶν:

i) $F\left(\frac{1}{\beta y}-\frac{1}{\alpha x}, \frac{1}{\gamma z}-\frac{1}{\beta y}\right)$

ii) $F(x^2+y^2+z^2,\ xy+yz+zx)$

iii) $F(\alpha x^m+\beta y^m+\gamma z^m,\ xyz)$

ἰσχύει ἡ ἀντίστοιχος σχέσις:

i) $\alpha x^2\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta y^2\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\gamma z^2\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$

ii) $(y-z)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(x-y)\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$

iii) $x(\beta x^m-\gamma z^m)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+y(\gamma z^m-\alpha x^m)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+z(\alpha x^m-\beta y^m)\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0.$

V. Ἐπί τοῦ τύπου τοῦ Taylor:

29. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (2) τοῦ Taylor ἡ παράστασις $f(x,y)=x^2y+3y-2$ νά γραφῆ ὡς ἄθροισμα δυνάμεων τῶν $x-1$ καί $y+2$.

Ὑπόδ. Διά $x_0=1$ καί $y_0=-2$ ὁ τύπος (5) γράφεται:

$$f(x,y)=f(1,-2)+(x-1)\cdot f_x(1,-2)+(y+2)F_y(1,-2)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left\{(x-1)^2 f_{x^2}(1,-2)+2\cdot(x-1)(y+2)f_{xy}(1,-2)+(y+2)^2 f_{y^2}(1,-2)\right\}$$
$$+\frac{1}{3!}\left\{(x-1)^3 f_{x^3}(1,-2)+3(x-1)^2(y+2)\cdot f_{x^2y}(1,-2)+3(x-1)(y+2)f_{xy^2}(1,-2)+(y+2)^3 f_{y^3}(1,-2)\right\}+R_3.$$

ὅπου τό $R_3=0$, καθότι πᾶσαι αἱ παράγωγοι τάξεως ἀνωτέρας τῆς 3ης τῆς $f(x,y)$ εἶναι μηδέν κ.τ.λ.

30. Νά ἀναπτυχθῆ κατά Taylor ἡ συνάρτησις $f(x,y)=e^{\eta\mu x+\eta\mu y}$ εἰς τό σημεῖον (0,0) περιοριζόμενοι εἰς τόν ἀριθμόν τῶν ὅρων μέχρι $n=3$.

31. Ὁμοίως ἡ συνάρτησις $f(x,y)=\eta\mu xy$ εἰς δυνάμεις τοῦ $x-1$ καί $y-\frac{\pi}{2}$.

VI. Ἐπί τῶν τελείων διαφορικῶν:

32. Δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν κάτωθι διαφορικῶν ἐκφράσεων εἶναι τέλειον διαφορικόν καί ἀκολούθως ὑπολογίσατε τήν συνάρτησιν $F(x,y)$ τῆς ὁποίας εἶναι διαφορικόν.

i) $(y+\frac{1}{x})dx+xdy$ ii) $(1-\frac{y}{x^2}+\log x)dx+\frac{1}{x}dy$, iii) $\sigma\upsilon\nu y\,dx+(2y-x\eta\mu y)dy$ iv) $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, $x>0$

v) $(2y-\frac{1}{x})dx+(2x+\frac{1}{y})dy$ vi) $(1+e^{x/y})dx+e^{x/y}(1-\frac{x}{y})dy$

vii) $(e^x\eta\mu y\,\sigma\upsilon\nu z)dx+(e^x\sigma\upsilon\nu y\,\sigma\upsilon\nu z)dy-(e^x\eta\mu y\,\eta\mu z)dz$

33. Δείξατε ὅτι ἡ διαφορική ἔκφρασις: $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$, ἢ συντόμως $Pdx+Qdy+Rdz$ εἶναι τέλειον διαφορικόν μιᾶς συναρτήσεως $F(x,y,z)$ ἐάν, καί μόνον ἐάν, πληροῦνται αἱ συνθῆκαι:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

VII. Ἐπί τῶν αὐξήσεων καί διαφορικῶν συναρτήσεως (Συμπλήρωμα)

34. Δίδεται ἡ συνάρτησις $f(x,y)=x^2y-3y$.

Εὕρατε: α) Τήν διαφοράν $\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$. β) Τό διαφορικόν df γ) Προσδιορίσατε τό Δf καί df ἐάν $x=4$, $y=3$ καί $\Delta x=-0{,}01$ καί $\Delta y=0{,}02$.

Λύσις: α) Εἶναι $\Delta f=(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)-3\cdot(y+\Delta y)-(x^2y-3y)=\underbrace{2xy\cdot\Delta x+(x^2-3)\Delta y}_{A}+$
$+\underbrace{(\Delta x)^2y+2x\Delta x\cdot\Delta y+(\Delta x)^2\Delta y}_{B}$

Τό ἄθροισμα A καλεῖται ***κύριον μέρος*** τῆς διαφορᾶς Δf.

β). Τό $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=2xydx+(x^2-3)dy$.

γ). Διά $x=4$, $y=3$ καί $\Delta x=-0{,}01$ καί $\Delta y=0{,}02$ ἔχομεν:

$\Delta f=f(4-0{,}01,\ 3+0{,}02)-f(4,3)=\left\{(3{,}99)^2\cdot(3{,}02)-3\cdot(3{,}02)\right\}-\left\{4^2\cdot3-3\cdot3\right\}=0{,}018702$.

καί $df=2xydx+(x^2-3)dy=2\cdot4\cdot3(-0{,}01)+(4^2-3)\cdot0{,}02=0{,}02$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, $df-\Delta f=0{,}001298$, ἤτοι τά df καί Δf εἶναι προσεγγιστικῶς ἴσα. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τό γεγονός ὅτι αἱ αὐξήσεις $\Delta x=dx$ καί $\Delta y=dy$ εἶναι πολύ μικραί.

35. Τό αὐτό ὡς εἰς τήν ἀνωτέρω ἄσκησιν διά τήν συνάρτησιν $f(x,y)=e^{2y}$ τοξ.ημx διά $x=0$, $y=1$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$.

VIII. Ἐπί τοῦ θεωρήματος τῆς Μέσης τιμῆς ἢ τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων.

36. Δείξατε ὅτι:

$$\log\frac{x+y}{2}=\frac{x+y-2}{x+y-\theta(x+y-2)},\ 0<\theta<1 \text{ διά } x>0,\ y>0.$$

37. Ἀποδείξατε τό θεώρημα μέσης τιμῆς (βλ. πρότασιν III-8-1) διά συναρτήσεις τριῶν μεταβλητῶν.

IX. Συμπληρωματικαί ἀσκήσεις τοῦ Κεφαλαίου.

38. Νά εὑρεθοῦν αἱ k-τάξεως ὁμογενεῖς διαφορίσιμοι συναρτήσεις $f(x,y)$ αἱ ὁποῖαι πληροῦν τήν σχέσιν $y\cdot f_x = x\cdot f_y$ (1).

<u>*Λύσις*</u>: Αἱ $f(x,y)$ θά πληροῦν καί τήν σχέσιν τοῦ Euler ἤτοι: $x\cdot f_x + y\cdot f_y = k\cdot f$ (2).

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν: $\frac{f_x}{x}=\frac{f_y}{y}=\frac{x\cdot f_x+y\cdot f_y}{x^2+y^2}=\frac{k\cdot f(x,y)}{x^2+y^2} \Longrightarrow \frac{f_x}{f}=\frac{k\cdot x}{x^2+y^2}$ (3)

Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς (3) λαμβάνομεν: $f(x,y)=c(y)\cdot(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}$ (4)

λόγω τῆς (4) ἡ $\frac{f_y}{y}=\frac{k\cdot f(x,y)}{x^2+y^2}$ γίνεται:

$$\frac{c'(y)\cdot(x^2+y^2)^{k/2}+\frac{k}{2}c(y)\cdot(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}-1}2y}{y}=\frac{k\cdot c(y)\cdot(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}{x^2+y^2}$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν: $c'(y)=0 \Longrightarrow c(y)=$ σταθερά

Ὅθεν,
$$f(x,y)=c\cdot(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}$$

39. Νά εὑρεθοῦν αἱ διαφορίσιμοι συναρτήσεις $f(x,y)$ πού πληροῦν τάς συνθήκας:

$$f(x,y)=\varphi(x)+\sigma(y) \text{ καί } y\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=xy(x^2-y^2).$$

<u>*Λύσις*</u>: Ἡ δευτέρα τῶν σχέσεων γίνεται λόγω τῆς πρώτης $y(\varphi'(x)-x^3)=x(\sigma'(y)-y^3)$. Διά $x\cdot y\neq 0$ $\frac{\varphi'(x)-x^3}{x}=\frac{\sigma'(y)-y^3}{y}=c$. Ἐπειδή τά x,y εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί οἱ ἀνωτέρω ἴσοι λόγοι θά πρέπει προφανῶς νά ἔχουν κοινήν τιμήν ἔστω c ἀνεξάρτητον τῶν x καί y. Ἐπομένως θά ἔχωμεν:

$\varphi'(x)=x^3+cx \Longrightarrow \varphi=\frac{x^4}{4}+\frac{cx^2}{2}+c_1$ καί $\sigma'(y)=y^3+cy \Rightarrow \sigma(y)=\frac{y^4}{4}+\frac{cy^2}{2}+c_2$.

40. Δίδεται ἡ συνάρτησις $z=f(x,y)$. Ἐκτελοῦμεν τήν ἀντικατάστασιν $x=\rho\,\text{συν}\theta$, $y=\rho\,\text{ημ}\theta$, $\rho>0$ $0\leq\theta<2\pi$ (πολικαί συντεταγμέναι), ὅτε αὕτη γίνεται:

$z=f(\rho\,\text{συν}\theta, \rho\,\text{ημ}\theta)=F(\rho,\theta)$. Ὑπολογίσατε τάς μερικάς παραγώγους

$$\frac{\partial z}{\partial\rho},\ \frac{\partial z}{\partial\theta},\ \frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}$$

(41.) Ἔστω ἡ $f(x,y)$ εἶναι δίς κατά συνέχειαν διαφορίσιμος καί ἔστω ἡ $u(x,y,z)$ ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως:

$$u(x,y,z)=\int_0^{2\pi} f(x+z\,\text{συν}\varphi,\ y+z\,\text{ημ}\varphi)\,d\varphi$$

Δείξατε ὅτι: $z(u_{x^2}+u_{y^2}-u_{z^2})-u_z=0$. (βλ. § 10).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§1. ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΗ ΥΠΟ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ : $f(x,y)=\gamma$

Ἔστω ἡ ἀντιστοιχία $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καί ἕνα σημεῖον $y_0 \in \mathbb{R}$. Ἀναζητοῦμεν τό σύνολον τῶν σημείων $x \in \mathbb{R}$ τοιούτων, ὥστε $f(x)=y_0$, δηλ. τό ἐν λόγῳ σύνολον εἶναι ἡ ἀντίστροφος εἰκών $f^{-1}(\{y_0\})$. Αὐτό τό σύνολον καλεῖται *λύσις τῆς ἐξισώσεως* $f(x)=y_0$.

Ἔστω ἤδη ἡ ἀντιστοιχία $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καί τό σημεῖον $\gamma \in \mathbb{R}$, θεωροῦμεν τήν ἐξίσωσιν: $f(x,y)=\gamma$ · εἶναι δυνατόν (οὐχί πάντοτε) νά συμβῆ, ὅταν τό x εἶναι δοθέν, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ὡς πρός y νά ἐπιδέχεται μίαν μοναδικήν λύσιν διά κάθε x (δοθέν) $\in \mathbb{R}$. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις ὁρίζει τό y ὡς μίαν συνάρτησιν $\varphi(x)$, ἤτοι: $y=\varphi(x)$ (ἐπιλύουσα συνάρτησις). Ἡ συνάρτησις αὐτη καλεῖται ***πεπλεγμένη συνάρτησις*** ὁριζομένη ὑπό τῆς ἐξισώσεως $f(x,y)=\gamma$.

Αὕτη δέ χαρακτηρίζεται ὑπό τῆς ἰδιότητος: $f(x,\varphi(x)) \equiv \gamma$ διά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δυνάμεθα προσέτι νά εἴπωμεν εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ὅτι, διά $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ἡ σχέσις $f(x,y)=\gamma$ εἶναι ταυτόσημος μέ τήν $y=\varphi(x)$.

Ἄς δώσωμεν ἤδη τά ἀκόλουθα ἁπλᾶ παραδείγματα πεπλεγμένων συναρτήσεων:

Παράδειγμα 1ον/ Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $x^2+3xy-2x+5y=7$.

Αὕτη λύεται μονοσημάντως ὡς πρός y διά κάθε $x \in \mathbb{R}-\{-\frac{5}{3}\}$ καί δίδει:

$$y=\frac{-x^2+2x+7}{3x+5}=\varphi(x).$$

2ον/ Ἡ ἐξίσωσις: $y^5-4y^4+4xy^2-x^2=0$, ὁρίζει μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν $y=\varphi(x)$. Πράγματι διά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ἔχομεν μίαν ἐξίσωσιν περιττοῦ βαθμοῦ ὡς πρός y, ἥτις ἐπιδέχεται τουλάχιστον μίαν πραγματικήν ρίζαν. Εἰς τήν περίπτωσιν πλειόνων ριζῶν λαμβάνομεν τήν ρίζαν τῆς μεγίστης τετμημένης καί οὕτω ἔχομεν διά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ἕν μόνον $y \in \mathbb{R}$. Δέν δυνάμεθα ὅμως νά ἐκφράσωμεν αὐτήν τήν συνάρτησιν ὡς μίαν ρητήν συνάρτησιν τοῦ x μέ τήν βοήθειαν στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Ἐδῶ ἁπλῶς γνωρίζομεν θεωρητικῶς τήν ὕπαρξιν τῆς $y=\varphi(x)$.

Εἶναι ἐξ ἄλλου φυσικόν, νά μήν συμβαίνουν αἱ προαναφερθεῖσαι περιπτώσεις καί οὕτω ἡ ἐξίσωσις $f(x,y)=\gamma$ νά μήν ὁρίζῃ μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν $y=\varphi(x)$. Οὕτω δι' ὡρισμένας ἤ καί δι' ὅλας τάς τιμάς τοῦ x εἶναι δυνατόν νά μήν ὑπάρχῃ λύσις, ὡς πρός y, τῆς $f(x,y)=\gamma$. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2+y^2=1$ διά $|x|>1$ δέν ἔχει λύσιν ὡς πρός y. Ἐνῶ ἡ $x^2+2y^2=-9$ δέν ἐπιδέχεται λύσιν ὡς πρός y δι' οὐδεμίαν τιμήν τοῦ x.

Ὁμοίως εἶναι δυνατόν ἡ $f(x,y)=\gamma$ νά ἐπιδέχεται πλείονας τῆς μιᾶς ἤ καί ἀπείρους λύσεις ὡς πρός y διά δεδομένον x. π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ λυομένη ὡς πρός y δίδει: $y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$, $|x|\leq 2$, ἤτοι ἔχομεν διά κάθε $|x|\leq 2$ δύο ἐπιλυούσας συναρτήσεις τας:

$$y=+\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\ ,\ y=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\ .$$

Ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y=0$ δίδει διά κάθε $x\in\mathbb{R}$ τάς λύσεις $y=x+k\cdot\pi$, $k=0,\pm1\pm2,\ldots$

Ὁμοίως εἶναι δυνατόν ἡ $f(x,y)=\gamma$ νά ἐπαληθεύεται ὑπό ἑνός μόνον σημείου· π.χ. ἡ ἐξίσωσις $(x+1)^2+(y-2)^2=0$ ἐπαληθεύεται μόνον ἀπό τό σημεῖον $(x=-1,\ y=2)$.

Ἤδη ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν μίαν εἰδικήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $f(x,y)=\gamma$, τήν $x=x_0$, $y=y_0$. Προτιθέμεθα νά γνωρίσωμεν ἐάν διά τά x τά εὑρισκόμενα ἀρκούντως πλησίον τοῦ x_0 ἡ ἐξίσωσις θά εἶχεν μίαν <u>μοναδικήν λύσιν</u> ὡς πρός y. Πρός τούτοις ἀρκεῖ νά περιορίσωμεν – ὅπως θά ἴδωμεν καί ἀπό σχετικόν θεώρημα κατωτέρω – αὐτήν τήν λύσιν y εἰς μίαν κατάλληλον περιοχήν τοῦ y_0. Ὅταν συμβαίνῃ αὐτό θά ἔχωμεν οὕτως ὁρίσει μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν $y=\varphi(x)$ ἐκ τῆς $f(x,y)=\gamma$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0).

Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ ἀνωτέρω εἶναι ἁπλῆ:

Ἡ ἐξίσωσις $f(x,y)=\gamma$ ὁρίζει εἰς τό ἐπίπεδον oxy μίαν καμπύλην καί προτιθέμεθα νά ἐκφράσωμεν τήν ἐξίσωσιν αὐτῆς τῆς καμπύλης ὑπό τήν λελυμένην συνήθη μορφήν, ὑπολογίζοντες τό y συναρτήσει τοῦ x εἰς μίαν περιοχήν τοῦ (x_0,y_0). Ἐνίοτε μία καμπύλη, ἐξισώσεως $f(x,y)=\gamma$, δέν δύναται γενικῶς νά ἐκφρασθῇ ὑπό τήν προηγουμένην μορφήν $y=\varphi(x)$. (βλ. Παράδ. 2ον).

Κατωτέρω παραθέτομεν ἕνα βασικόν θεώρημα τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων.

Χάριν ἁπλοποιήσεως καί χωρίς βλάβην τῆς γενικότητος εἰς τό ἑξῆς θά θεωροῦμεν τήν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $f(x,y)=0$.

Προτάσσομεν τοῦ θεωρήματος τήν κάτωθι βοηθητικήν πρότασιν:

<u>Πρότασις IV-1-1</u>. <u>Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις</u> $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ <u>εἶναι</u> <u>συνεχής εἰς τό</u>

σημεῖον $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ καί ἐπί πλέον $f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)>0$. Τότε ὑπάρχει θετικός ἀριθμός h τοιοῦτος, ὥστε ἡ $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ νά εἶναι θετική δι' ὅλα τά $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ τά εὑρισκόμενα ἐντός τῆς περιοχῆς:

$$|x_1-\xi_1|<h,\ |x_2-\xi_2|<h,\dots,|x_n-\xi_n|<h.$$

Ἀπόδειξις: Πρός τοῦτο θά ἐφαρμόσωμεν τόν ὁρισμόν τῆς συνεχείας διά τήν $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ εἰς τό σημεῖον $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$. Διά κάθε $\varepsilon>0$, ἑπομένως καί διά $\varepsilon=f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ ὑπάρχει ἕν $\delta=h>0$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$|f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)|<\varepsilon \qquad (1)$$

δι' ὅλα τά $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ τά πληροῦντα τάς σχέσεις:

$$|x_1-\xi_1|<h,\ |x_2-\xi_2|<h,\dots,|x_n-\xi_n|<h.$$

Ἡ σχέσις (1) γράφεται καί οὕτω:

$$0=f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)-\varepsilon<f(x_1,x_2,\dots,x_n)<f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)+\varepsilon$$

ἤτοι: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)>0$, δι' ὅλα τά $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ τά πληροῦντα τάς σχέσεις:

$$|x_1-\xi_1|<h,\ |x_2-\xi_2|<h,\dots,|x_n-\xi_n|<h.$$

Θεώρημα IV-1-1. Θεωροῦμεν μίαν πραγματικήν συνάρτησιν $f(x,y)$ καί τήν ἐξίσωσιν $f(x,y)=0$ τήν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς αὐτήν. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ καί αἱ μερικαί παράγωγοι f_x, f_y αὐτῆς εἶναι συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0) καί ὅτι:

$$f(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)\neq 0.$$

Τότε:

α) Ὑπάρχουν δύο θετικοί ἀριθμοί h καί k, οἵτινες ὁρίζουν ἕνα ὀρθογώνιον T πέριξ τοῦ σημείου (x_0,y_0), ἤτοι: $T=\{(x,y):|x-x_0|<h$ καί $|y-y_0|<k\}$, τοιοῦτον, ὥστε διά κάθε x μέ $|x-x_0|<h$ ὑπάρχει εἷς καί μόνον εἷς ἀριθμός y μέ $|y-y_0|<k$, ὅστις πληροῖ τήν ἐξίσωσιν $f(x,y)=0$. Διά τῆς τοιαύτης μονοσημάντου ἀντιστοιχίας ὁρίζεται ἀκριβῶς μία συνάρτησις $y=\varphi(x)$.

Τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς φ περιέχει τό $[x_0-h,\ x_0+h]$ καί τό πεδίον τιμῶν εὑρίσκεται ἐντός τοῦ $[y_0-k,\ y_0+k]$.

β) Ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$, προσδιοριζομένη ὡς ἀνωτέρω, εἶναι συνεχής καί ἔχει παράγωγον

$\varphi'(x)$ συνεχὴ διὰ $|x-x_0|<h$.

Ἐπὶ πλέον δὲ ἰσχύει:

$$f_y'(x,\varphi(x))\neq 0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi'(x)=-\frac{f_x'(x,\varphi(x))}{f_y'(x,\varphi(x))} \quad \text{διὰ } |x-x_0|<h.$$

Ἀπόδειξις: Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $f_y'(x_0,y_0)>0$. Διὰ τὴν περίπτωσιν $f_y'(x_0,y_0)<0$ ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν f ὑπὸ τῆς $-f$ καὶ οὕτω ἀναγόμεθα εἰς τὴν ὑπὸ ἐξέτασιν πρώτην περίπτωσιν.

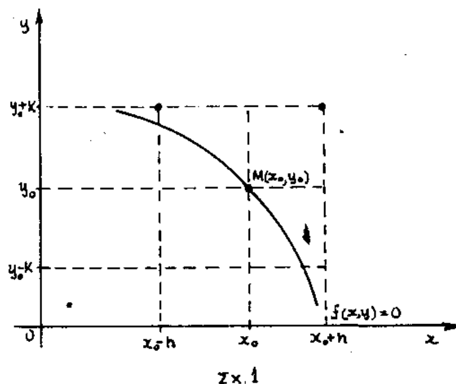
Ἐπειδὴ ἡ f_y' εἶναι συνεχὴς ὑπάρχει ἀριθμὸς $k>0$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ $f_y'(x,y)>0$ διὰ πάντα τὰ (x,y) τοῦ χωρίου $S=\{(x,y): |x-x_0|\leq k, |y-y_0|\leq k\}$ (βλ. πρότ. 1-1).

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν μίαν σταθερὰν τιμὴν τοῦ x ἐντὸς τοῦ $|x-x_0|<k$, τότε ἡ $f(x,y)$ θεωρουμένη ὡς συνάρτησις τοῦ y καὶ ἔχουσα θετικὴν παράγωγον θὰ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις (τοῦ y) ἐντὸς τοῦ χωρίου S. Εἰδικῶς ἡ $f(x_0,y)$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ y. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $f(x_0,y_0)=0$, ἕπεται ὅτι: $f(x_0,y_0+k)>0$ καὶ $f(x_0,y_0-k)<0$.

Ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην Πρότασιν IV-1-1 εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω συνεχῶν συναρτήσεων συμπεραίνομεν εὐκόλως, ὅτι ὑπάρχει ἓν ἀνοικτὸν διάστημα (x_0-h, x_0+h) (τὸ h ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ k) ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ ἔχωμεν συγχρόνως:

$$f(x,y_0+k)>0 \quad \text{καὶ} \quad f(x,y_0-k)<0.$$

Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ x εἶναι σταθερὸν ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος (x_0-h,x_0+h). Ἐπειδὴ ἡ $f(x,y)$, θεωρουμένη ὡς συνεχὴς συνάρτησις τοῦ y, εἶναι ἀρνητικὴ διὰ $y=y_0-k$ καὶ θετικὴ διὰ $y=y_0+k$, δηλ. εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $[y_0-k, y_0+k]$ λαμβάνει τιμὰς ἑτεροσήμους, ἕπεται, συμφώνως πρὸς τὴν Πρότασιν IX-5-1, Τόμος Πρῶτος σελ. 327, ὅτι ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ y ἐντὸς τοῦ $[y_0-k, y_0+k]$ τοιαύτη, ὥστε $f(x,y)=0$, (βλ. Σχ. 1). Ἐπὶ πλέον ἐπειδὴ $f_y(x,y)>0$ ἕπεται, ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις λαμβάνει τὴν τιμὴν μηδὲν μίαν μόνον φοράν. Ἤτοι διὰ κάθε $x\in(x_0-h, x_0+h)$ ὑπάρχει ἓν μόνον y ἐντὸς τοῦ $[y_0-k, y_0+k]$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $f(x,y)=0$. Τοιουτοτρόπως



Σχ. 1

δημιουργεῖται ὑπ' αὐτῆς τῆς ἀντιστοιχίας μία συνάρτησις, ἔστω ἡ $y=\varphi(x)$, ὡρισμένη ἐπὶ

τοῦ $|x-x_0|<h$ καί μέ τιμάς ἐντός τοῦ $[y_0-k,\ y_0+k]$. Θά ἔχωμεν προφανῶς δι' αὐτήν $f(x,\varphi(x))=0$, διά κάθε $|x-x_0|<h$. Ἡ $y=\varphi(x)$ εἶναι ἡ <u>μοναδική</u> λύσις (ἐπιλύουσα συνάρτησις) τῆς $f(x,y)=0$ διά τά $|x-x_0|<h$.

Ἐπί πλέον δέ ἔχομεν $y_0=\varphi(x_0)$, καθόσον ὑπετέθη $f(x_0,y_0)=0$.

Διά νά ἀποδείξωμεν τήν συνέχειαν τῆς $y=\varphi(x)$ ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω λεχθέντα διά κάθε $k>0$ ὑπάρχει ἕν $h>0$ τοιοῦτον, ὥστε διά $|x-x_0|<h \Longrightarrow y_0-k<\varphi(x)<y_0+k$ ἤ $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<k$.

Ἀντικαθιστῶντες τώρα ἀντί τοῦ k ἕν $0<\varepsilon<k$ καί ἀντί τοῦ h τό $\delta(\varepsilon)$ ἡ ἀνωτέρω συνεπαγωγή γράφεται:

$$|x-x_0|<\delta(\varepsilon) \Longrightarrow |\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$

Τό τελευταῖον συμπέρασμα ἀποδεικνύει τήν συνέχειαν τῆς $y=\varphi(x)$ εἰς τήν θέσιν $x=x_0$.

Ἔστω ἤδη ἕν σημεῖον $x_1\in\{|x-x_0|<h\}$ καί ἔστω $y_1=\varphi(x_1)$. Θεωροῦμεν τήν τετραγωνικήν περιοχήν:

$$S'=\{(x,y): |x-x_1|\le k',\ |y-y_1|\le k'\},$$

κέντρου (x_1,y_1), ἐκλέγοντες καταλλήλως τό k' ὥστε νά ἔχωμεν: $S'\subseteq S$. Ἀκολουθοῦντες τήν αὐτήν, ὡς ἀνωτέρω, διαδικασίαν ἀποδεικνύομεν τήν συνέχειαν τῆς $y=\varphi(x)$ εἰς τό τυχόν σημεῖον τοῦ $(x_0-h,\ x_0+h)$.

Τέλος θά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ $y=\varphi(x)$ εἶναι παραγωγίσιμος διά κάθε $x\in(x_0-h,\ x_0+h)$.

Θέτομεν $\Delta\varphi=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$. Ἐπειδή $f(x,\varphi(x))=0$ διά κάθε $x\in(x_0-h,x_0+h)$ θά ἔχωμεν καί:

$$f(x+\Delta x,\varphi(x+\Delta x))-f(x,\varphi(x))=0 \qquad (1)$$

Ἡ $f(x,y)$ ἔχει ἐξ ὑποθέσεως μερικάς παραγώγους συνεχεῖς είς τήν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0), συνεπῶς θά εἶναι καί διαφορίσιμος εἰς αὐτήν τήν περιοχήν. Συμφώνως πρός τήν Πρότασιν III-3-2 (βλ. καί ἀπόδειξιν αὐτῆς) ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$0=f'_x[x,\varphi(x)]\cdot\Delta x+f'_y[x,\varphi(x)]\cdot\Delta\varphi+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta\varphi)\cdot\Delta x+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta\varphi)\cdot\Delta\varphi \qquad (2)$$

ὅπου τά $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \longrightarrow 0$ τοῦ $\Delta x\longrightarrow 0$.

Ἡ (2) γράφεται καί οὕτω:

$$f'_x\cdot\Delta x+f'_y\cdot\Delta\varphi=-\varepsilon_1\cdot\Delta x-\varepsilon_2\cdot\Delta\varphi \quad \text{ἤ καί} \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=-\frac{f'_x+\varepsilon_1}{f'_y+\varepsilon_2} \qquad (3)$$

Ἐπειδή ἡ φ εἶναι συνεχής, τό $\Delta\varphi\longrightarrow 0$ ὅταν $\Delta x\longrightarrow 0$.

Λαμβάνοντες τά ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (3) διά $\Delta x\longrightarrow 0$ καί ἐπειδή $f'_y\neq 0$

και $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \longrightarrow 0$, θά ἔχωμεν:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = -\frac{f'_x}{f'_y} \qquad (4)$$

Ἤτοι ὑπάρχει τό $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ καί τό ὁποῖον εἶναι, συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τῆς παραγώγου, ἡ $\varphi'(x)$.

Ἄρα ἡ $\varphi(x)$ εἶναι παραγωγίσιμος διά κάθε $x \in (x_0-h, x_0+h)$ καί ἐπί πλέον ἰσχύει:

$$\varphi'(x) = \frac{-f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))} \text{ διά } x \in (x_0-h, x_0+h).$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως συνάγεται ἀμέσως ἡ συνέχεια τῆς $\varphi'(x)$.

Παράδειγμα 1ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $f(x,y) \equiv x^2 + 3xy^2 + y^3 - 1 = 0$.

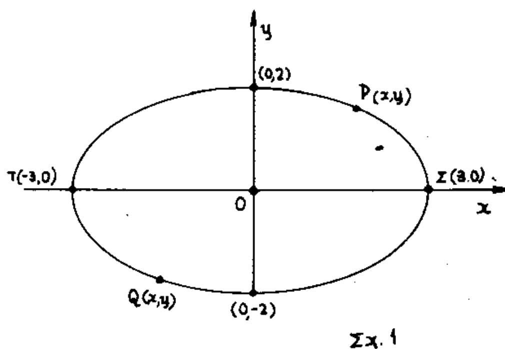
Νά εὑρεθῆ ἐάν αὕτη ὁρίζη μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν $y = \varphi(x)$ καί ἐν συνεχείᾳ νά εὑρεθῆ ἡ $\frac{dy}{dx}$.

Λύσις: Ἔχομεν $f'_y = 6xy + 3y^2$. Εἶναι δέ $f(0,+1) = 0$ καί $f'_y(0,+1) = 3 \neq 0$. Ὅθεν εἰς μίαν κατάλληλον περιοχήν τοῦ σημείου $(0,+1)$ ὁρίζεται μονοσημάντως ἡ συνάρτησις $y = \varphi(x)$ τοιαύτη, ὥστε: $x^2 + 3x\cdot\varphi^2(x) + \varphi^3(x) - 1 = 0$ διά κάθε x τοιοῦτον, ὥστε $|x| < h$, ἔνθα h κατάλληλος θετικός ἀριθμός.

$$\text{Εἶναι δέ, } \varphi'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x + 3y^2}{6xy + 3y^2} \text{ διά κάθε } |x| < h.$$

2ον) Ἐφαρμόσατε τό ἀνωτέρω θεώρημα εἰς τήν ἐξίσωσιν $f(x,y) \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ καί εὕρατε τήν συνάρτησιν $y = \varphi(x)$ τοῦ θεωρήματος, εἰς ἅς περιπτώσεις εἶναι δυνατόν.

Λύσις: Ὡς γνωστόν ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις παριστᾶ ἔλλειψιν (βλ. Σχ. 1). Ἐάν P εἶναι ἕνα σημεῖον ἄνωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x, τότε $f'_y = \frac{1}{2} y > 0$. Τό ἀνωτέρω θεώρημα ὅθεν ἐφαρμόζεται καί δίδει τό y ὡς μίαν συνάρτησιν τοῦ x, ἤτοι $y = +\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Ἐάν τό Q εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x, τότε $f'_y = \frac{1}{2} y < 0$. Τό ἀνωτέρω θεώρημα πάλιν ἐφαρμόζεται καί δίδει: $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Τέλος ἄς ἐξετάσωμεν τί συμβαίνει διά τά σημεῖα Σ (3,0) καί Τ (−3,0) τοῦ ἄξονος τῶν x. Παρατηροῦμεν ὅτι δι' αὐτά τά σημεῖα, π.χ. διά τό (3,0) εἶναι $f'_y(3,0) = 0$ καί τό θεώρημα δέν ἐφαρμόζεται.



Σχ. 1

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι: $f'_x = \frac{2}{9}x > 0$ εἰς τό $\Sigma(3,0)$ καί ἐπομένως δυνάμεθα νά γράψωμεν $x=\sigma(y)$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ Σ. (βλ. κατωτέρω παρατήρησιν 1η).

Εἶναι δέ $x=\sigma(y)=\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ Σ. Ἀναλόγως $x=-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ $T(-3,0)$.

3ον/ Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις: $f(x,y)\equiv y^3+3x^2y-x^3+2x+3y=0$

ὁρίζει μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν $y=\varphi(x)$ διά κάθε πραγματικήν τιμήν τοῦ x. Εὕρατε τήν $\varphi'(x)$.

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν $f'_y=3y^2+3x^2+3>0$ διά κάθε (x,y). Ὅθεν διά κάθε x_0 ἡ $f(x_0,y)$ εἶναι μία αὔξουσα συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς y.

Ἐπί πλέον $f(x_0,y)\longrightarrow-\infty$ τοῦ $y\longrightarrow-\infty$ καί $f(x_0,y)\longrightarrow+\infty$ τοῦ $y\longrightarrow+\infty$ διά κάθε σταθερόν x_0. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ὑπάρχει <u>μία μόνον</u> τιμή τοῦ y, ἔστω ἡ y_0 τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν: $f(x_0,y_0)=0$. Πληρουμένων λοιπόν τῶν ὑποθέσεων τοῦ Θεωρήματος ὑπάρχει μία μόνον συνάρτησις $y=\varphi(x)$ ὁριζομένη ὑπό τῆς $f(x,y)=0$, συνεχής καί παραγωγίσιμος διά κάθε x.

Εἶναι δέ $\varphi'(x)=-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{6xy-3x^2+2}{3y^2+3x^2+3}$ διά κάθε πραγματικήν τιμήν τοῦ x.

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1η/ Ἡ ἐξίσωσις $f(x,y)=0$ εἶναι δυνατόν νά ὁρίζῃ τό x ὡς πεπλεγμένην συνάρτησιν τοῦ y, ἤτοι $x=\sigma(y)$. Ἐάν διά τό σημεῖον (x_0,y_0) ἔχωμεν $f(x_0,y_0)=0$ καί ἐπί πλέον $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, τότε θά ἔχωμεν κατ' ἀναλογίαν:

$$\sigma'(y)=\frac{dx}{dy}=-\frac{f'_y}{f'_x}$$

2α/. Διά τήν εὕρεσιν τῆς ἐπιλυούσης συχνά δέν ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις αὐτῆς, ἀλλά ἡ θεωρητική ὕπαρξίς της, ὁπότε, συμφώνως πρός τόν γνωστόν τύπον, εὑρίσκομεν τήν παράγωγον ταύτης.

3α/. Ἡ ἐκ τοῦ θεωρήματος προκύπτουσα σχέσις $y'=\varphi'(x)=-\frac{f'_x}{f'_y}$ μέ $f'_y\neq 0$ γράφεται καί οὕτω:

$$f'_x+y'\cdot f'_y=0 \qquad (1)$$

Ὑποθέτοντες ὅτι, ἡ $f(x,y)$ ἔχει μερικάς παραγώγους δευτέρας τάξεως συνεχεῖς

καί παραγωγίζοντες τήν (1) ὡς πρός x λαμβάνομεν:

$$f''_{x^2} + y' f''_{xy} + y'' f'_y + y' \left(f''_{yx} + y' f''_{y^2} \right) = 0 \qquad (2)$$

θέτοντες δέ, $y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$ εἰς τήν (2) καί ἐπιλύοντες ὡς πρός y'' λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\boxed{y'' = -\frac{f'^2_y \cdot f''_{x^2} - 2 f'_x \cdot f'_y \cdot f''_{xy} + f'^2_x \cdot f''_{y^2}}{f'^3_y}} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) προκύπτει καί ἡ συνέχεια τῆς y''.

4ῃ/. Ἐάν $f'_y(x_0, y_0) = 0$, τότε ἐξετάζομεν, ὅπως ἐλέχθη καί εἰς τήν πρώτην παρατήρησιν, τήν $f'_x(x_0, y_0)$ καί ἐάν εἶναι αὐτη $\neq 0$, τότε ὁρίζεται ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις $x = \sigma(y)$. Τό ἐρώτημα εἶναι ἤδη τί συμβαίνει ἐάν $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν πιθανόν νά μήν ὑπάρχῃ μονοσήμαντος ἐπίλυσις τῆς $f(x,y) = 0$ ὡς πρός y ἤ ὡς πρός x ἤ πιθανόν νά ὑπάρχουν πλείονες τῆς μιᾶς ἐπιλύσεις ὡς πρός y ἤ x.

<u>Παράδειγμα</u> 4ον/. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $f(x,y) \equiv y^2 - x^2 = 0$. Ζητεῖται νά προσδιορισθῇ, ἐάν ὑπάρχῃ, ἡ ὑπ' αὐτῆς ὁριζομένη πεπλεγμένη συνάρτησις.

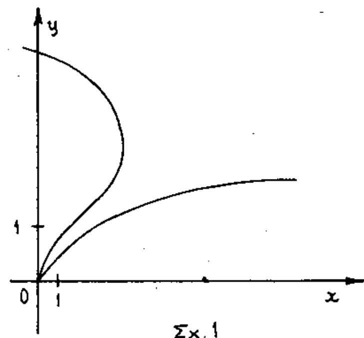
<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν $f'_x = -2x$, $f'_y = 2y$ καί $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Ὅθεν, τό ἀνωτέρω θεώρημα δέν ἐφαρμόζεται εἰς τό σημεῖον (0,0). Ἐν τούτοις ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λυομένη ὡς πρός y δίδει τάς λύσεις $y = \pm x$ (εὐθεῖαι κάθετοι διερχόμενα διά τῆς ἀρχῆς).

5ον/. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $f(x,y) \equiv y^5 - 4y^4 + 4xy^2 - x^2 = 0$.

Ζητεῖται νά προσδιορισθῇ ἡ ὑπ' αὐτῆς ὁριζομένη πεπλεγμένη συνάρτησις.

<u>Λύσις</u>: Παρατηροῦμεν ὅτι $f(0,0) = 0$ καί $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Ἑπομένως εἰς τήν περιοχήν τοῦ σημείου (0,0) δέν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό ἀνωτέρω θεώρημα. Ἐν τούτοις δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τό x συναρτήσει τοῦ y, ἤτοι:

$x = 2y^2 \pm \sqrt{4y^4 + y^5 - 4y^4} = 2y^2 \pm y^{5/2}$. Εὐκόλως δυνάμεθα νά σχεδιάσωμεν τήν καμπύλην τήν παριστωμένην ὑπό τῆς ἐν λόγω ἐξισώσεως (βλ. Σχ.1), ὅπου ἐλήφθησαν διαφορετικαί μονάδες ἐπί τῶν ἀξόνων Ox, Oy.

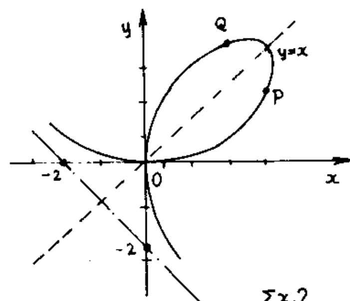


Σχ. 1

6ον. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις : $f(x,y) \equiv x^3+y^3-6xy=0$ (φύλλον τοῦ Descartes).

Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα διά τά ὁποῖα τό ἀνωτέρω θεώρημα δέν ἐφαρμόζεται.

Λύσις: Ἔχωμεν $f'_x=3x^2-6y$, $f'_y=3y^2-6x$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τό σημεῖον $(0,0)$ ἔχομεν $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. Ἐπομένως δέν δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τό y ὡς συνάρτησιν τοῦ x. Ἐπίσης δέν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό ἀνωτέρω θεώρημα διά τά σημεῖα ὅπου $3y^2-6x=0$, δηλ. διά τά σημεῖα μέ τετμημένην $x=\frac{1}{2}y^2$. Ἀντικαθιστῶντες $x=\frac{1}{2}y^2$ εἰς τήν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης εὑρίσκομεν $x=2\sqrt[3]{4}$, $y=2\sqrt[3]{2}$ · ἔστω δέ $P(2\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2})$ αὐτό τό σημεῖον. Ἀναλόγως θέτοντες $f'_x=0$ καί λύοντες τό σύστημα $f=0$, $f'_x=0$ εὑρίσκομεν τό σημεῖον $Q(2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$, ὅπου δέν δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τό x ὡς συνάρτησιν τοῦ y εἰς μίαν περιοχήν αὐτοῦ. Τό θεώρημα ἐφαρμόζεται εἰς ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης.



Γεωμετρικαί ἐφαρμογαί.

I. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $f(x,y)=0$, ἥτις πληροῖ τάς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0) αὐτῆς. Αὐτη ὁρίζει μίαν καμπύλην (γ) ἔχουσα εἰς κάθε σημεῖον αὐτῆς μίαν ἐφαπτομένην. Ἔστω (x,y) ἕν τυχόν σημεῖον ἑνός τόξου τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0). Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης, ὡς γνωστόν, εἶναι:

$$Y-y=y'\cdot(X-x) \qquad (1)$$

Εἶναι δέ, συμφώνως πρός τό προηγούμενον θεώρημα:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} \qquad (2)$$

Ὅθεν ἡ (1), λόγῳ τῆς (2), γράφεται: $Y-y=-\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}\cdot(X-x)$ ἤ

$$\boxed{(X-x)\cdot f'_x(x,y)+(Y-y)\cdot f'_y(x,y)=0} \qquad (3)$$

Ἡ (3) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης εἰς τό σημεῖον (x,y).

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἰς τό σημεῖον (x,y) τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης θά εἶναι:

$$Y-y=\frac{f'_y(x,y)}{f'_x(x,y)}\cdot(X-x) \quad \text{ἤ} \quad (X-x)\,f'_y-(Y-y)\cdot f'_x=0.$$

Ἐφαρμογή: Ἔστω ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν $f(x,y)=0$. Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν καμπυλότητα αὐτῆς, ὑποθέτοντες διὰ τὴν $f(x,y)$ ὅτι πληροῦνται πᾶσαι αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων.

Λύσις: Ὡς γνωστὸν ἡ καμπυλότης παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$k=\frac{|y''|}{\sqrt{1+y'^2}} \quad (1)$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς y'' ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (3) τῆς σελ. 82 ὅτε ὁ (1) θὰ γίνῃ:

$$k=\frac{|f''_{x^2}\cdot f'^2_y-2\cdot f''_{xy}\cdot f'_x\cdot f'_y+f''_{y^2}\cdot f'^2_x|}{(f'^2_x+f'^2_y)^{3/2}} \quad (2)$$

§2. ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΗ ΥΠΟ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $f(x_1,x_2,\dots,x_q,y)=0$

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $f(x_1,x_2,\dots,x_q,y)=0$. Ἐὰν διὰ κάθε σημεῖον $(x_1,x_2,\dots,x_q)\in I^q\subseteq\mathbb{R}^q$ ἡ ἐξίσωσις, ὡς πρὸς y, $f(x_1,x_2,\dots,x_q,y)=0$ ἐπιδέχεται μίαν καὶ μόνον μίαν λύσιν, τότε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁρίζεται τὸ y ὡς συνάρτησις τῶν $(x_1,x_2,\dots,x_q)$, ἤτοι: $y=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_q)$ (ἐπιλύουσα συνάρτησις), ἥτις καλεῖται *πεπλεγμένη συνάρτησις* ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $f(x_1,x_2,\dots,x_q,y)=0$. Προφανῶς διὰ κάθε $(x_1,x_2,\dots,x_q)\in I^q\subseteq\mathbb{R}^q$ ἔχομεν: $f(x_1,x_2,\dots,x_q,\varphi(x_1,x_2,\dots,x_q))=0$.

Ἐὰν λοιπὸν συμβαίνουν τ' ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $f(x_1,x_2,\dots x_q,y)=0$ εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὴν $y=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_q)$.

Τὸ θεώρημα IV-1-1 ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρω ὁρισθείσας πεπλεγμένας συναρτήσεις. Παραθέτομεν τοῦτο ἄνευ ἀποδείξεως.

Θεώρημα IV-2-1α. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $f(x_1,x_2,\dots,x_q,y)$ καὶ $f'_y(x_1,x_2,\dots,x_q,y)$ εἶναι συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q,y_0)$. Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι διὰ κάθε $i=1,2,\dots,q$ ἑκάστη τῶν f'_{x_i} εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q,y_0)$. Ἔστω δέ, $f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q,y_0)=0$ καὶ $f'_y(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q,y_0)\neq 0$. Τότε ὑπάρχουν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ h καὶ k (τὸ h ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ k). Τοιοῦτοι, ὥστε:

α) Διὰ κάθε $(x_1,x_2,\dots,x_q)$ μὲ $|x_i-\xi_i|<h$, $i=1,2,\dots,q$ ὑπάρχει εἷς μόνον ἀριθμὸς y μὲ $|y-y_0|<k$ ἱκανοποιῶν τὴν ἐξίσωσιν $f(x_1,x_2,\dots,x_q,y)=0$.

β) Ἐὰν $y=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_q)$ εἶναι ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $f(x_1,x_2,\dots,x_q,y)=0$ ὁριζομένη πεπλεγ-

μένη συνάρτησις, τότε ἡ φ καί πᾶσαι αἱ πρῶται παράγωγοι φ'_{x_i}, $i=1,2,\ldots,q$ εἶναι συνεχεῖς διά κάθε $|x_i-\xi_i|<h$ καί ἐπί πλέον ἔχομεν:

$$f'_y\left[x_1,x_2,\ldots,x_q,\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_q)\right]\neq 0 \quad \text{καί}$$

$$\varphi'_{x_i}=-\frac{f'_{x_i}\left[x_1,x_2,\ldots,x_q,\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_q)\right]}{f'_y\left[x_1,x_2,\ldots,x_q,\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_q)\right]}\ ,\ i=1,2,\ldots,q$$

ἐάν $|x-x_i|<h$, $i=1,2,\ldots,q$.

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει, καί κυρίως εἰς τήν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν, ἡ περίπτωσις τῆς ἐξισώσεως $f(x,y,z)=0$.

Κρίνομεν σκόπιμον νά ἐπαναλάβωμεν τήν διατύπωσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἰς τήν εἰδικήν ταύτην περίπτωσιν:

Θεώρημα IV-2-1β. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)$ καθώς καί αἱ πρῶται παράγωγοι αὐτῆς f'_x, f'_y, f'_z εἶναι συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0,z_0). Ἔστω δέ ἐπί πλέον $f(x_0,y_0,z_0)=0$ καί $f'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Τότε ὑπάρχουν δύο θετικοί ἀριθμοί h καί k τοιοῦτοι, ὥστε:

α) Διά κάθε (x,y) μέ $|x-x_0|<h$, $|y-y_0|<h$ ὑπάρχει εἷς καί μόνον εἷς ἀριθμός z μέ $|z-z_0|<k$ ἱκανοποιῶν τήν ἐξίσωσιν: $f(x,y,z)=0$.

β) Ἔστω $z=\varphi(x,y)$ ἡ ὑπό τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ὁριζομένη πεπλεγμένη συνάρτησις, τότε ἡ φ καθώς καί αἱ πρῶται παράγωγοι φ'_x, φ'_y αὐτῆς εἶναι συνεχεῖς διά κάθε $|x-x_0|<h$, $|y-y_0|<h$ καί ἐπί πλέον ἰσχύει:

$$f'_z\left[x,y,\varphi(x,y)\right]\neq 0 \quad \text{καί} \quad z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z},\ z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}$$

διά κάθε $|x-x_0|<h$, $|y-y_0|<h$.

Παρατήρησις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος IV-2-1β, τότε ἔχομεν:

$$f'_x+f'_z\cdot z'_x=0 \quad \text{καί} \quad f'_y+f'_z\cdot z'_y=0$$

Ἄν τώρα ὑποτεθῇ ὅτι ὑπάρχουν καί ὅλαι αἱ μερικαί παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῆς $f(x,y,z)$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0,z_0) καί εἶναι συνεχεῖς, τότε παραγωγίζοντες τήν πρώτην μέν ὡς πρός x, y καί τήν δευτέραν ὡς πρός y, συμφώ-

νως πρός τόν κανόνα παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως, λαμβάνομεν τάς σχέσεις:

$$f''_{xx} + 2 f''_{xz} \cdot z'_x + f''_{zz} \cdot z'^2_x + f'_z \cdot z''_{xx} = 0$$

$$f''_{xy} + f''_{xz} \cdot z'_y + f''_{yz} \cdot z'_x + f''_{zz} \cdot z'_x z'_y + f'_z \cdot z''_{xy} = 0$$

$$f''_{yy} + 2 f''_{yz} \cdot z'_y + f''_{zz} \cdot z'^2_y + f'_z \cdot z''_{yy} = 0.$$

Ἐξ αὐτῶν προσδιορίζομεν τάς: $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$

Ἀναλόγως ὑπολογίζομεν, μέ τήν ὑπόθεσιν ὅτι ὑπάρχουν ὅλαι αἱ μερικαί παράγωγοι τρίτης τάξεως τῆς $f(x,y,z)$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0) καί εἶναι συνεχεῖς, τάς παραγώγους τρίτης τάξεως τῆς $z=\varphi(x,y)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $f(x,y,z) \equiv 4x^5 + 3y^3z^2 + yz^4 - z^5 = 0$.

Ζητεῖται νά προσδιορισθῆ, ἐάν ὑπάρχη, ἡ ὑπ' αὐτῆς πεπλεγμένη συνάρτησις: $z=\varphi(x,y)$ καί νά εὑρεθοῦν αἱ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

<u>Λύσις</u>: Ἐάν θέσωμεν $y=z=1$ εὑρίσκομεν $x=-\sqrt[5]{3/4}$. Ὅθεν: $f(-\sqrt[5]{3/4},1,1)=0$. Ἐπί πλέον

$$f'_z = 6y^3z + 4yz^3 - 5z^4 \text{ καί } f'_z(-\sqrt[5]{3/4},1,1) \neq 0.$$

Ἑπομένως ἐφαρμόζεται τό προηγούμενον θεώρημα, ἤτοι: Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ὁρίζει μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν, τήν $z=\varphi(x,y)$, ὡρισμένην εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου $(-\sqrt[5]{3/4},1)$, δηλ. ὑπάρχουν δύο θετικοί ἀριθμοί h καί k τοιοῦτοι, ὥστε διά κάθε

$$|x-(-\sqrt[5]{3/4})| = |x+\sqrt[5]{3/4}| < h \text{ καί } |y-1| < h \text{ νά ἔχωμεν: } |\varphi(x,y)-1| < k.$$

Γενικώτερον: ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ὁρίζει μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν καί διά κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Πράγματι: ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις $f(x,y,z)=0$, θεωρουμένη ὡς πρός z, εἶναι μία ἐξίσωσις περιττοῦ βαθμοῦ, συνεπῶς αὐτη ἐπιδέχεται μίαν τουλάχιστον πραγματικήν ρίζαν καί εἰς τήν περίπτωσιν πλειόνων τῆς μιᾶς πραγματικῶν ριζῶν λαμβάνομεν τήν ρίζαν τῆς μεγίστης τεταγμένης. Οὕτω διά κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ἔχομεν ἕν μόνον $z\in\mathbb{R}$, ἤτοι ἡ ἐν λόγω ἀντιστοιχία δημιουργεῖ τήν συνάρτησιν $z=\varphi(x,y)$ διά κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Δέν δυνάμεθα ὅμως, ὅπως εἴδομεν καί εἰς προγενέστερον παράδειγμα νά ἐκφράσωμεν αὐτήν τήν συνάρτησιν μέ τήν βοήθειαν στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Ἐδῶ ἁπλῶς γνωρίζομεν τήν ὕπαρξίν της. Ἐπί πλέον δέ δυνάμεθα νά εὕρωμεν τάς $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Εἶναι δέ αὗται:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{20x^4}{6y^3z+4yz^3-5z^4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z} = -\frac{9y^2z+z^3}{6y^3+4yz^2-5z^3}.$$

Γεωμετρικαί ἐφαρμογαί:

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $f(x,y,z)=0$. Πληρουμένων τῶν ὑποθέσεων τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος αὕτη ἐπιλύεται μονοσημάντως ὡς πρός z, ἤτοι: $z=\varphi(x,y)$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0,z_0), ὅπου $f(x_0,y_0,z_0)=0$.

Ἡ ἐξίσωσις $z=\varphi(x,y)$ εἰς τό σύστημα τῶν ἀξόνων $oxyz$ παριστᾶ μίαν ἐπιφάνειαν (Σ), ἥτις εἰς τό σημεῖον $(x_0,y_0,z_0=\varphi(x_0,y_0))$ αὐτῆς ἔχει ἕν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις εἶναι:

$$Z-z_0=-\frac{f'_x(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}\cdot(X-x_0)-\frac{f'_y(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}(Y-y_0)$$

ἤ

$$\boxed{(X-x_0)\cdot f'_x(x_0,y_0,z_0)+(Y-y_0)f'_y(x_0,y_0,z_0)+(Z-z_0)f'_z(x_0,y_0,z_0)=0}$$

Ἐφαρμογή: Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad \text{(Μονόχωνον ὑπερβολοειδές)}$$

Ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0,z_0) αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔχομεν: $f'_x(x_0,y_0,z_0)=\frac{2x_0}{a^2}$, $f'_y(x_0,y_0,z_0)=\frac{2y_0}{\beta^2}$ καί $f'_z(x_0,y_0,z_0)=-\frac{2z_0}{\gamma^2}$. ἡ δέ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου θά εἶναι:

$$(X-x_0)\frac{2x_0}{a^2}+(Y-y_0)\cdot\frac{2y_0}{\beta^2}-(Z-z_0)\frac{2z_0}{\gamma^2}=0 \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{X\cdot x_0}{a^2}+\frac{Y\cdot y_0}{\beta^2}-\frac{Z\cdot z_0}{\gamma^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{\beta^2}-\frac{z_0^2}{\gamma^2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{X\cdot x_0}{a^2}+\frac{Y\, y_0}{\beta^2}-\frac{Z\, z_0}{\gamma^2}=1$$

Παρατήρησις:

Ἐάν $f'_x(x_0,y_0,z_0)=f'_y(x_0,y_0,z_0)=f'_z(x_0,y_0,z_0)=0$, τότε ἡ ἐπιφάνεια δέν ἔχει ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0,z_0) καί καλεῖται *Κωνικόν σημεῖον*. Π.χ. ἡ κορυφή κωνικῆς ἐπιφανείας εἶναι κωνικόν σημεῖον.

§ 3. ΙΑΚΩΒΙΑΝΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ – ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α΄. Ἰακωβιαναί ὁρίζουσαι:

Ἔστωσαν αἱ πραγματικαί συναρτήσεις $f_i(x_1,x_2,\dots,x_q)$ $i=1,2,\dots q$ ὡρισμέναι εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑπο-

σύνολον U τοῦ $\mathbb{R}^q$ καί ἔχουσαι μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχεῖς εἰς τό ἐν λόγῳ σύνολον. Τήν κάτωθι σχηματιζομένην ὁρίζουσαν:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial f_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \frac{\partial f_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_q} \end{vmatrix} \quad \text{ἤ} \quad \begin{vmatrix} f'_{1_{x_1}} & f'_{1_{x_2}} & \cdots & f'_{1_{x_q}} \\ f'_{2_{x_1}} & f'_{2_{x_2}} & \cdots & f'_{2_{x_q}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{q_{x_1}} & f'_{q_{x_2}} & \cdots & f'_{q_{x_q}} \end{vmatrix}$$

καλοῦμεν *Ἰακωβιανήν* (Jacobian)* τῶν συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_q$ ὡς πρός τάς μεταβλητάς $x_1, x_2, \ldots, x_q$ καί τήν συμβολίζομεν συντόμως δι' ἑνός τῶν συμβόλων:

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_q) \text{ ἤ } \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_q)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_q)}.$$

Αἱ Ἰακωβιαναί ὁρίζουσαι ἔχουν μερικάς ἰδιότητας αἵτινες ὁμοιάζουν μέ τάς ἰδιότητας τῆς παραγώγου.

Παραθέτομεν μίαν τοιαύτην χαρακτηριστικήν ἰδιότητα:

Ἰδιότης IV-3-1. Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ ὡρισμέναι ἐπί ἑνός ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^q$ καί ἔχουσαι ἐπ' αὐτοῦ μερικάς παραγώγους α'ης τάξεως συνεχεῖς. Ἔστωσαν ἐπί πλέον αἱ συναρτήσεις $x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_q)$, $i = 1, 2, \ldots, q$ ὡρισμέναι ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου V τοῦ $\mathbb{R}^q$ καί τοιαῦται, ὥστε διά κάθε $(t_1, t_2, \ldots, t_q) \in V$ τό σημεῖον $(x_1, x_2, \ldots, x_q) \in U$. Ἐπί πλέον ὑποθέτομεν ὅτι αἱ $x_i(t_1, t_2, \ldots, t_q)$ ἔχουν ἐπί τοῦ V μερικάς παραγώγους α'ης τάξεως συνεχεῖς. Τότε διά τάς συνθέτους συναρτήσεις:

$$f_i(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_q), \ldots, x_q(t_1, t_2, \ldots, t_q)), \quad i = 1, 2, \ldots, q \quad \text{ἰσχύει:}$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_q)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_q)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_q)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_q)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_q)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_q)} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν τό στοιχεῖον τῆς ὁριζούσης τοῦ πρώτου μέλους τό κατέχον τήν i-γραμμήν καί j-στήλην, τοῦτο εἶναι τό $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}$. Τό δεύτερον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος εἶναι ὁμοίως μία ὁρίζουσα q-τῆς τάξεως, ὡς γινόμενον ὁριζουσῶν q-τῆς τάξεως. Ὡς εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ὁριζουσῶν τό στοιχεῖον τό κατέχον τήν i-γραμμήν

---

* Ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ Γάλλου Μαθηματικοῦ Carl Jacobi (1804-1851).

καί j-στήλην εὑρίσκεται ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως τά στοιχεῖα τῆς i-γραμμῆς τῆς πρώτης ὁριζούσης ἐπί τά στοιχεῖα τῆς j-στήλης τῆς δευτέρας ὁριζούσης καί προσθέσωμεν τά ἐξαγόμενα, ἤτοι ἔχομεν:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\dots+\frac{\partial f_i}{\partial x_q}\cdot\frac{\partial x_q}{\partial t_j}$$

Τό τελευταῖον ἄθροισμα ἰσοῦται πρός $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}$, ἐξ οὗ τό ἀποδεικτέον.

<u>Β' Συστήματα πεπλεγμένων συναρτήσεων</u>: Ἔστω τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,u,v)=0 \\ g(x,y,u,v)=0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

τῶν δύο ἐξισώσεων μέ τέσσαρας ἀγνώστους τούς x, y, u, v ὡρισμένον εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον U τοῦ χώρου $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^4$.

Τό σύστημα τῶν δύο πραγματικῶν συναρτήσεων:

$$\left.\begin{array}{l} u=f_1(x,y) \\ v=f_2(x,y) \end{array}\right\} \quad (2)$$

ὡρισμένον εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον $\mathcal{T}$ τοῦ $\mathbb{R}^2$ θά καλῆται *λύσις* τοῦ συστήματος (1), ὡς πρός τάς μεταβλητάς u, v, ἐάν διά κάθε $(x,y)\in\mathcal{T}$ ἰσχύῃ:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0 \\ g(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι πληροῦνται αἱ προϋποθέσεις αὐταί ὑπό τάς ὁποίας ἡ $f=0$ δύναται νά λυθῇ μονοσημάντως ὡς πρός u, συναρτήσει τῶν x, y, v καί θά γράφωμεν τότε: $u=\varphi(x,y,v)$ (4).

Ἀκολούθως ἀντικαθιστῶντες αὐτήν τήν τιμήν τοῦ u εἰς τήν ἐξίσωσιν $g=0$ ἐπιτυγχάνομεν μίαν ἐξίσωσιν περιέχουσαν ὡς ἀγνώστους τούς x, y, v, ἤτοι:

$$g(x,y,\varphi(x,y,v),v)=0$$

Συμφώνως πρός τό θεώρημα τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων, τό ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι δυνάμεθα νά τό ἐφαρμόσωμεν, ἐξάγομεν, ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως, τήν πεπλεγμένην συνάρτησιν:

$$v=f_2(x,y) \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες τό v ἐκ τῆς (5) εἰς τήν (4) λαμβάνομεν:

$$u=\varphi(x,y,f_2(x,y))$$

καί τήν ὁποίαν γράφομεν οὕτω: $u=f_1(x,y)$ (6)

Ἐκ τῶν (5) καί (6) παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν ἐκφράσει τα u καί v συναρτήσει τῶν x καί y.

Τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) γράφεται, λόγω τῶν (5) καί (6), οὕτω:

$$f(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0$$
$$g(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0.$$

Ὑποθέτοντες ὅτι αἱ f, g ἔχουν μερικάς παραγώγους ὡς πρός x, y, u, v συνεχεῖς, ἐφαρμόζοντες τόν κανόνα παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως, λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} f'_x+f'_u\cdot u'_x+f'_v\cdot v'_x&=0\\ g'_x+g'_u\cdot u'_x+g'_v\cdot v'_x&=0\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

Λύοντες τό γραμμικόν σύστημα (7) μέ ἀγνώστους τούς u'_x, v'_x μέ τήν μέθοδον τοῦ Cramer λαμβάνομεν:

$$u'_x=-\frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_v\\ g'_x & g'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v\\ g'_u & g'_v\end{vmatrix}}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}:\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)},\qquad v'_x=-\frac{\begin{vmatrix} f'_u & f'_x\\ g'_u & g'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v\\ g'_u & g'_v\end{vmatrix}}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}:\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$$

Ἀναλόγως ὑπολογίζομεν τάς μερικάς παραγώγους u'_y, v'_y.

Τό ἑπόμενον θεώρημα μᾶς δεικνύει ὑπό ποίας συνθήκας τά ἀνωτέρω βήματα ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος εἶναι, τουλάχιστον θεωρητικῶς, δυνατά.

Θεώρημα IV-3-1. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $f(x,y,u,v)$ καί $g(x,y,u,v)$ εἶναι συνεχεῖς καί ἔχουν συνεχεῖς α'-τάξεως μερικάς παραγώγους εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0,u_0,v_0). Ἐπίσης ὑποθέτομεν ὅτι $f(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $g(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

$$\text{καί}\quad D_0=\begin{vmatrix} f'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) & f'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\\ g'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) & g'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Τότε ὑπάρχουν οἱ θετικοί ἀριθμοί h, k_1 καί k_2 τοιοῦτοι, ὥστε:

a) Διά κάθε (x,y) μέ $|x-x_0|<h$, $|y-y_0|<h$, ὑπάρχει μία μονοσήμαντος λύσις ὡς πρός (u,v) τῶν ἐξισώσεων:

$$f(x,y,u,v)=0,\quad g(x,y,u,v)=0$$

μέ $|u-u_0|<k_1$ καί $|v-v_0|<k_2$.

Παριστῶμεν αὐτάς τάς λύσεις ὑπό τῶν: $u=f_1(x,y)$, $v=f_2(x,y)$.

β) <u>Αἱ συναρτήσεις f_1 καί f_2 εἶναι συνεχεῖς μέ πρώτας παραγώγους συνεχεῖς καί ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι</u>:

$$u'_x = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} f'_x & f'_v \\ g'_x & g'_v \end{vmatrix}, \quad v'_x = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} f'_u & f'_x \\ g'_u & g'_x \end{vmatrix}$$

<u>ὅπου</u>, $D = f'_u \cdot g'_v - f'_v \cdot g'_u$

<u>Ἀναλόγως εὑρίσκονται αἱ</u> u'_y, v'_y. Θεώρημα αντιστρόφου συναρτήσεως εις το επίπεδο.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος συνίσταται εἰς τήν διαδοχικήν ἐφαρμογήν τοῦ θεωρήματος IV -2-1α τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων. Ἐπειδή $D_0 \neq 0$ ἕπεται ὅτι αἱ g'_u, g'_v δέν δύνανται νά εἶναι ἀμφότεραι μηδέν εἰς τό σημεῖον (x_0, y_0, u_0, v_0). Ὑποθέτομεν ὅτι $g'_v \neq 0$ ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος ἐάν $g'_u \neq 0$. Τότε ἐκ τοῦ θεωρήματος IV-2-1α συμπεραίνομεν ὅτι ὑπάρχουν οἱ θετικοί ἀριθμοί m καί τ τοιοῦτοι, ὥστε διά $|x-x_0| < m$, $|y-y_0| < m$, $|u-u_0| < m$ καί $|v-v_0| < \tau$ ἡ ἐξίσωσις $g(x,y,u,v) = 0$ (1) νά δύναται νά παρασταθῇ ὑπό τήν μορφήν:

$$v = \varphi\,(x,y,u) \qquad (2)$$

ὅπου ἡ συνάρτησις φ εἶναι συνεχής καί μέ α^{ης}-τάξεως παραγώγους συνεχεῖς εἰς τήν ἐν λόγῳ περιοχήν. Ἐπί πλέον δέ ἔχομεν:

$$\varphi'_u(x,y,u) = -\frac{g'_u[x,y,\varphi(x,y,u)]}{g'_v[x,y,\varphi(x,y,u)]} \qquad (3)$$

(Κατά τήν ἐφαρμογήν τοῦ θεωρήματος IV -2-1α ἀντικαταστήσαμεν τό h ὑπό τοῦ m, τό k ὑπό τοῦ τ, τό (x_1, x_2, x_3) ὑπό τοῦ (x,y,u) καί τήν μεταβλητήν y ὑπό τῆς v).

Ἤδη ἄς ὁρίσωμεν: $\sigma(x,y,u) = f\,(x,y,u,\varphi\,(x,y,u))$ (4)

Ἡ συνάρτησις σ ἔχει ὁρισθῆ διά:

$$|x-x_0| < m, \; |y-y_0| < m \text{ καί } |u-u_0| < m$$

Ἐφαρμόζοντες τόν κανόνα τῆς διαφορίσεως εἰς τήν συνάρτησιν σ, διδομένης ὑπό τῆς (4), λαμβάνομεν $\sigma'_u = f'_u + f'_v \cdot \varphi'_u$ ἤ λόγῳ τῆς (3), ἔχομεν:

$$\sigma'_u = f'_u + f'_v\left(-\frac{g'_u}{g'_v}\right) \qquad (5)$$

Εἶναι δέ:

$$\sigma'_u(x_0,y_0,u_0) = \frac{f'_u\, g'_v - f'_v \cdot g'_u}{g'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)} = \frac{D_0}{g'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)} \neq 0 \qquad (6)$$

Ἕνεκα τῆς (6) δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα τῶν πεπλεγμένων συν-

αρτήσεων εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\sigma(x,y,u) = 0$$

Ὅθεν ὑπάρχουν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ m' καὶ τ' μὲ $m'\leq m$, $\tau'\leq m$ τοιοῦτοι, ὥστε διά:

$$|x-x_0|<m', \ |y-y_0|<m' \text{ καὶ } |u-u_0|<\tau'$$

ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις νά δύναται νά τεθῆ ὑπό τὴν μορφήν:

$$u=f_1(x,y) \text{ μέ } |x-x_0|<m', \quad |y-y_0|<m'.$$

Ἐπί πλέον ἡ f_1 καθώς καί αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι αὐτῆς ὡς πρός x,y εἶναι συνεχεῖς. Λαβόντες ὑπ' ὄψιν τήν (2) καί ἐάν θέσωμεν:

$$v=\varphi(x,y,f_1(x,y)) \equiv f_2(x,y) \text{ διά } |x-x_0|<m', \ |y-y_0|<m'.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ f_2 καθώς καί αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι αὐτῆς ὡς πρός x,y εἶναι συνεχεῖς.

<u>Παράδειγμα</u>: Δίδεται τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$f(x,y,u,v) \equiv x^2-y^2-u^3+v^2+4=0$$

$$g(x,y,u,v) \equiv 2xy+y^2-2u^2+3v^4+8=0$$

Δείξατε ὅτι εἰς τήν περιοχήν τοῦ σημείου: $P_0:\{x=2, y=-1, u=2, v=1\}$ δύναται νά παρασταθῆ ὑπό τήν μορφήν: $u=f_1(x,y)$, $v=f_2(x,y)$.

Εὕρετε ἐν συνεχείᾳ τάς μερικάς παραγώγους u'_x, u'_y, v'_x, v'_y εἰς τό σημεῖον P_0.

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$f'_u=-3u^2, f'_v=2v, g'_u=-4u, g'_v=12v^3$$

$$f'_x=2x, f'_y=-2y, g'_x=2y, g'_y=2x+2y$$

Εἰς τό σημεῖον P_0 ἔχομεν:

$$D_0=f'_u\cdot g'_v-f'_v\cdot g'_u\,\big|_{P_0}=-128$$

Ἐπειδή αἱ f καί g εἶναι πολυωνυμικαί ἐκφράσεις καί ἐπειδή $D_0\neq 0$ πᾶσαι αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος IV-3-1 πληροῦνται. Συνεπῶς τά u καί v δύναται νά ἐκφρασθοῦν ὑπό τήν μορφήν:

$$u=f_1(x,y) \text{ καί } v=f_2(x,y)$$

Εἶναι δέ:

$$u'_x=-\frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} f'_x & f'_v \\ g'_x & g'_v\end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2x & 2v \\ 2y & 12v^3\end{vmatrix}=-\frac{4}{D}\begin{vmatrix} x & v \\ y & 6v^3\end{vmatrix}$$

καί εἰς τό σημεῖον P_0 θά ἔχωμεν:

$$u'_x\,\Big|_{P_0}=-\frac{4}{D_0}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6\end{vmatrix}=\frac{-4\cdot 13}{-128}=\frac{13}{32}.$$

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν:

$$u'_x|_{P_0} = \frac{7}{16}, \quad u'_y|_{P_0} = \frac{5}{32}, \quad v'_y|_{P_0} = -\frac{1}{16}$$

Ἡ ἀνωτέρω θεωρία τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων δύναται νά ἐπεκταθῇ εὐκόλως καί εἰς ἕνα σύστημα k ἐξισώσεων τῶν q+k μεταβλητῶν, ἤτοι εἰς ἕν σύστημα τῆς μορφῆς:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,\dots,x_q,u_1,u_2,\dots,u_k) &= 0 \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_q,u_1,u_2,\dots,u_k) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k(x_1,x_2,\dots,x_q,u_1,u_2,\dots,u_k) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἤδη θά ἐξετάσωμεν ὑπό ποίας προϋποθέσεις τό ἀνωτέρω σύστημα ἐπιδέχεται λύσιν ὡς πρός τάς μεταβλητάς $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Σχετικῶς ἰσχύει τό κάτωθι θεώρημα ὑπάρξεως πεπλεγμένων συναρτήσεων, τό ὁποῖον παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως:

Θεώρημα IV-3-2. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ $f_1, f_2, \dots, f_k$ εἶναι συναρτήσεις τῶν q+k μεταβλητῶν $x_1, x_2, \dots, x_q, u_1, u_2, \dots, u_k$ καί ἐπί πλέον ὅτι ἑκάστη τῶν f_i καθώς καί αἱ πρῶται παράγωγοι αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχήν ἑνός σημείου $P_0(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q,\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_k)$.

Ὑποθέτομεν ἐπί πλέον ὅτι τό σημεῖον P_0 ἐπαληθεύει τάς k ἐξισώσεις ἤτοι:

Θεώρημα συνιστ. συναρτήσεως

$$f_i(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q,\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_k) = 0, \quad i = 1,2,\dots,k$$

καί ὅτι ἡ Ἰακωβιανή $D = \frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_k)}{\partial(u_1,u_2,\dots,u_k)}$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός εἰς τό σημεῖον P_0.

Τότε ὑπάρχουν οἱ θετικοί ἀριθμοί h καί τ τοιοῦτοι, ὥστε:

α) Διά κάθε $(x_1,x_2,\dots,x_q)$ μέ $|x_i - \xi_i| < h$ διά $i = 1,2,\dots,q$, ὑπάρχει μία μοναδική λύσις $(u_1,u_2,\dots,u_k)$ τῶν ἐξισώσεων:

$$f_i(x_1,x_2,\dots,x_q,u_1,u_2,\dots,u_k) = 0, \quad i = 1,2,\dots,k$$

διά κάθε $|u_j - \eta_j| < \tau$, $j = 1,2,\dots,k$

Ἡ δέ λύσις ὁρίζεται ὑπό τῶν συναρτήσεων: $u_j = \varphi_j(x_1,x_2,\dots,x_q)$, $j = 1,2,\dots,k$.

β) Αἱ συναρτήσεις φ_j εἶναι συνεχεῖς εἰς τήν περιοχήν τοῦ σημείου P_0 καί πληροῦν τήν συνθήκην $\eta_j = \varphi_j(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q)$, $j = 1,2,\dots,k$.

γ) Ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\rho}$, $\rho = 1,2,\dots,q$ τῶν συναρτήσεων φ_j, $j = 1,2,\dots,k$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ P_0 καί προκύπτουν ἄν παραγωγίσωμεν τό σύστημα (1) μερικῶς

ὡς πρός x_ρ καί τό προκύπτον σύστημα, ἤτοι τό:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\rho} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_\rho} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_\rho} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial u_\kappa}\cdot\dfrac{\partial u_\kappa}{\partial x_\rho} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_\kappa}{\partial x_\rho} + \dfrac{\partial f_\kappa}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_\rho} + \dfrac{\partial f_\kappa}{\partial u_2}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_\rho} + \cdots + \dfrac{\partial f_\kappa}{\partial u_\kappa}\cdot\dfrac{\partial u_\kappa}{\partial x_\rho} = 0 \end{cases}$$

ἐπιλύσωμεν ὡς πρός τάς μερικάς παραγώγους $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_\rho}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_\rho}, \ldots, \dfrac{\partial u_\kappa}{\partial x_\rho}$.

Παράδειγμα: Δίδεται τό σύστημα:

$$f_1 \equiv x_1^2 + 2x_2^2 - 3u_1^2 + 4u_1u_2 - u_2^2 + u_3^2 = 0$$

$$f_2 \equiv x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 + 4u_1^2 - 2u_2^2 + u_3^2 = 0$$

$$f_3 \equiv x_1^3 - x_2^3 + 4u_1^2 + 2u_2 - 3u_3^2 = 0$$

Νά ὑπολογισθοῦν αἱ $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}$.

Λύσις: Αἱ ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ὡς εὐκόλως δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν, πληροῦνται. Δι' ἐφαρμογῆς λοιπόν τοῦ συστήματος (2) τοῦ θεωρήματος εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου εἶναι $\rho=1$ λαμβάνομεν, μετά τάς μερικάς παραγωγίσεις, τό ἀκόλουθον σύστημα:

$$2x_1 + (-6u_1 + 4u_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (4u_1 - 2u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

$$1 - 4x_2 + 8u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 4u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

$$3x_1^2 + 8u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - 6u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

Τοῦτο εἶναι ἕνα γραμμικόν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους τούς: $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}$, τό ὁποῖον ἐπιλύεται εὐκόλως διά τῆς μεθόδου τοῦ Cramer.

'Εφαρμογαί:

Α'. Ἔστω ἡ συνάρτησις $z=f_3(u,v)$, ἔνθα $u=\varphi(x,y)$ καί $v=\sigma(x,y)$.

Θεωροῦμεν τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) - u = 0 \\ \sigma(x,y) - v = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

'Εάν πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος IV-3-1, τότε τοῦτο τίθεται ὑπό τήν μορφήν:

$$x = f_1(u,v) \quad y = f_2(u,v)$$

Οὕτω τό ἀρχικόν σύστημα τῶν ἐξισώσεων δίδεται ὑπό τήν μορφήν:

$$x=f_1(u,v),\ y=f_2(u,v),\ z=f_3(u,v)\cdot \quad (3)$$

Αἱ ἐξισώσεις (3) εἶναι ὡς γνωστόν αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις μιᾶς ἐπιφανείας.

Αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ εὑρίσκονται διά παραγωγίσεως τῆς συνθέτου συναρτήσεως $z=f_3(u,v)$,

ἤτοι:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_3}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ καί $\frac{\partial v}{\partial y}$ εὑρίσκονται διά παραγωγίσεως τῶν ἐξισώσεων: $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$ ὡς πρός x καί y καί ἐν συνεχεία ἐπιλύσεως τοῦ προκύπτοντος συστήματος τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων, ἤτοι:

$$1=\frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\ , \qquad 0=\frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0=\frac{\partial f_1}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\ , \qquad 1=\frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot$$

Β′ Γεωμετρικαί ἐφαρμογαί:

Ἔστω τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\left.\begin{matrix} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

Ἔστω καί ἕνα σημεῖον $M_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$f(x_0,y_0,z_0)=g(x_0,y_0,z_0)=0 \quad (2)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι:

$$\begin{vmatrix} f'_y(x_0,y_0,z_0) & f'_z(x_0,y_0,z_0) \\ g'_y(x_0,y_0,z_0) & g'_z(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}\neq 0 \quad (3)$$

Συμφώνως πρός τά ἐκτεθέντα εἰς τήν §3 τό σύστημα (1) ὁρίζει μονοσημάντως τά y καί z ὡς συναρτήσεις τοῦ x, αἵτινες ἔχουν πρώτας παραγώγους συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου x_0.

Συνεπῶς τό ἀνωτέρω σύστημα ὁρίζει διά (x,y,z) ἀνήκοντα εἰς μία περιοχήν τοῦ σημείου (x_0,y_0,z_0) μίαν καμπύλην (γ) ἔχουσα μίαν ἐφαπτομένην εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς.

Διά παραγωγίσεως τοῦ συστήματος (1) ὡς πρός x λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ἐπειδή πληροῦται ἡ σχέσις (3) δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν, ἐκ τοῦ γραμμικοῦ συστήματος (4), τάς $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, θεωρουμένων ὡς ἀγνώστων κατά συνέπειαν δέ νά εὕρωμεν καί τάς τιμάς τῶν ἐν λόγῳ παραγώγων εἰς τό σημεῖον $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐξίσωσις $f(x,y,z)=0$ παριστᾶ μία ἐπιφάνειαν (E) διερχομένη διά τοῦ σημείου M_0. Ἡ ἐν λόγῳ ἐπιφάνεια ἔχει εἰς τό σημεῖον M_0 ἕν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (P) τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις εἶναι:

$$(X-x_0) f'_x(x_0,y_0,z_0) + (Y-y_0)\cdot f'_y(x_0,y_0,z_0) + (Z-z_0)\cdot f'_z(x_0,y_0,z_0) = 0 \qquad (5)$$

Ὁμοίως ἡ $g(x,y,z)=0$ παριστᾶ μίαν ἐπιφάνειαν (S) διερχομένη διά τοῦ σημείου M_0 καί ἥτις ἔχει ἕν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (Π) τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις εἶναι:

$$(X-x_0)\, g'_x(x_0,y_0,z_0) + (Y-y_0)\, g'_y(x_0,y_0,z_0) + (Z-z_0)\cdot g'_z(x_0,y_0,z_0) = 0 \qquad (6)$$

Ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων (P) καί (Π) εἶναι μία εὐθεῖα διερχομένη, προφανῶς, διά τοῦ σημείου M_0 καί ἐφαπτομένη ἀμφοτέρων τῶν ἐπιφανειῶν εἰς τό M_0, συνεπῶς καί τῆς τομῆς των, δηλ. τῆς καμπύλης (γ).

Ὅθεν: <u>τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων</u> (5) <u>καί</u> (6) <u>παριστᾶ τάς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τό</u> M_0, <u>τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις δίδονται ὑπό τοῦ συστήματος</u> (1)

§4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΙΣ *)

Ἔστω ἕν πεπερασμένον σύνολον συναρτήσεων $S=\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, ἤτοι ἔστωσαν n τό πλῆθος πραγματικαί συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_q),\ \varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_q),\ldots,\ \varphi_n(x_1,x_2,\ldots,x_q) \qquad (1)$$

ὡρισμέναι ἐπί τοῦ συνόλου $\mathcal{T}\subset \mathbb{R}^q$ καί μέ μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ συνόλου $\mathcal{T}$.

<u>Ὁρισμός IV-4-1</u>. *Θά λέγωμεν ὅτι τό σύνολον S εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημένον ἐπί τοῦ $\mathcal{T}$, εἴτε ἄλλως αἱ συναρτήσεις (1) εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι,*

---

*) *Ἡ παροῦσα παράγραφος ἀναπτύσσεται λίαν συντόμως.*

συντόμως ἐξηρτημέναι ἐπί τοῦ $\mathcal{T}$, τότε καί μόνον τότε, ἄν αἱ συναρτήσεις $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *εἰς ἕκαστον σημεῖον* $(x_1, x_2, \ldots, x_q) \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^q$ *ἐπαληθεύουν μίαν ἤ περισσοτέρας σχέσεις τῆς μορφῆς*:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0 \qquad (2)$$

αἱ ὁποῖαι δέν περιέχουν καμίαν ἀπό τάς μεταβλητάς $x_1, x_2, \ldots, x_q$.

Εἰδικῶς ἄν ἡ (2) τίθεται ὑπό τήν μορφήν:

$$\varphi_j = F_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n) \qquad (3)$$

τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις φ_j εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημένη, συντόμως ἐξαρτᾶται ἀπό τάς συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n$.

Παράδειγμα: Αἱ τρεῖς συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varphi_2(x, y, z) = x + y + z, \quad \varphi_3(x, y, z) = xy + yz + zx$$

εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^3$, καθόσον, προφανῶς, ἐπαληθεύουν τήν σχέσιν:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv \varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_3 = 0.$$

Διατυποῦμεν κατωτέρω, χωρίς ἀπόδειξιν μίαν πρότασιν, ἥτις παρέχει μίαν ἱκανήν καί ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα n τό πλῆθος συναρτήσεις εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι.

Πρότασις IV-4-1. Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα n συναρτήσεις n ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ὡρισμέναι ἐπί ἑνός συνόλου $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$ μέ μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ $\mathcal{T}$ εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι ἐπί τοῦ $\mathcal{T}$, εἶναι ἡ Ἰακωβιανή:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0, \text{ διά κάθε } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n.$$

Παράδειγμα: Αἱ συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x, y, z) = 2x - y + 3z, \quad \varphi_2(x, y, z) = 6x + 8y - 2z - 1, \quad \varphi_3(x, y, z) = 3x + 4y - z$$

ὡρισμέναι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^3$, εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & 8 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι: $\varphi_2 = 2\varphi_3 - 1$

Ὁρισμός IV-4-2. *Θά λέγωμεν ὅτι τό σύνολον S εἶναι συναρτησιακῶς ἀνεξάρτητον, ἄλλως αἱ συναρτήσεις* (1) *εἶναι συναρτησιακῶς ἀνεξάρτηται ἐπί τοῦ* $\mathcal{T}$, *τότε καί μόνον τότε, ἄν δέν ἐπαληθεύουν οὐδεμίαν σχέσιν τῆς μορφῆς* (2) *ἤ* (3) *ἐπί τοῦ* $\mathcal{T}$.

Σχετικῶς ἰσχύει ἡ κάτωθι:

Πρότασις IV-4-2. Ἐάν αἱ συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, ὡρισμέναι ἐπί τοῦ συνόλου $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$, ἔχουν μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ $\mathcal{T}$, τότε διά νά εἶναι αὗται συναρτησιακῶς ἀνεξάρτηται ἐπί τοῦ $\mathcal{T}$ πρέπει καί ἀρκεῖ διά κάθε σημεῖον τοῦ $\mathcal{T}$ νά ἰσχύη ἡ συνθήκη:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$$

Παράδειγμα 1ον/ Αἱ συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3, \quad \varphi_2(x,y,z) = xyz, \quad \varphi_3(x,y,z) = x+y+z$$

ὡρισμέναι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^3$ μέ $x^2 \neq y^2 \neq z^2 \neq 0$ εἶναι συναρτησιακῶς ἀνεξάρτηται ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι: $\quad \dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(x,y,z)} \neq 0$ ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 2ον/ Αἱ συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x,y) = x^2 - y^2, \quad \varphi_2(x,y) = 2xy$$

ὡρισμέναι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^2$ εἶναι συναρτησιακῶς ἀνεξάρτητοι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Πράγματι: $\quad \dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2) \neq 0$ διά $(x,y) \neq (0,0)$.

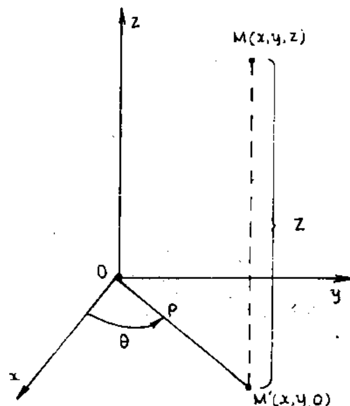
§5. ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑΙ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΣΗΜΕΙΟΥ

I. Κυλινδρικαί συντεταγμέναι:

Ἔστω $oxyz$ ἕνα τρισορθογώνιον σύστημα ἀξόνων τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$. Ἔστωσαν τό σημεῖον $M(x,y,z)$ αὐτοῦ μέ $(x,y) \neq (0,0)$ καί $M'(x,y,0)$ ἡ προβολή τοῦ M ἐπί τοῦ ἐπιπέδου xoy (βλ. Σχ. 1).

Θεωροῦμεν τό ζεῦγος (ρ, θ), ὅπου $\rho > 0$ καί $\theta \in [0, 2\pi)$, τῶν πολικῶν συντεταγμένων τοῦ M' ὡς πρός τό ἐπίπεδον oxy.

Ἡ τριάς (ρ, θ, z) καλεῖται *σύστημα κυλινδρικῶν συντεταγμένων τοῦ* M.



Αὐτή προσδιορίζει πλήρως τήν θέσιν τοῦ M, εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^3$.

Σχ. 1

Προφανῶς ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι οἱ συνδέοντες τάς κυλινδρικάς μέ τάς καρτεσιανάς συντεταγμένας τοῦ Μ.

$$x = \rho\ \text{συν}\theta,\ y = \rho\ \text{ημ}\theta,\ z = z.$$

Ἀντιστρόφως ἐάν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ καί $x \neq 0$, τότε εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \begin{cases} \text{τοξεφ}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{διά } x > 0 \\ \pi + \text{τοξεφ}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{» } x < 0 \end{cases} \quad \text{καί } z = z.$$

<u>Διάφοροι εἰδικαί περιπτώσεις:</u>

1η/ Ἡ ἐξίσωσις $\rho = \rho_0$ ἤ ὅπερ ἰσοδυνάμως τό σύνολον $A = \{(\rho, \theta, z) : \rho = \rho_0\}$, παριστᾷ εἰς τό σύστημα τῶν κυλινδρικῶν συντεταγμένων ἕναν ὀρθόν κύλινδρον.

2α/ Ἡ ἐξίσωσις $\theta = \theta_0$ παριστᾶ εἰς τό ἀνωτέρω σύστημα ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ ἄξονος Oz.

3η/ Ἡ ἐξίσωσις $z = z_0$ παριστᾶ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον oxy.

<u>Παρατηρήσεις</u> 1η/ Τό σημεῖον $(0,0,z)$ δέν ἔχει κυλινδρικάς συντεταγμένας. Ἐπειδή εἶναι $\rho = 0$, δυνάμεθα νά θέσωμεν ὡς κυλινδρικάς συντεταγμένας τοῦ σημείου $(0,0,z)$ τάς $(0,\theta,z)$, ὅπου θ καί z αὐθαίρετα.

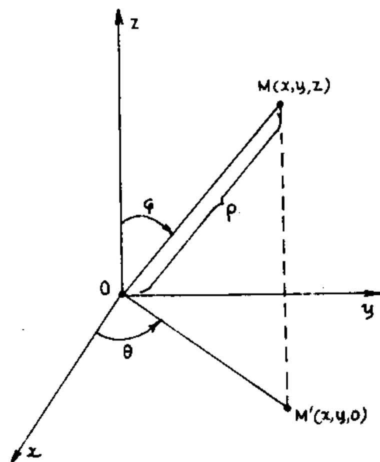
2α/ Τοῦ σημείου $(x,0,0)$, $x > 0$, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὡς κυλινδρικάς συντεταγμένας τάς $(x, 2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ καί τέλος τοῦ σημείου $(0, y, 0)$, $y > 0$, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὡς κυλινδρικάς συντεταγμένας τάς $(y, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

II. <u>Σφαιρικαί συντεταγμέναι:</u>

Καλοῦμεν <u>σφαιρικάς συντεταγμένας</u> τοῦ σημείου $M(x,y,z)$ τήν τριάδα (ρ, θ, φ), ὅπου $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ καί $\varphi \in (0, \pi)$ (βλ. Σχ. 2)

Ἡ τριάς αὕτη προσδιορίζει πλήρως τήν θέσιν τοῦ σημείου Μ εἰς τόν χῶρον.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι οἱ τύποι οἱ συνδέοντες τάς Καρτεσιανάς μέ τάς σφαιρικάς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ εἶναι οἱ κάτωθι:



Σχ. 2

$$x = \rho\ \text{συν}\theta\ \text{ημ}\varphi,\ y = \rho\ \text{ημ}\theta\ \text{ημ}\varphi,\ z = \rho\ \text{συν}\ \varphi$$

Ἀντιστρόφως ἐάν $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ καί $x\neq 0$ εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι αἱ:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta=\begin{cases}\text{τοξ εφ}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{διά } x>0\\ \pi+\text{τοξ εφ}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{» } x<0\end{cases}$$

$$\text{καί } \varphi=\text{τοξ συν}\,\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

εἶναι αἱ σφαιρικαί συντεταγμέναι τοῦ Μ.

Εἶναι εὔκολον νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἐάν $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ καί $(x,y)\neq(0,0)$ καί $x\neq 0$, τότε τό σημεῖον (x,y,z) παρίσταται μονοσημάντως ὑπό σφαιρικῶν συντεταγμένων.

Διάφοροι εἰδικαί περιπτώσεις:

1ον/ Ἡ ἐξίσωσις $\rho=\rho_0$ εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας ἤ ὅπερ ἰσοδυνάμως τό σύνολον: $A=\{(\rho,\theta,\varphi):\rho=\rho_0\}$, παριστᾶ μίαν ἐπιφάνειαν σφαίρας.

2ον/ Ἡ ἐξίσωσις $\theta=\theta_0$ εἰς τό ἀνωτέρω σύστημα συντεταγμένων παριστᾶ ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ ἄξονος ΟΖ καί τέλος ἡ ἐξίσωσις $\varphi=\varphi_0$ παριστᾶ μίαν κωνικήν ἐπιφάνειαν κορυφῆς $O(0,0,0)$

Ἐφαρμογαί

1η/ Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις: $x=\rho\,\text{συν}\theta,\ y=\rho\,\text{ημ}\theta,\ z=z$, ἔνθα $\rho>0,\ \theta\in[0,2\pi)$ καί $z\in\mathbb{R}$.

Ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}$

Λύσις: Εἶναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}=\begin{vmatrix}x'_\rho & x'_\theta & x'_z\\ y'_\rho & y'_\theta & y'_z\\ z'_\rho & z'_\theta & z'_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{συν}\theta & -\rho\,\text{ημ}\theta & 0\\ \text{ημ}\theta & \rho\,\text{συν}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\,(\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta)=\rho$$

2ον/ Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις: $x=\rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ y=\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ z=\rho\,\text{συν}\varphi$, ὅπου $\rho>0,\ \theta\in(0,2\pi)$ καί $\varphi\in(0,\pi)$. Νά ὑπολογισθῇ ἡ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}$

Λύσις: Εἶναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi\\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi\\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi & -\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi & \rho\,\text{συν}\theta\,\text{συν}\varphi\\ \text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi & \rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi & \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\varphi\\ \text{συν}\varphi & 0 & -\rho\,\text{ημ}\varphi\end{vmatrix}=-\rho^2\,\text{ημ}\varphi.$$

32/ Νά εὑρεθῆ τό διαφορικόν τόξου καμπύλης εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας.

Λύσις: Εἶναι γνωστόν ὅτι: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

καί $x = \rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi$, $y = \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi$, $z = \rho\,\text{συν}\varphi$.

Εἶναι δέ·

$$dx = -\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi\,d\theta + \rho\,\text{συν}\theta\,\text{συν}\varphi\,d\varphi + \text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi\,d\rho$$

$$dy = \rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi\,d\theta + \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\varphi\,d\varphi + \text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi\,d\rho$$

$$dz = -\rho\,\text{ημ}\varphi\,d\varphi + \text{συν}\varphi\,d\rho$$

καί $(ds)^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \rho^2\,\text{ημ}^2\varphi\,d\theta^2$.

Συμπληρώματα καί Ἀσκήσεις.

1/. Εἰς ἑκάστην τῶν ἀκολούθων ἀσκήσεων χρησιμοποιοῦντες τό Θεώρημα IV - 1 - 1 δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $f(x,y) = 0$ δύναται νά παρασταθῆ ὑπό τήν μορφήν $y = \varphi(x)$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ δοθέντος σημείου (x_0, y_0). Δώσατε μίαν πρόχειρον γραφικήν παράστασιν καί ὑπολογίσατε τήν $\varphi'(x_0)$ εἰς ἑκάστην τῶν κατωτέρω περιπτώσεων:

α) $f(x,y) \equiv x + y + x\,\text{ημ}y = 0$, $(x_0, y_0) = (0,0)$

β) $f(x,y) \equiv x^3 - 4x^2y + y^3 - 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (0,1)$

γ) $f(x,y) \equiv xe^y - y + 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (-1,0)$

δ) $f(x,y) \equiv xy + \log(x \cdot y) - 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (1,1)$

ε) $f(x,y) \equiv x\,\text{συν}\,xy = 0$, $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$

στ) $f(x,y) \equiv 1 + xy - \log(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$, $(x_0, y_0) = (1, -\log\sqrt{e-1})$

η) $f(x,y) \equiv x^5 + y^5 + xy + 4 = 0$, $(x_0, y_0) = (2,-2)$

θ) $f(x,y) \equiv 2xe^y + y + 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (0,-1)$.

2/. Ὑπολογίσατε τήν $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ τῆς συναρτήσεως $y = \varphi(x)$, ἥτις ὁρίζεται ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

α) $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - e^{\text{τοξεφ}\,y/x} = 0$ β) $f(x,y) \equiv x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

3/. Εἰς ἑκάστην τῶν ἀκολούθων ἀσκήσεων εὕρετε τάς διαφόρους πεπλεγμένας συναρτήσεις τάς ὁριζομένας ὑπό τῆς ἀντιστοίχου ἐξισώσεως καί εὕρετε τά σημεῖα τῆς γρα-

φιυῆς παραστάσεως, ὅπου $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Εἰς ἕκαστον τοιοῦτον σημεῖον ἐλέγξατε πότε εἶναι συγχρόνως $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$.

α) $f(x,y) \equiv xe^y - 2y + 2 = 0$, γ) $f(x,y) \equiv x^3 + y^3 = 0$.

β) $f(x,y) \equiv 2x^2 + y^2 - x^3 = 0$, δ) $f(x,y) \equiv (x^2+y^2)^2 - 8(x^2-y^2) = 0$.

4/. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) τῶν κωνικῶν τομῶν:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{καὶ} \quad y^2 = 2px.$$

5/. Εἰς ἑκάστην τῶν ἀκολούθων ἀσκήσεων χρησιμοποιοῦντες τὸ θεώρημα IV-2-1β δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $f(x,y,z) = 0$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $z = \varphi(x,y)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ δοθέντος σημείου (x_0, y_0, z_0). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ $\varphi'_x(x_0,y_0)$, $\varphi'_y(x_0,y_0)$.

α) $f(x,y,z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,2)$

β) $f(x,y,z) \equiv e^z - z^2 - x^2 - y^2 = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,0)$

γ) $f(x,y,z) \equiv x + y + z + \text{συν}\, xyz = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,-1)$.

6/. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι α^{ης} καὶ β^{ας} τάξεως τῆς πεπλεγμένης συναρτήσεως $z = \varphi(x,y)$, ἥτις ὁρίζεται ὑπὸ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

α) $f(x,y,z) \equiv xe^y + e^z - z^2 = 0$, β) $f(x,y,z) \equiv e^z \text{ημ}\, xy - e^{xy}\text{ημ}\, z = 0$, γ) $f(x,y,z) \equiv z^3 - z - xy\,\text{ημ}\, z = 0$.

7/. Εἰς ἑκάστην τῶν ἀκολούθων ἀσκήσεων δείξατε ὅτι $f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ καὶ ἐξετάσατε πότε εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφράσωμεν τὸ z ὡς μίαν συνάρτησιν τῶν x καὶ y εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0). Ἐξετάσατε ἐν συνεχείᾳ ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφράσωμεν τὸ y ὡς συνάρτησιν τῶν x καὶ z εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0):

α) $f(x,y,z) \equiv 5x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - y = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,-4)$.

β) $f(x,y,z) \equiv 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz - z = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (4,-3,2)$.

8/. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0, z_0) τῶν κάτωθι ἐπιφανειῶν: $(a, \beta, \gamma > 0)$

α) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$ (Ἐλλειψοειδές)

β) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = \pm 1$ (Μονόχωνον ὑπερβολοειδές) (Δίχωνον ”)

γ) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $p, q > 0$ (Ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές)

δ) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ (Ὑπερβολικὸν παραβολοειδές)

(Νά γίνῃ μία πρόχειρος σχεδίασις τῶν ἀνωτέρω ἐπιφανειῶν)

9. Ἐάν $u = \frac{x+y}{1-xy}$ καί $v = \text{τοξεφ}\,x + \text{τοξεφ}\,y$, νά ὑπολογισθῇ ἡ Ἰακωβιανή $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

10. Ὁμοίως, ἐάν $F(u,v) = 3u^2 - uv$ καί $G(u,v) = 2uv^2 + v^3$, νά ὑπολογισθῇ ἡ $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

11. Ἐάν $F(x,y,z) = x + 3y^2 - z^3$, $G(x,y,z) = 2x^2yz$ καί $H(x,y,z) = 2z^2 - xy$, νά ὑπολογισθῇ ἡ $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$.

12. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καθὼς καί αἱ ἐξισώσεις τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας.

i) $z = \text{τοξεφ}\frac{x+y}{1-xy}$ εἰς τό σημεῖον $(0,0,0)$

ii). $x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 2yz + x + y + 8 = 0$ εἰς τό σημεῖον $(-1,2,1)$

iii) $x = u\,\text{συν}\,v$, $y = u\,\text{ημ}\,v$, $z = 2v$ εἰς τό σημεῖον $(u,v) = (2, \frac{\pi}{2})$.

13. Εἰς ἑκάστην τῶν ἀκολούθων ἀσκήσεων ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα IV-3-1 δείξατε ὅτι ὑπάρχει μία περιοχή T: $|x-x_0| < h$, $|y-y_0| < h$, $|u-u_0| < k$, $|v-v_0| < k$ τοιαύτη, ὥστε ὅλα τά σημεῖα (x,y,u,v) τά ἀνήκοντα εἰς αὐτήν τήν περιοχήν καί ἐπαληθεύοντα τάς ἐξισώσεις $f(x,y,u,v) = 0$, $g(x,y,u,v) = 0$ εὑρίσκονται ἐπί τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῶν ἐπαληθευόντων τάς ἐξισώσεις:

$$u = f_1(x,y), \quad v = f_2(x,y),$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις f_1 καί f_2 εἶναι συνεχεῖς καί παραγωγίσιμοι διά $|x-x_0| < h$ καί $|y-y_0| < h$. Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί $f'_{1x}, f'_{1y}, f'_{2x}, f'_{2y}$ εἰς τό σημεῖον (x_0, y_0). Ἔστω δέ P_0 παριστᾷ τό (x_0, y_0, u_0, v_0).

α) $f = 2x - 3y + u - v = 0$, $g = x + 2y + u + 2v = 0$, $P_0 = (0,0,0,0)$

β) $f = x - 2y + u + v - 8 = 0$, $g = x^2 - 2y^2 - u^2 + v^2 - 4 = 0$, $P_0 = (3,-1,2,1)$

γ) $f = x^2 - y^2 + uv - v^2 + 3 = 0$, $g = x + y^2 + u^2 + uv - 2 = 0$, $P_0 = (2,1,-1,2)$

14. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό σύστημα: $f(x,y,z) \equiv x + y + z - 6 = 0$, $g(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 20 = 0$ ὁρίζει εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου $x_0 = 0$ δύο συναρτήσεις $y = \varphi(x)$ καί $z = \sigma(x)$ μέ $\varphi(0) = 4$ καί $\sigma(0) = 2$, τῶν ὁποίων ὑπάρχουσαι παράγωγοι αἱ ὁποῖαι ζητοῦνται νά ὑπολογισθοῦν.

15. Δείξατε ὅτι διά κάθε συνάρτησιν f δύο μεταβλητῶν x, y ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις $z=z(x,y)$ ὁριζομένη ὑπό τῆς ἐξισώσεως : $f(x^2-y^2, y^2-z^2)=0$ ἐπαληθεύει τήν σχέσιν :

$$y \cdot z \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot z \frac{\partial z}{\partial y} = x y .$$

16. Εἰς ἑκάστην τῶν κάτωθι ἀσκήσεων χρησιμοποιοῦντες τό θεώρημα IV - 3-1 καί διά τό ὁποῖον νά ἀποδείξετε ὅτι πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις του, δείξατε ὅτι ὑπάρχει μία περιοχή : $|x-x_0|<h$, $|y-y_0|<k$, $|z-z_0|<k$ τοιαύτη, ὥστε : πάντα τά σημεῖα (x,y,z) ταύτης τά ὁποῖα ἐπαληθεύουν τάς ἐξισώσεις :

$$f(x,y,z)=0, \quad g(x,y,z)=0$$

ἀνήκουν ἐπί τοῦ συνόλου τῶν σημείων πού ἐπαληθεύουν τάς ἐξισώσεις $y=f_1(x)$ καί $z=f_2(x)$, ὅπου αἱ f_1, f_2 εἶναι συνεχεῖς καί παραγωγίσιμοι διά $|x-x_0|<h$. Νά εὑρεθοῦν ἐν συνεχείᾳ αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης τῆς παριστομένης ὑπό τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων εἰς τό σημεῖον $(x_0, y_0=f_1(x_0), z_0=f_2(x_0))$.

Ἔστω δέ P_0 παριστᾷ τό σημεῖον (x_0, y_0, z_0).

α) $f(x,y,z) \equiv 2x+y-z+2=0$, $g(x,y,z) \equiv x+2y+z-1=0$, P_0 $(2,-1,1)$.

β) $f(x,y,z) \equiv x^2+2y^2-z^2-2=0$, $g(x,y,z) \equiv 2x-y+z-1=0$, P_0 $(2,1,-2)$.

γ) $f(x,y,z) \equiv x^3+y^3+z^3-3xyz-14=0$, $g(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-6=0$, P_0 $(2,-1,1)$.

δ) $f(x,y,z) \equiv \eta\mu(x+y)+z-\alpha=0$, $g(x,y,z) \equiv \eta\mu(x-y)+z-\beta=0$.

17. Ἐάν ἡ συνάρτησις $z=z(x,y)$ ὁρίζεται μέ πεπλεγμένη μορφή ἀπό τό σύστημα $z=\sigma(x,u)$, $x=\varphi(y,u)$, νά εὐφρασθοῦν αἱ z'_x, z'_y μέ τάς μερικάς παραγώγους τῶν σ, φ.

(18.) Ἐάν ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ὡς πρός t ἐξισώσεως $\frac{x}{\alpha+t}+\frac{y}{\beta+t}+\frac{z}{\gamma+t}=1$, νά ἀποδείξετε ὅτι :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho_1,\rho_2,\rho_3)} = -\frac{(\rho_2-\rho_3)(\rho_3-\rho_1)(\rho_1-\rho_2)}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}$$

Ὑπόδ: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι τρίτου βαθμοῦ καί ἐκ τῆς ὁποίας, ὡς γνωστόν, ἐάν ἔλθῃ εἰς τήν κανονικήν της μορφήν θά ἔχωμεν : $S_1=\rho_1+\rho_2+\rho_3=-(\alpha+\beta+\gamma-x-y-z)$

$$S_2=\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-(\beta+\gamma)x-(\gamma+\alpha)y-(\alpha+\beta)z$$

$$S_3=\rho_1\rho_2\rho_3=-\alpha\beta\gamma+\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z$$

Ἐκ τῆς σχέσεως :

$\frac{\partial(S_1,S_2,S_3)}{\partial(\rho_1,\rho_2,\rho_3)} = \frac{\partial(S_1,S_2,S_3)}{\partial(x,y,z)} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho_1,\rho_2,\rho_3)}$ εὔκολα ὑπολογίζομεν τήν Ἰακωβιανή $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho_1,\rho_2,\rho_3)}$ κ.τ.λ.

19. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό σύστημα:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,u) \equiv x+y+z+u-2=0 \\ F_2(x,y,z,u) \equiv x^2+y^2+z^2+u^2-6=0 \\ F_3(x,y,z,u) \equiv x^3+y^3+z^3+u^3-8=0. \end{cases}$$

ὁρίζει εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου $u_0=2$ τρεῖς συναρτήσεις $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$ μέ $F_i(x(u),y(u),z(u),u)=0$, $i=1,2,3$ καί μέ $x(2)=1$, $y(2)=-1$, $z(2)=0$, τῶν ὁποίων ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $x'(u)$, $y'(u)$, $z'(u)$ καί διά τάς ὁποίας ἰσχύουν: $x'(2)=-1$, $y'(2)=-\frac{1}{3}$, $z'(2)=1$.

20. Αἱ δύο ἐξισώσεις $2x=v^2-u^2$ καί $y=u\cdot v$ ὁρίζουν τά u καί v ὡς συναρτήσεις τῶν x καί y. Νά εὑρεθοῦν αἱ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

__Λύσις__: Παραγωγίζοντες ὡς πρός x τάς ἀνωτέρω ἐξισώσεις λαμβάνομεν: $2=2v\frac{\partial v}{\partial x}-2u\frac{\partial u}{\partial x}$, $0=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}$. Ἀκολούθως ἐπιλύοντες τό ἀνωτέρω σύστημα ὡς πρός $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ εὑρίσκομεν $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u}{u^2+v^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v}{u^2+v^2}$. Ὁμοίως παραγωγίζομεν τάς ἀνωτέρω ἐξισώσεις ὡς πρός y κ.τ.λ.

21. Ἔστω ἡ u ὁρίζεται ὡς συνάρτησις τῶν x καί y μέσω τῆς ἐξισώσεως: $u=F(x+u, yu)$. Νά εὑρεθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}$ καί $\frac{\partial u}{\partial y}$ συναρτήσει τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς F.

22. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: ἐάν $F(x,y)$ εἶναι μία θετικῶς ὁμογενής συνάρτησις πρώτου βαθμοῦ ὁμογενείας, τότε θά ἰσχύη:

$$x^2 \cdot F''_{xx} + 2xy\, F''_{xy} + y^2 F''_{yy} = 0.$$

23. Ἐάν $x=F(u,v,w)$, $y=G(u,v,w)$ καί $u=f(r,s)$, $v=g(r,s)$, $w=h(r,s)$, δείξατε ὅτι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)}\cdot\frac{\partial(v,w)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)}\cdot\frac{\partial(w,u)}{\partial(r,s)}.$$

24. Ἐξετάσατε ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι καί ἐν συνεχεία νά εὑρεθῆ ἡ σχέσις πού τάς συνδέει:

i) $\varphi_1 \equiv x^3+y^3+z^3-3xyz$, $\varphi_2 \equiv x+y+z$, $\varphi_3 \equiv x^2+y^2+z^2$

ii) $\varphi_1 \equiv 3x+2y-z$, $\varphi_2 \equiv x-2y+z$, $\varphi_3 \equiv x^2+2xy-xz$

iii) $\varphi_1 \equiv x^2+y^2-z$, $\varphi_2 = x^2-y^2$, $\varphi_3 \equiv 4x^2y^2-2z(x^2+y^2)+z^2$.

iv) $\varphi_1(x,y) \equiv e^{2xy^{-1}}$, $\varphi_2(x,y) \equiv \log \cdot yx^{-1}$ v) $\varphi_1(x,y) \equiv x-y$, $\varphi_2(x,y) \equiv xy$, $\varphi_3(x,y) \equiv x\cdot e^{y}$.

24ᵒ Ἔστω $f(x,y)$, $g(x,y,u)$ εἶναι τοιαῦται ὥστε $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}=0$, ὅπου $u=f(x,y)$. Τότε δείξατε ὅτι αἱ συναρτήσεις $f(x,y)$ καὶ $g(x,y,f(x,y))$ εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι.

25. Προσδιορίσατε τὴν παράμετρον λ οὕτως, ὥστε αἱ συναρτήσεις:

$\varphi_1(x,y,z) \equiv x^3+y^3+z^3+\lambda xyz$, $\varphi_2(x,y,z) \equiv x+y+z$, $\varphi_3(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-xy-yz-2x$

νὰ εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι.

26. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι: ἂν αἱ συναρτήσεις $\varphi(x,y)$, $\varphi(y,z)$ καὶ $\varphi(z,x)$ εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημέναι, τότε ἡ συνάρτησις $\varphi(x,x)$ εἶναι σταθερά.

<u>Ὑπόδειξις</u>: Λάβετε ὑπ' ὄψιν τὴν πρότασιν IV -4-1.

27. Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν $F(x+y-z, x^2+y^2)=0$ καὶ ἔστω $z=\varphi(x,y)$ ἡ συνάρτησις ἡ ὡριζομένη ὑπὸ πεπλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν. Δείξατε ὅτι, πληρουμένων ὡρισμένων καταλλήλων συνθηκῶν διαφορισιμότητος διὰ τὴν F ἡ συνάρτησις $z=\varphi(x,y)$ πληροῖ τὴν γραμμικὴν διαφ. ἐξίσωσιν $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=x-y$.

<u>Λύσις</u>: Θέτοντες $u=x+y-z$, $v=x^2+y^2$ ἡ ἐξίσωσις γράφεται $F(u,v)=0$ (1). Εἶναι δέ, $du=dx+dy-dz$ καὶ $dv=2xdx+2ydy$ καὶ $dz=z_x dx+z_y\, dy$. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν: $dF=0$ ἢ $F_u\, du+F_v\, dv=0$ (2) ἢ $F_u(dx+dy-dz)+F_v(2xdx+2ydy)=0$ (3) ἢ $F_u(dx+dy-z_x dx-z_y\, dy)+F_v(2xdx+2ydy)=0$ ἢ

$$(F_u-z_x F_u+2xF_v)\,dx+(F_u-z_y F_u+2yF_v)\,dy=0 \quad (4).$$

Ἐπειδὴ τὰ x καὶ y εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$F_u-z_x F_u+2xF_v=0,\ F_u-z_y F_u+2yF_v=0 \quad (5)$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (5) καὶ ἐφ' ὅσον $F_u\neq 0$ λαμβάνομεν:

$$z_x=\frac{F_u+2xF_v}{F_u},\quad z_y=\frac{F_u+2yF_v}{F_u} \qquad (6)$$

Ὅθεν,
$$x\cdot z_y-yz_x=x\cdot\left(\frac{F_u+2yF_v}{F_u}\right)-y\left(\frac{F_u+2xF_v}{F_u}\right)=x-y.$$

28. Δείξατε ὅτι ἡ λύσις τῆς διαφ. ἐξισώσεως $x\cdot z_x+y\cdot z_y=z$, εἶναι ἡ ὑπὸ πεπλεγμένη μορφὴ ὁριζομένη συνάρτησις $z=z(x,y)$ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $F\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right)=0$

Διάφοροι ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν Κεφαλαίων III καὶ IV

29. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ λύσεις τῆς διαφ. ἐξισώσεως τοῦ Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ τῆς μορφῆς $u=\sigma(x^2+y^2+z^2)$.

<u>Ὑπόδ</u>: Θέσατε $\rho^2=x^2+y^2+z^2$, ὅτε $u=\sigma(\rho)$, $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\sigma'(\rho)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\sigma'+4x^2\sigma''(\rho)$, κ.τ.λ.).

30. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $z=x^{\eta}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-\eta}\sigma\left(\frac{y}{x}\right)$ ἱκανοποιεῖ, δι' οἱασδήποτε συναρτήσεις φ καὶ σ τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\eta^2\cdot z.$$

31. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἡ ἐξίσωσις $x^3y+y^3x-1=0$ ὁρίζει διὰ κάθε $x\neq 0$ μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν ἔστω τὴν $y=\varphi(x)$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι φθίνουσα. Ἀκολούθως ὑπολογίσατε τὰ $\lim_{x\to 0}\varphi(x)$, $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

32. Δίδεται $V=F(x,y)$, $x=\frac{r}{2}(e^s+e^{-s})$, $y=\frac{r}{2}(e^s-e^{-s})$.
Δείξατε ὅτι: $V_{x^2}-V_{y^2}=V_{r^2}+\frac{1}{r}V_r+\frac{1}{r^2}V_{s^2}$

33. Ὑποθέτομεν ὅτι, $u=F(x,y,z)$ καὶ $z=f(x,y)$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος ὁ δίδων τὴν $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ἀπὸ ὅρους τῶν παραγώγων τῆς F (δηλ ἀπὸ τοὺς F_x, F_y, F_{x^2} κ.τ.λ.).
(<u>Ὑπόδ</u>: Θὰ εἶναι $\frac{\partial u}{\partial x}=F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}$ κ.τ.λ.).

34. Δίδεται ὅτι, $u=F(x,y)$, $x=e^s\text{συν}t$, $y=e^s\text{ημ}t$.
Δείξατε ὅτι: $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e^{2s}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$.

35. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f(x,y,z)$, διὰ τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι αὐτῆς ὡς πρὸς x,y,z μέχρι δευτέρας τάξεως. Ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν εἰς σφαιρικὰς συντεταγμένας ἤτοι: $x=\rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi$, $y=\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi$, $z=\rho\,\text{συν}\varphi$, ὅπου $\rho>0$, $\theta\in[0,2\pi)$, $\varphi\in(0,\pi)$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔκφρασις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ συναρτήσει τῶν ρ,θ,φ.

36. Ἐὰν θέσωμεν $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$ καὶ αἱ συναρτήσεις $f(u,v)$, $\varphi(u,v)$ ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial\varphi}{\partial u}$. Δείξατε ὅτι θὰ ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος.

$$\frac{d^2V}{du^2}+\frac{d^2V}{du^2}=\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

§1. ΤΟΠΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ: $f(x,y)$

Ἔστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x,y)$ ὡρισμένη εἰς ἓν ἀνοικτὸν ὑποσύνολον $U \subset \mathbb{R}^2$. Θὰ λέγωμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον $(x_0, y_0) \in U$ ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει ἕνα τοπικὸν μέγιστον (ἀντ. τοπικὸν ἐλάχιστον), ἐὰν ὑπάρχῃ μία περιοχὴ V τοῦ σημείου (x_0, y_0), περιεχομένη ἐντὸς τοῦ U, τοιαύτη ὥστε: διὰ κάθε $(x,y) \in U - \{(x_0,y_0)\}$ νὰ ἔχωμεν: $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ (ἀντ. $f(x,y) > f(x_0,y_0)$)

Ἕνα τοπικὸν μέγιστον ἢ τοπικὸν ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως καλεῖται ***τοπικὸν ἀκρότατον*** ἢ καὶ ***σχετικὸν ἀκρότατον*** ταύτης. Ἂν τὸ σύμβολον "$<$" ἀντικατασταθῆ ὑπὸ τοῦ "$\leq$", τότε ἔχομεν ἀντιστοίχους ὁρισμοὺς ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν

Ἡ μελέτη τῶν τοπικῶν ἀκροτάτων μιᾶς συναρτήσεως δύο, τριῶν ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν στηρίζεται εἰς τὸ ἀκόλουθον θεμελιῶδες θεώρημα, τὸ ὁποῖον διατυποῦται ἄνευ ἀποδείξεως.

Θεώρημα V-1-1. Ἔστω ἕνα συμπαγὲς σύνολον $E \subset \mathbb{R}^2$ καὶ f μία συνάρτησις ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ E, διάφορος σταθερᾶς, τότε ὑπάρχει ἓν (τουλάχιστον) σημεῖον τοῦ E εἰς τὸ ὁποῖον ἡ f λαμβάνει μεγίστην τιμὴν καὶ ἓν (τουλάχιστον) σημεῖον τοῦ E εἰς τὸ ὁποῖον ἡ f λαμβάνει ἐλαχίστην τιμήν.

Παρατηρήσεις: α) Τὸ Θεώρημα V-1-1 εἶναι μία γενίκευσις τοῦ θεωρήματος **VI**-5-2 τοῦ **A_1 Τόμου.**

β) Ἀνάλογα θεωρήματα δύνανται νὰ διατυπωθοῦν καὶ διὰ συναρτήσεις τριῶν, τεσσάρων ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν.

γ) Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον δύναται νὰ παρατηρηθῇ εἰς τὸ σύνορον τοῦ E. Οὕτω, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς, ὅπου τὸ διάστημα πρέπει νὰ εἶναι κλειστὸν (βλ. Παρατήρ. σελ. **236**, Τόμος A_1) τὸ σύνολον E πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ σύνορόν του, διὰ νὰ ἰσχύῃ τὸ συμπέρασμα τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.

Πρότασις V-1-1. Ἐὰν ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x,y)$, ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ $U \subset \mathbb{R}^2$, ἔχῃ ἕνα τοπικὸν ἀκρότατον εἰς τὸ σημεῖον [illegible] καὶ ἐὰν αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι

της $f(x,y)$ ὑπάρχουν εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0), τότε αἱ μερικαί παράγωγοι μηδενίζονται εἰς τό σημεῖον τοῦτο, ἤτοι:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0.$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδή ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ἔχει εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) σχετικόν ἀκρότατον, ἕπεται ὅτι καί ἡ συνάρτησις $\varphi(x) = f(x,y_0)$ θά ἔχῃ, προφανῶς, εἰς τό σημεῖον x_0 σχετικόν ἀκρότατον· συνεπῶς θά ἔχωμεν $\varphi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$.

Τό σημεῖον (x_0,y_0) διά τό ὁποῖον $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$ ἤ ὅπερ ἰσοδυνάμως $df(x_0,y_0) = 0$, καλεῖται ***στατικόν σημεῖον*** τῆς f.

Παρατηρήσεις: 1η/ Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι εἶναι ἀναγκαῖαι δέν εἶναι ὅμως καί ἱκαναί διά τήν ὕπαρξιν σχετικοῦ ἀκροτάτου. Τοῦτο φαίνεται ἀπό τό ἀκόλουθον παράδειγμα. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y) = x^2 - y^2$. Εἶναι δέ $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$. Ἐν τούτοις ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις δέν ἔχει εἰς τό σημεῖον $(0,0)$ σχετικόν ἀκρότατον, διότι ἡ διαφορά $f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2$ εἰς κάθε περιοχήν τῆς ἀρχῆς εἶναι θετική διά $|x| > |y|$ καί ἀρνητική διά $|x| < |y|$.

2α/ Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἐξάγομεν τό συμπέρασμα ὅτι τά σημεῖα ἀκροτάτου μιᾶς συναρτήσεως $f(x,y)$, ἐάν ὑπάρχουν, πρέπει νά ἀναζητηθοῦν μεταξύ τῶν λύσεων τοῦ συστήματος: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ καί $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$.

Δέν εἶναι ὅμως σημεῖα ἀκροτάτου τῆς $f(x,y)$ πᾶσαι αἱ λύσεις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος.

Παράδειγμα: 1ον/ Δίδεται ἡ συνάρτησις: $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x + 2$.

Ζητεῖται νά εὑρεθοῦν αἱ θέσεις, ἐάν ὑπάρχουν, τῶν τοπικῶν ἀκροτάτων της.

Λύσις: Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4$ καί $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Ἐπιλύοντες τό σύστημα $8x - 4 = 0$ καί $2y = 0$ εὑρίσκομεν τήν λύσιν $(x = \frac{1}{2}, y = 0)$. Ἤδη ἐξετάζομεν ἐάν τό σημεῖον $(\frac{1}{2}, 0)$ εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς συναρτήσεως.

Ἔχομεν $f(x,y) - f(\frac{1}{2},0) = 4x^2 + y^2 - 4x + 2 - 4\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} - 2 = (2x-1)^2 + y^2 > 0$.

Ἄρα εἰς τό σημεῖον $(\frac{1}{2}, 0)$ ἡ συνάρτησις παρουσιάζει τοπικόν ἐλάχιστον.

2ον/ Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y) = xy$ ὡρισμένη ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ χώρου $\mathbb{R}^2$. Ζητεῖται νά εὑρεθοῦν αἱ θέσεις τῶν τοπικῶν ἀκροτάτων αὐτῆς.

Λύσις: Τά σημεῖα εἰς τά ὁποῖα ἡ $f(x,y)$ παρουσιάζει ἀκρότατα θά ἀναζητηθοῦν μεταξύ

τῶν λύσεων τοῦ συστήματος: $\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0$ καί $\frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$

Ὅθεν ἡ μοναδική λύσις τοῦ συστήματος εἶναι ἡ (0,0). Ἐξετάζομεν τη διαφοράν: $f(x,y)-f(0,0)=xy$

Ἐάν $x>0, y>0$ ἤ $x<0, y<0$, τότε $f(x,y)>0$, ἐνῶ ἐάν $x>0, y<0$ ἤ $x<0, y>0$, τότε $f(x,y)<0$.

Ἄρα τό σημεῖον (0,0) δέν εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς $f(x,y)=xy$.

- Εἰς τήν κατωτέρω πρότασιν διατυποῦνται αἱ συνθῆκαι πού πρέπει νά πληροῦνται, ἵνα ἕνα σημεῖον εἶναι τοπικόν ἀκρότατον.

Πρότασις V−1-2. Ἔστω $f(x,y)$ μία πραγματική συνάρτησις ὡρισμένη ἐπί τοῦ $U \subset \mathbb{R}^2$ καί ἔστω $(x_0, y_0) \in U$. Ὑποθέτομεν ἐπί πλέον ὅτι ἡ f ἔχει μερικάς παραγώγους γ^{ης} τάξεως συνεχεῖς καί ὅτι: $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$.

Ἔστω
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Τότε:

i) Ἐάν $\Delta > 0$ καί $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0$, ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) τοπικόν ἐλάχιστον.

ii) Ἐάν $\Delta > 0$ καί $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0$, ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) τοπικόν μέγιστον.

iii) Ἐάν $\Delta < 0$ ἡ συνάρτησις f εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) δέν παρουσιάζει τοπικόν ἀκρότατον. (σημεῖον σάγματος, βλ. παρατηρήσεις σελ. 111).

iv) Ἐάν $\Delta = 0$, τότε δέν δυνάμεθα νά ἀποφανθῶμεν ἄν ἡ f παρουσιάζῃ εἰς τό σημεῖον (x_0, y_0) τοπικόν ἀκρότατον.

Ἀπόδειξις: Θέτομεν $r = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}$ καί $t = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$. Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τοῦ Taylor (σελίς 63) εἰς τήν συνάρτησιν $f(x,y)$ διά $\nu=2$ καί εἰς τό σημεῖον (x_0+h, y_0+k), ὑποθέτοντες ὅτι τά h, k εἶναι τοιαῦτα, ὥστε τό $(x_0+h, y_0+k) \in U$ ἔχομεν:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left(r h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t k^2\right) + r(h,k) \quad (1), \text{ ἔνθα}$$

$$r(h,k) = \frac{h^3}{3!} f'''_{x^3}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{k}{1!} f'''_{x^2 y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + \frac{h}{1!} \cdot \frac{k^2}{2!} f'''_{x y^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) +$$
$$+ \frac{k^3}{3!} \cdot f'''_{y^3}(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \ 0<\theta<1.$$

Ἐάν θέσωμεν $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$ θά εἶναι $h, k < \rho$. Πᾶσαι δέ αἱ μερικαί παράγωγοι τρίτης τάξεως

φράσσονται ὑπό ἑνός ἀριθμοῦ M, θά ἔχωμεν προφανῶς

$$|r(h,k)| < \frac{\rho^3}{3!}\cdot M + \frac{\rho^3}{2}\cdot M + \frac{\rho^3}{2}\cdot M + \frac{\rho^3}{3!}\cdot M = \frac{4\rho^3 M}{3}$$

Συνεπῶς, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{r(h,k)}{\rho^2} = 0$, δηλ. τό $\frac{r(h,k)}{h^2+k^2} \longrightarrow 0$, καθώς τό $(h,k) \longrightarrow (0,0)$.

Ἤδη ἄς ἀποδείξωμεν τό i):

Εἶναι $\Delta = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 > 0$ καί $r>0$, συνεπῶς ἡ κάτωθι τετραγωνική μορφή γράφεται:

$$\frac{1}{2}\,(rh^2 + 2\,shk + tk^2) = \frac{k^2}{2}\left[r\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2\cdot s\cdot\frac{h}{k} + t\right] > 0 \quad (2) \text{ δι' ὅλα τά } (h,k)\neq(0,0).$$

Ὅθεν, ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι εἰς μίαν περιοχήν τῆς ἀρχῆς αὐτή ἡ τετραγωνική μορφή εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ὅρου $r(h,k)$. Πρός τούτοις παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει θετικός ἀριθμός μ τοιοῦτος, ὥστε δι' ὅλα τά $(h,k)\neq(0,0)$ νά ἔχωμεν:

$$rh^2 + 2shk + tk^2 > \mu\,(h^2+k^2) \qquad (3)$$

ἤ $(r-\mu)\,h^2 + 2\,s\,hk + (t-\mu)\,k^2 > 0$ (4), δι' ὅλα τά $(h,k)\neq(0,0)$, ἤ

$$(r-\mu)\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2\cdot s\,\frac{h}{k} + (t-\mu) > 0 \qquad (4').$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης εἶναι μονίμως θετική δι' ὅλα τά μ ἀρκούντως μικρά, ἑπομένως θά πρέπει νά εἶναι:

$$\Delta_{4'} = \varphi(\mu) \equiv s^2 - (r-\mu)\cdot(t-\mu) < 0, \text{ δι' ὅλα τά } \mu \text{ ἀρκούντως μικρά}$$

Ἡ συνάρτησις $\varphi(\mu)$ ὡς πολυωνυμική εἶναι συνεχής καί λαμβάνει τήν ἀρνητικήν τιμήν $-\Delta<0$ διά $\mu=0$, συνεπῶς καί εἰς μίαν περιοχήν τοῦ μ αἱ τιμαί τῆς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως θά εἶναι ἀρνητικαί.

Ἔστω τώρα τό μ εἶναι εἷς θετικός ἀριθμός διά τόν ὁποῖον ἰσχύει ἡ (3). Τότε ἐπειδή $\frac{r(h,k)}{h^2+k^2} \longrightarrow 0$, καθώς τό $(h,k) \longrightarrow (0,0)$, δυνάμεθα νά εὕρωμεν μίαν περιοχήν V τοῦ σημείου $(0,0)$ τοιαύτην, ὥστε:

$$|r(h,k)| < \frac{1}{2}\,\mu\,(h^2+k^2) \quad (5) \text{ δι' ὅλα τά } (h,k)\in V\setminus\{(0,0)\}$$

Ἐκ τῶν (1), (3) καί (5) ἔχομεν τελικῶς:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) > \frac{1}{2}\,\mu\,(h^2+k^2) - |r(h,k)| > 0.$$

δι' ὅλα τά $(h,k)\in V\setminus\{(0,0)\}$. Ἄρα ἡ f ἔχει εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) ἕνα τοπικόν ἐλάχιστον.

Κατ' ἀναλογίαν ἀποδεικνύεται καί ἡ ii) περίπτωσις.

Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ iii):

Ἔστω $\Delta<0$ καί ἔστω $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{h}{\rho}$, $\eta\mu\theta = \frac{k}{\rho}$.

τότε,

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+y_0)=\frac{1}{2}\,\rho^2\cdot\left[r\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\,s\,\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta+t\eta\mu^2\theta+\sigma(\rho,\theta)\right] \qquad (6),$$

ὅπου $\lim_{\rho\to 0}\sigma(\rho,\theta)=0$, διά κάθε σταθερόν θ. Ἐπειδή $\Delta=rt-S^2<0$, δυνάμεθα νά εὕρωμεν θ_1, θ_2 τοιαῦτα, ὥστε ἡ παράστασις $\Pi(\theta)\equiv r\,\sigma\upsilon\nu^2\theta+2S\,\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta+t\eta\mu^2\theta$ νά εἶναι θετική ὅταν $\theta=\theta_1$ καί ἀρνητική ὅταν $\theta=\theta_2$.

Λόγω τῆς (6) καί τοῦ τελευταίου συμπεράσματος ἕπεται ὅτι, διά πολύ μικρόν θετικόν ρ ἡ ἔκφρασις $f(x_0+\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta, y_0+\rho\eta\mu\theta)-f(x_0,y_0)$ εἶναι θετική ὅταν $\theta=\theta_1$ καί ἀρνητική ὅταν $\theta=\theta_2$ καί κατά συνέπειαν ἡ f δέν ἔχει οὔτε ἕνα τοπικόν μέγιστον οὔτε ἕνα τοπικόν ἐλάχιστον.

Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ ιν):

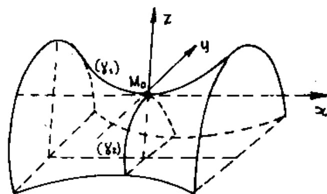
Ἐπειδή $rt-S^2=0$ ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\cdot k^2\cdot r\left(\frac{h}{k}+\frac{S}{r}\right)^2+r(h,k) \qquad (7)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (7) παρατηροῦμεν τό πρόσημον τῆς διαφορᾶς $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0,y_0)$ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσήμου τοῦ r καί τοῦ $r(h,k)$, ἤτοι ἐκ τοῦ προσήμου τῶν παραγώγων ἀνωτέρας τάξεως τῆς f.

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1η/ Ἔστω $\Delta=rt-s^2>0$, τότε αἱ ποσότητες r καί t εἶναι ὁμόσημοι, συνεπῶς ἐάν θεωρήσωμεν τάς συναρτήσεις $f(x,y_0)$ καί $f(x_0,y)$ αὗται θά πρέπει νά ἔχουν εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) τό αὐτό εἶδος ἀκροτάτου, δηλ. ἤ ἀμφότεραι νά παρουσιάζουν τοπικόν μέγιστον ἤ τοπικόν ἐλάχιστον (βλ. τόμος Α', σελίς 421).

Εἰς τήν περίπτωσιν καθ' ἥν $r<0$ καί $t>0$, (τότε καί $\Delta=rt-S^2<0$) ἐάν θεωρήσωμεν τάς συναρτήσεις $f(x,y_0)$ καί $f(x_0,y)$ ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω, ἐνῶ ἡ δευτέρα στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω. Ἐάν ἀναφερθῶμεν εἰς ἕνα τρισορθογώνιον σύστημα ἀξόνων οxyz καί θεωρήσωμεν τήν ἐν τῷ σχήματι 1 εἰκονιζομένην ἐπιφάνειαν, αἱ διά τοῦ σημείου M_0 διερχόμεναι καμπύλαι (γ_1) καί (γ_2), ἡ μέν μία στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω, ἡ δέ ἄλλη πρός τά κάτω. Τό σημεῖον δέ τοῦτο δέν εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου, **καλεῖται δέ τοῦτο *σημεῖον σάγματος*.**



Σχ. 1

2α/. Ἡ ἀναφερθεῖσα πρότασις ἀφορᾶ τήν εὕρεσιν ἀκροτάτων συναρτήσεως, ἥτις ἔχει

μεριμάς παραγώγους. Εἶναι δυνατόν νά ὑπάρχουν τοπικά ἀκρότατα μιᾶς συναρτήσεως χωρίς αὐτη νά ἔχη μερικάς παραγώγους. Ἡ ἀναζήτησις τούτων γίνεται βάσει τοῦ ὁρισμοῦ.

Παραδείγματα: 1ον/ Δίδεται ἡ συνάρτησις: $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$.

Νά εὑρεθοῦν αἱ θέσεις τῶν τοπικῶν ἀκροτάτων ταύτης.

Λύσις: Ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι ὡρισμένη καί ἔχει μερικάς παραγώγους γης τάξεως ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ χώρου $\mathbb{R}^2$.

Τά σημεῖα διά τά ὁποῖα ἡ $f(x,y)$ ἔχει τοπικά ἀκρότατα θά ἀναζητηθοῦν μεταξύ τῶν λύσεων τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2+3y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2+3x=0\end{aligned}\right\}$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν τάς λύσεις $(0,0)$ καί $(-1,-1)$

Ἐπί πλέον ἔχομεν: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$

Εἶναι δέ: $r=\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}=0,\ S=\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=3,\ t=\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}=0$

Ἐπομένως $\Delta=rt-S^2=-9<0$. Συνεπῶς τό σημεῖον $(0,0)$ δέν εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς $f(x,y)$. Διά δέ τό σημεῖον $(-1,-1)$ ἔχομεν:

$$r=\frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x^2}=-6,\ S=\frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x\partial y}=3,\ t=\frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial y^2}=-6$$

Ἐπομένως $\Delta=rt-S^2=(-6)(-6)-3^2=27>0$.

Ἄρα τό $(-1,-1)$ εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς $f(x,y)$ καί ἐπειδή $r=-6<0$ ἔχομεν μέγιστον. Εἶναι δέ τοῦτο τό $f(-1,-1)=+1$.

2ον/ Δίδεται ἡ συνάρτησις $f(x,y)=x^3+y^3-(1+x+y)^3$.

Νά εὑρεθοῦν αἱ θέσεις τῶν τοπικῶν ἀκροτάτων ταύτης.

Λύσις: Ἡ $f(x,y)$ εἶναι ὡρισμένη καί ἔχει μερικάς παραγώγους γης τάξεως ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ χώρου $\mathbb{R}^2$. Τά σημεῖα διά τά ὁποῖα ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ἔχει τοπικά ἀκρότατα θά τά ἀναζητήσωμεν μεταξύ τῶν λύσεων τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2-3(1+x+y)^2=0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2-3(1+x+y)^2=0\end{aligned}\right\}\ (1)$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (1) λαμβάνομεν τάς κάτωθι ρίζας:

$$\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right),\ (-1,-1),(1,-1),(-1,1).$$

Ἐπί πλέον δέ ἔχομεν: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6(1+y), \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6(1+x+y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6(1+x)$

Εἶναι δέ:

α) $r=\frac{\partial^2 f(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}{\partial x^2}=-4, S=\frac{\partial^2 f(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}{\partial x\partial y}=-2, t=\frac{\partial^2 f(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}{\partial y^2}=-4<0.$

Ἑπομένως $\Delta=rt-S^2=+12>0$. Κατά συνέπειαν τό σημεῖον $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ εἶναι θέσις τοπικοῦ μεγίστου τῆς f, εἶναι δέ τοῦτο ἴσον πρός $f(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})=-\frac{1}{9}$.

β) $r=\frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x^2}=0$, $S=6$, $t=0$ καί $\Delta=rt-S^2=-36<0$.

Ἄρα τό $(-1,-1)$ δέν εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς f.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί τά σημεῖα $(1,-1)$ καί $(-1,1)$ δέν εἶναι θέσεις τοπικῶν ἀκροτάτων τῆς f.

3ον/ Δίδεται ἡ συνάρτησις: $f(x,y)=x^2+y^4$

Νά εὑρεθοῦν αἱ θέσεις τῶν τοπικῶν ἀκροτάτων ταύτης.

<u>**Λύσις**</u>: Ἔχομεν $\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3$. Τά σημεῖα διά τά ὁποῖα ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ἔχει τοπικά ἀκρότατα θά τά ἀναζητήσωμεν μεταξύ τῶν λύσεων τοῦ συστήματος: $\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0$.
Τοῦτο δέ ἔχει τήν μοναδικήν λύσιν $x=y=0$.

Εἶναι δέ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2$ καί $r=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}=2, S=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=0, t=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}=0$.

Εἶναι δέ καί $\Delta=rt-S^2=0$. Πιθανῶς λοιπόν τό σημεῖον $(0,0)$ νά εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου. Πρός τούτοις καταφεύγομεν εἰς τόν ὁρισμόν.

Ἐξετάζομεν ἐάν ἡ διαφορά $f(x,y)-f(0,0)=x^2+y^4$ διατηρῆ πρόσημον εἰς μίαν περιοχήν V τοῦ $(0,0)$.

Πράγματι, διά κάθε $(x,y)\in V\setminus\{(0,0)\}$ εἶναι $f(x,y)-f(0,0)>0$, δηλ. $f(x,y)>f(0,0)$.

Συνεπῶς τό σημεῖον $(0,0)$ εἶναι θέσις τοπικοῦ ἐλαχίστου.

§2. <u>ΤΟΠΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</u>

Ἔστω ἡ πραγματική συνάρτησις f ὡρισμένη εἰς ἕν ὑποσύνολον U τοῦ χώρου $\mathbb{R}^q$.
Θά λέγωμεν ὅτι εἰς τό σημεῖον $x_0=\{\xi_1,\xi_2 \ldots \xi_q\}\in U$ ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει ἕνα

τοπικόν μέγιστον (άντ. τοπικόν ελάχιστον), εάν ύπάρχη μία περιοχή V τού σημείου x_0 περιεχομένη εντός τού U τοιαύτη, ώστε: διά κάθε

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in V \setminus \{x_0\} \text{ νά έχωμεν:}$$

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{άντ. } f(x) > f(x_0)).$$

Ένα τοπικόν μέγιστον ή τοπικόν ελάχιστον τής συναρτήσεως καλείται καί **τοπικόν ακρότατον** ταύτης.

Πρότασις V – 2-1. Εάν ή πραγματική συνάρτησις f ώρισμένη επί τού ανοικτού $U \subset \mathbb{R}^q$ έχη ένα τοπικόν ακρότατον εις τό σημείον $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q) \in U$ καί εάν αί πρώται μερικαί παράγωγοι τής f υπάρχουν εις τό σημείον x_0, τότε $\frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)}{\partial x_j} = 0$ διά κάθε $j = 1, 2, \dots, q$.

Απόδειξις: Επειδή ή f έχει ένα τοπικόν μέγιστον ή ελάχιστον εις τό x_0, διά $j = 1, 2, \dots, q$ ή πραγματική συνάρτησις $t \longrightarrow f(x_0 + t \cdot e_j)$, μέ πεδίον ορισμού τό σύνολον τών πραγματικών τιμών τού t διά τάς οποίας $x_0 + t \cdot e_j \in U$ έχει ένα τοπικόν μέγιστον ή ελάχιστον διά $t = 0$. Έστω $f(x_0)$ τοπικόν μέγιστον - αναλόγως εργαζόμεθα άν $f(x_0)$ είναι τοπικόν ελάχιστον - τότε υπάρχει περιοχή $U(x_0)$ περιεχομένη εντός τού $U \subset \mathbb{R}^q$ τοιαύτη, ώστε νά ισχύη: $f(x_0 + t \cdot e_j) \leqq f(x_0)$ διά κάθε $j = 1, 2, \dots, q$ καί κάθε t μέ $x_0 + t \cdot e_j \in U(x_0)$. Εκ τού ορισμού όμως τής μερικής παραγώγου έχομεν:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_j) - f(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0-0} \frac{f(x_0 + \lambda e_j) - f(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0+0} \frac{f(x_0 + \lambda e_j) - f(x_0)}{\lambda} \quad \text{διά κάθε } j = 1, 2, \dots, q.$$

Αλλά: $\lim\limits_{\lambda \to 0-0} \frac{f(x_0 + \lambda e_j) - f(x_0)}{\lambda} \geqq 0$ καί $\lim\limits_{\lambda \to 0+0} \frac{f(x_0 + \lambda e_j) - f(x_0)}{\lambda} \leqq 0$ διά κάθε $j = 1, 2, \dots, q$. Όθεν:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)}{\partial x_j} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_j) - f(x_0)}{\lambda} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

- Εκ τής ανωτέρω προτάσεως έπεται ότι, εάν ή f έχη πρώτας μερικάς παραγώγους εις έκαστον σημείον τού $U \subset \mathbb{R}^q$, τότε προκειμένου νά εύρωμεν τά σημεία $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ διά τά οποία έχομεν τοπικόν ακρότατον τής συναρτήσεως f αρκεί νά εύρωμεν τό σύνολον τών λύσεων τού συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\partial x_1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\partial x_q} = 0 \end{array}\right\}$$

καί εις τό σύνολον τών λύσεων αυτών θά αναζητήσωμεν τά σημεία εις τά οποία έχο-

μεν ἕνα τοπικόν ἀκρότατον τῆς f.

Διά νά δυνηθῶμεν ὅμως νά ἀποφανθῶμεν, ἄν μία λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εἶναι θέσις ἀκροτάτου διά τήν f, θά πρέπει νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας καί τάς μερικάς παραγώγους δευτέρας τάξεως. Κατωτέρω δίδομεν, ἄνευ ἀποδείξεως, μίαν πρότασιν (ἱκανήν συνθήκην) τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς f.

Πρότασις V-2-2. Ἔστω ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, $q \geq 3$ ὡρισμένη ἐπί ἑνός ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου $U \subset \mathbb{R}^q$, τῆς ὁποίας ὑπάρχουν ἐν U καί εἶναι συνεχεῖς αἱ μερικαί παράγωγοι ***μέχρι καί δευτέρας*** τάξεως καί ἔστω τό σημεῖον $\mathbf{x}_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q) \in U$ τό ὁποῖον εἶναι λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_q)}{\partial x_j} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, q$$

θέτομεν $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q)}{\partial x_i \partial x_j}$ (Ἰσχύει $a_{ij} = a_{ji}$),

καί διά $p = 1, 2, \ldots, q$ ἔστω ἡ ὁρίζουσα:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

τοιαύτη, ὥστε: $\Delta_1 = a_{11}$. Τότε:

α) Ἵνα ἡ f ἔχη ἕνα τοπικόν ἐλάχιστον εἰς τό σημεῖον $\mathbf{x}_0$, ἀρκεῖ αἱ ὁρίζουσαι $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$ νά εἶναι πᾶσαι θετικαί.

β) Ἵνα ἡ f ἔχη ἕνα τοπικόν μέγιστον εἰς τό σημεῖον $\mathbf{x}_0$, ἀρκεῖ αἱ ἀνωτέρω ὁρίζουσαι νά εἶναι ἐναλλάξ ἀρνητικαί καί θετικαί (ἤτοι ἡ συνάρτησις $-f$ νά παρουσιάζη τοπικόν ἐλάχιστον).

Παρατηρήσεις: 1η/ Ἄν διά τό σημεῖον $\mathbf{x}_0$ δέν πληροῦται μία τῶν ἀνισοτήτων τῆς περιπτώσεως α) ἤ β) δέν θά πρέπει νά συμπεραίνωμεν, ὅτι τοῦτο δέν εἶναι θέσις ἀκροτάτου. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ τελική διαπίστωσις θά γίνεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁρισμοῦ (βλέπε κατωτέρω παράδειγμα).

2α/ Εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν μεταβλητῶν $f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3$, ἡ ἀνωτέρω ἱκα-

νή συνθήκη τοπικοῦ ἀκροτάτου εἰς ἕν σημεῖον $(x_0, y_0, z_0) \in U$ διατυποῦται ὡς κάτωθι:

α) <u>Διά τό ἐλάχιστον</u>:

$$f'_x(x_0,y_0,z_0) = f'_y(x_0,y_0,z_0) = f'_z(x_0,y_0,z_0) = 0$$

καί

$$f''_{xx} \equiv f''_{x^2}(x_0,y_0,z_0) > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} > 0. \qquad (1)$$

β) <u>Διά τό μέγιστον</u>:

$$f'_x(x_0,y_0,z_0) = f'_y(x_0,y_0,z_0) = f'_z(x_0,y_0,z_0) = 0$$

καί

$$f''_{xx} \equiv f''_{x^2}(x_0,y_0,z_0) < 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} < 0.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά εὑρεθοῦν τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3yz + 3zx$$

<u>Λύσις</u>: Ἐπιλύομεν τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + 3y + 3z = 0 \\ f'_y &= 3y^2 + 3z + 3x = 0 \\ f'_z &= 3z^2 + 3x + 3y = 0 \end{aligned}\right\}$$

Τοῦτο δέ ἔχει τάς λύσεις $(0,0,0)$ καί $(-2,-2,-2)$.

Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τάς μερικάς παραγώγους β^{ας}-τάξεως τῆς f. Αὗται εἶναι:

$$f''_{x^2} = 6x, \; f''_{y^2} = 6y, \; f''_{z^2} = 6z, \; f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = 3.$$

α) Εἰς τό σημεῖον $(0,0,0)$ ἔχομεν τάς τιμάς τῶν μερικῶν παραγώγων:

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = f''_{z^2} = 0 \quad \text{καί} \quad f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = 3$$

Εἶναι δέ:

$$\Delta_1 = 0, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54$$

Διά τό $(0,0,0)$ παρατηροῦμεν ὅτι: $\Delta_1 = f''_{xx} = 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 > 0$, ἄρα δέν ἐφαρμόζονται αἱ ἱκαναί συνθῆκαι καί ἑπομένως ἡ πρότασις V −2-1 (βλέπε σχετικῶς καί ἀνωτέρω παρατήρησιν 1) δέν μᾶς πληροφορεῖ ἄν τό σημεῖον $(0,0,0)$ εἶναι ἤ δέν εἶναι θέσις ἀκροτάτου. Θά ἐξετάσωμεν τοῦτο τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁρισμοῦ. Θά ἐξετάσωμεν δηλαδή ἄν

(1) *Οἱοσδήποτε τῶν συμβολισμῶν f''_{x^2} ἤ f_{xx} ἤ f''_{xx} ἤ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ εἶναι δόκιμος καί θά χρησιμοποιῆται ἀδιακρίτως.*

ὑπάρχῃ περιοχή V τοῦ σημείου (0,0,0) ἐντός τῆς ὁποίας ἡ διαφορά:

$$f(x,y,z) - f(0,0,0) = x^3+y^3+z^3+3xy+3yz+3zx$$

διατηρῇ πρόσημον. Εἰς οἱανδήποτε ὅμως περιοχήν τοῦ (0,0,0) ὑπάρχουν σημεῖα (x_0,y_0,z_0) καί (x'_0,y'_0,z'_0), ὥστε νά ἔχωμεν:

$$f(x_0,y_0,z_0) - f(0,0,0) > 0, \quad f(x'_0,y'_0,z'_0) - f(0,0,0) < 0.$$

Ἄρα ἡ διαφορά δέν διατηρεῖ πρόσημον καί τό (0,0,0) δέν εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς f.

β) Εἰς τό σημεῖον (-2,-2,-2) ἔχομεν:

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = f''_{z^2} = -12 \quad \text{καί} \quad f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = 3$$

Εἶναι δέ:

$$\Delta_1 = -12 < 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & 3 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 135 > 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & 3 \\ 3 & 3 & -12 \end{vmatrix} = -1350 < 0.$$

Συνεπῶς, κατά τήν προηγουμένην πρότασιν, εἰς τό ἐν λόγῳ σημεῖον (-2,-2,-2) ἔχομεν τοπικόν μέγιστον. Εἶναι δέ τοῦτο $f(-2,-2,-2) = 12$.

§ 3. ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΔΙΔΟΜΕΝΗΣ ΥΠΟ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΝ ΜΟΡΦΗΝ

I. Τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $f(x,y) = 0$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $f(x,y) = 0$ (1). Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ἔχει συνεχεῖς παραγώγους μέχρι ***δευτέρας τάξεως***.

Θεωροῦμεν τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων: $f(x,y) = 0, \ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ (2)

καί ἔστω (x_0,y_0) μία λύσις τοῦ συστήματος (2), διά τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Ἐπειδή $f(x_0,y_0) = 0$ καί $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$, συμφώνως πρός τό θεώρημα IV-1-1 τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων, ἡ ἐξίσωσις (1) ὁρίζει μία μόνον συνάρτησιν εἰς μίαν περιοχήν τοῦ (x_0,y_0), ἔστω τήν $y = \varphi(x)$, καί δια τήν ὁποίαν ἔχομεν $y_0 = \varphi(x_0)$.

Εἶναι δέ τότε:

$$y'_{x=x_0} = \varphi'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)} = 0.$$

Ἤτοι, τό σημεῖον $(x_0, y_0 = \varphi(x_0))$, πιθανόν νά εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου.

Ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς $y=\varphi(x)$ δίδεται, ὡς γνωστόν (βλ. σελ. 82), ὑπό τοῦ τύπου:

$$y''=\varphi''(x)=-\frac{(f'_y)^2 f''_{x^2}-2f'_x\cdot f'_y\cdot f''_{xy}+(f'_x)^2 f''_{y^2}}{(f'_y)^3}$$

Εἶναι δέ λόγω τῆς (2)

$$\varphi''(x_0)=-\frac{f''_{x^2}(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$$

Ἑπομένως: 1ον/ Ἐάν $\varphi''(x_0)>0 \Longleftrightarrow f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f'_y(x_0,y_0)<0$, τότε τό σημεῖον x_0 εἶναι θέσις τοπικοῦ ἐλαχίστου τῆς $y=\varphi(x)$, ἡ δέ τιμή του εἶναι $y_{min}=\varphi(x_0)=y_0$.

2ον/ Ἐάν $\varphi''(x_0)<0 \Longleftrightarrow f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f'_y(x_0,y_0)>0$, τότε τό σημεῖον x_0 εἶναι θέσις τοπικοῦ μεγίστου τῆς $y=\varphi(x)$, ἡ δέ τιμή του εἶναι $y_{max}=\varphi(x_0)=y_0$.

3ον/ Ἐάν $\varphi''(x_0)=0 \Longleftrightarrow f''_{x^2}(x_0,y_0)=0$, τότε δέν δυνάμεθα νά ἀποφανθῶμεν διά τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $y=\varphi(x)$ καί οὕτω ἐργαζόμεθα μέ τάς παραγώγους ἀνωτέρας τάξεως τῆς $\varphi(x)$, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν καί αἱ μερικαί παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως τῆς $f(x,y)$.

II. Τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=0$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $f(x,y,z)=0$ (1) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)$ ἔχει μερικάς παραγώγους μέχρι ***δευτέρας*** τάξεως συνεχεῖς.

Θεωροῦμεν τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$f(x,y,z)=0,\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

καί ἔστω (x_0,y_0,z_0) μία λύσις αὐτοῦ, διά τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν $\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\neq 0$.

Συμφώνως πρός τό Θεώρημα IV - 2-1β τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων ὁρίζεται μία συνάρτησις ἡ $z=\varphi(x,y)$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου $(x_0,y_0,z_0=\varphi(x_0,y_0))$.

Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν τάς μερικάς παραγώγους $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ εἰς τήν θέσιν (x_0,y_0).

Εἶναι $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}$ καί

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(f'_z)^2 f''_{x^2}-2f'_x\cdot f'_z\cdot f''_{xz}+(f'_x)^2 f''_{z^2}}{(f'_z)^3}$$

Εἰς δέ τήν θέσιν (x_0,y_0,z_0) θά ἔχωμεν, λόγω τῆς (2):

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=-\frac{f''_{x^2}(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Ἀναλόγως δέ εὑρίσκομεν:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=-\frac{f''_{xy}(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)} \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=-\frac{f''_{y^2}(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Συμφώνως πρός τά ἐκτεθέντα εἰς τήν § 1 αἱ συνθῆκαι, ἵνα εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) ἡ $z=\varphi(x,y)$ ἔχῃ:

1^{ov}/ <u>Τοπικόν ἐλάχιστον εἶναι</u>:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} > 0 \quad \underline{\text{καί}} \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0$$

Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι, λόγω τῶν (3), ἰσοδυναμοῦν μέ τάς κάτωθι:

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f_{y^2} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} > 0 \quad \underline{\text{καί}} \quad f''_{x^2} \cdot f'_z \Big|_{(x_0,y_0,z_0)} < 0$$

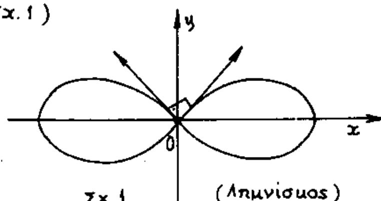
2^{ov}/ <u>Τοπικόν μέγιστον εἶναι</u>:

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f_{y^2} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} > 0 \quad \underline{\text{καί}} \quad f''_{x^2} f'_z \Big|_{(x_0,y_0,z_0)} > 0$$

3^{ov}/ Ἐάν

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix} = 0,$$ <u>τότε διά τήν ἐξακρίβωσιν ἀκροτάτου χρειαζόμεθα τάς μερικάς παραγώγους ἀνωτέρας τάξεως τῆς</u> $f(x,y,z)$, <u>ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν αὗται</u>.

<u>Παραδείγματα</u>: 1^{ov}/ Ὑπολογίσατε τά ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων, αἵτινες ὁρίζονται ὑπό τῆς ἐξισώσεως: $f(x,y) = y^4 - 8x^2 + x^4 = 0$ (1) (βλ. Σχ. 1)



Σχ. 1 (Λημνίσκος)

<u>Λύσις</u>: Εἶναι:

$\frac{\partial f}{\partial x} = -16x + 4x^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$.

Τό σύστημα:

$f(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ἔχει τάς λύσεις:

$(x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{4})$, $(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{4})$, $(x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{4})$ καί $(x = 0, y = 0)$.

Διά τάς τέσσαρας πρώτας λύσεις εἶναι $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4})} \neq 0$.

Ἐπομένως εἰς τήν περιοχήν ἑκάστης τῶν τεσσάρων ἀνωτέρω λύσεων ἀντιστοιχεῖ καί μία συνάρτησις $y = \varphi(x)$.

Ἐν συνεχείᾳ ἐξετάζομεν τά κάτωθι:

Ἡ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 + 12x^2$ καί $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(+\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$.

Ὅθεν, τό σημεῖον $(+\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{4})$ εἶναι θέσις τοπικοῦ μεγίστου, εἶναι τοῦτο $y_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν διά τά σημεῖα:

$(+\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ θέσις ἐλαχίστου μέ $y_{min} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

$(-\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{4})$ θέσις μεγίστου μέ $y_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ θέσις ἐλαχίστου μέ $y_{min} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

Τό σημεῖον (0,0) δέν εἶναι θέσις ἀκροτάτου.

2ον/ Ὑπολογίσατε τά ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων, αἵτινες ὁρίζονται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0 \quad (1)$$

<u>**Λύσις**</u>: Εἶναι: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + 4z + 2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$

Τό σύστημα: $$f(x,y,z) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0 \quad (2)$$

ἔχει τήν μοναδικήν λύσιν $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = -1)$.

Ὅθεν, ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπιλύεται μονοσημάντως εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, ἔστω δέ $z = \varphi(x,y)$ ἡ οὕτως ὁριζομένη πεπλεγμένη συνάρτησις τοιαύτη, ὥστε $z_0 = \varphi(0,0) = -1$.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix}_{(0,0,-1)} = 4 > 0 \text{ καί } f''_{x^2} \cdot f'_z \Big|_{(0,0,-1)} = 2 > 0.$$

Ὅθεν τό σημεῖον (0,0) εἶναι θέσις τοπικοῦ μεγίστου τῆς $z = \varphi(x,y)$, εἶναι δέ τοῦτο: $z_{max} = \varphi(0,0) = -1$.

§4. <u>ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΑΣ</u>

Ἔστω μία πραγματική συνάρτησις $f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, $q = 2,3\ldots$ ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον U τοῦ $\mathbb{R}^q$, τῆς ὁποίας αἱ μεταβληταί δέν εἶναι ἀνεξάρτητοι, ἀλλά ἐπαληθεύουν τάς p ἐξισώσεις $(p < q)$:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0,\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0, \ldots, \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0, \qquad (1)$$

ἔνθα αἱ πραγματικαί συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ εἶναι ὡρισμέναι ἐπί τοῦ συνόλου $U \subset \mathbb{R}^q$.

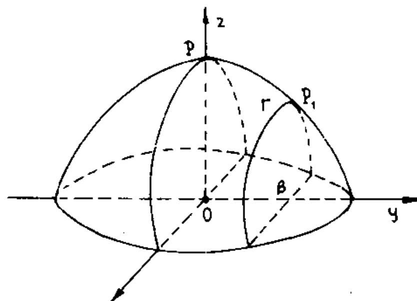
Ἔστω τό σύνολον:

$$U_0 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q : \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, p\}$$

καί ἕν σημεῖον $\mathbf{x}_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q) \in U_0$.

Διάφορα προβλήματα όδηγοῦν εἰς ἀναζήτησιν τῶν ἀκροτάτων τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως, ὡς ἀνωτέρω ἡ f, ὑποκειμένην εἰς μίαν ἢ περισσοτέρας ἀπό τάς <u>δεσμευτικάς συνθήκας</u> (1). Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς λέγομεν, ὅτι πρόκειται περί <u>δεσμευμένων τοπικῶν ἀκροτάτων</u> (ἀκροτάτων <u>ὑπό συνθήκας</u>), ἐν ἀντιδιαστολῇ πρός τά ἀκρότατα τά ὁποῖα διε πραγματεύθημεν μέχρι τοῦδε καί τά ὁποῖα, πρός διάκρισιν, καλοῦνται ***ἐλεύθερα*** ἀκρότατα.

Διά νά καταστῇ σαφής ἡ διάκρισις μεταξύ τοῦ ἐλευθέρου καί τοῦ ὑπό συνθήκην ἀκροτάτου, θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.



Τό μέγιστον τῆς f εἶναι τό σημεῖον P, ἐνῶ τό μέγιστον ταύτης ὑπό τήν συνθήκην:

$$y=\beta\,,\ \text{ὅπου}\ \ 0<\beta<1$$

εἶναι τό σημεῖον P_1 (βλ. ἔναντι σχῆμα).

Γεωμετρικῶς τό σημεῖον P_1 εἶναι ἕν σημεῖον τῆς καμπύλης Γ, τό ὁποῖον ἔχει μεγίστην <u>κατηγμένην</u>.

Κατωτέρω δίδομεν τόν ὁρισμόν τοπικοῦ ἀκροτάτου μιᾶς συναρτήσεως $f(x_1,x_2,\dots,x_q)$ ὑπό συνθήκην καί ἐν συνεχείᾳ διατυποῦμεν, ἄνευ ἀποδείξεως, μίαν ἀναγκαίαν συνθήκην ἀκροτάτου ὑπό συνθήκην.

<u>Ὁρισμός V-4-1.</u> *Θά λέγωμεν ὅτι τό σημεῖον* $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q)=x_0\in U_0$[1] *εἶναι μία θέσις (τοπικοῦ) μεγίστου,* ἀντιστοίχως (τοπικοῦ) *ἐλαχίστου, τῆς συναρτήσεως* $f:U_0\subset\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}$ *ὑπό τάς συνθήκας:* $\varphi_j(x_1,x_2,\dots,x_q)=0,\ j=1,2,\dots,p$, ***τότε καί μόνον τότε, ἄν ὑπάρχῃ περιοχή*** V ***τοῦ σημείου*** $x_0=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q)$ ***τοιαύτη, ὥστε: διά κάθε*** $x\in V\cap U_0$ ***νά ἰσχύῃ:***

$$f(x_1,x_2,\dots,x_q)\leq f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q),\ \text{ἀντιστοίχως}\ f(x_1,x_2,\dots,x_q)\geq f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q)$$

Ἡ τιμή $f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q)$ καλεῖται τότε ἕν μέγιστον, ἀντιστοίχως ἕν ἐλάχιστον, ὑπό τάς συνθήκας τάς καθοριζομένας ὑπό τῶν: $\varphi_j(x_1,x_2,\dots,x_q)=0$ μέ $j=1,2,\dots,p$.

Τό πρόβλημα τό ὁποῖον θά μᾶς ἀπασχολήσῃ εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον εἶναι ἡ ἀναζήτησις καί εὕρεσις τῶν θέσεων τῶν ἀκροτάτων τιμῶν τῆς συναρτήσεως $f(x_1,x_2,\dots x_q)$ ὑποκειμένην εἰς τάς δεσμευτικάς συνθήκας τάς καθοριζομένας ὑπό τῶν:

$$\varphi_j(x_1,x_2,\dots,x_q)=0,\ j=1,2,\dots,p. \qquad (p<q)$$

<u>Μία μέθοδος διά τήν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων τοῦ ἀνωτέρω</u> εἴδους εἶναι γνωστή ὡς

1) Τό $U_0=\{(x_1,x_2,\dots x_q)\in\mathbb{R}^q : \varphi_j(x_1,x_2\dots x_q)=0,\ j=1,2,\dots p\}$

<u>**Μέθοδος τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange**</u> (ἀναγκαία συνθήκη ἀκροτάτου ὑπό συνθήκας). Αὕτη ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστω μία πραγματική συνάρτησις $f(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ ὡρισμένη ὡς ἀνωτέρω, τῆς ὁποίας ὑπάρχουν ἐν U αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,q$ καί εἶναι συνεχεῖς καί αἱ πραγματικαί συναρτήσεις $\varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_q)$, $j=1,2,\ldots,p$ μέ $p<q$, τῶν ὁποίων ὑπάρχουν ἐπίσης ἐν U αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$, ${}_{j=1,2,\ldots,p}^{i=1,2,\ldots,q}$ καί εἶναι συνεχεῖς. Σχηματίζομεν τήν βοηθητικήν συνάρτησιν:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_q,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)=f(x_1,x_2,\ldots,x_q)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_q),$$

ὅπου λ_j, $j=1,2,\ldots,p$ προσδιοριστέοι πραγματικοί ἀριθμοί (= <u>πολλαπλασιασταί τοῦ Lagrange</u>) καί λαμβάνομεν τό σύστημα:

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}=0, & i=1,2,\ldots,q \\ \varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_q)=0, & j=1,2,\ldots,p \end{cases}$$

Ἔστω τώρα ὅτι <u>ἕν σημεῖον</u> $x_0=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_q)\in U$ <u>εἶναι θέσις μεγίστου ἤ ἐλαχίστου διά τήν f ὑπό τάς συνθήκας</u>: $\varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_q)=0$, $j=1,2,\ldots,p$. <u>Τότε ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ τοιοῦτοι ὥστε τό σημεῖον</u> $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_q,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$ <u>νά εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος</u> (Σ).

<u>**Παρατηρήσεις:**</u> **1η** Τό σύστημα (Σ) ἀναλυτικώτερον γράφεται:

$$(\Sigma')\quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_p\dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}+\cdots+\lambda_p\dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_q}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_q}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_q}+\cdots+\lambda_p\dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_q}=0 \\ \varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_q)=0,\ \varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_q)=0,\ldots,\ \varphi_p(x_1,x_2,\ldots,x_q)=0 \end{array}\right\}$$

Τό ἀνωτέρω σύστημα (Σ') εἶναι ἕν σύστημα μέ $q+p$ ἀγνώστους $x_1,x_2,\ldots,x_q,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ καί $q+p$ ἐξισώσεις. Ἐάν $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_q,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$ εἶναι μία λύσις αὐτοῦ, τό σημεῖον $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_q)$ εἶναι ἐνδεχόμενον νά εἶναι θέσις ἀκροτάτου τῆς f. Ἄν τό σύστημα δέν ἔχῃ λύσιν, τότε ἡ f δέν λαμβάνει ἀκροτάτας τιμάς εἰς τό σύνολον U. Εἰς τήν πρᾶξιν ἀπαλείφομεν τούς ἀγνώστους λ_j, $j=1,2,\ldots,p$ καί λύομεν ἕν σύστημα μέ q ἐξισώσεις καί ἀγνώστους τούς $x_1,x_2,\ldots,x_q$.

2ο) Εἰς τὴν πρᾶξιν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὅτι θέλομεν νά εὕρωμεν τάς ἀκροτάτας τιμάς (μέγιστα καί ἐλάχιστα) μιᾶς συναρτήσεως $f(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ ὑποκειμένην εἰς τάς δεσμευτικάς συνθήκας τάς καθοριζομένας ὑπό τῶν:

$$\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_q)=0,\ \ \varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_q)=0,\ldots,\ \varphi_p(x_1,x_2,\ldots,x_q)=0$$

Τότε: α) Σχηματίζομεν τήν συνάρτησιν:

$$F(x_1,\ldots,x_q,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)=f(x_1,x_2,\ldots,x_q)+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_p\varphi_p$$

μέ παραμέτρους $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$.

β) Μηδενίζομεν τάς μερικάς παραγώγους τῆς F ὡς πρός τάς $q+p$ μεταβλητάς: $x_1,x_2,\ldots,x_q,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$, ἤτοι:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\ldots,\ \frac{\partial F}{\partial x_q}=0,\ \frac{\partial F}{\partial\lambda_1}=\varphi_1=0,\ \frac{\partial F}{\partial\lambda_2}=\varphi_2=0,\ldots,\frac{\partial F}{\partial\lambda_p}=\varphi_p=0.$$

γ) Ἐπιλύομεν μετά ταῦτα τό σύστημα τοῦτο τῶν $q+p$ ἐξισώσεων μέ τούς $q+p$ ἀγνώστους: $x_1,x_2,\ldots,x_q,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$.

δ) Ἄν $\mathbf{x}_0\equiv(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_q,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$ εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος τούτου, τότε τό σημεῖον $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_q)$ εἶναι ἐνδεχόμενον νά εἶναι μία θέσις ἀκροτάτου τῆς f ὑπό τήν συνθήκην (1). Ἀπομένει βεβαίως ὁ ἔλεγχος τοῦ ἐάν ἕν ὡς ἄνω εὑρεθέν σημεῖον εἶναι ἤ ὄχι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου καί εἰς καταφατικήν περίπτωσιν ποῖον τό εἶδος τοῦ ἀκροτάτου.

Ἐπειδή εἰς τάς ἐφαρμογάς συνήθως παρουσιάζονται αἱ περιπτώσεις $(q=3,p=2)$, $(q=3,p=1)$ ἀναφέρομεν κατωτέρω, ἄνευ ἀποδείξεως, δύο σχετικάς προτάσεις αἱ ὁποῖαι δίδουν ἱκανάς συνθήκας, ἵνα μία λύσις τοῦ συστήματος (Σ) εἶναι θέσις ἀκροτάτου τῆς f.

Πρότασις V-4-1. Ἔστωσαν ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον U τοῦ R^3 μέ μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ U καί αἱ συνθῆκαι: $\varphi_1(x,y,z)=0,\ \ \varphi_2(x,y,z)=0$ (σ)

Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν: $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)$.

Ἔστω:

$$\Delta=\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & \varphi_{1x} & \varphi_{2x} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & \varphi_{1y} & \varphi_{2y} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & \varphi_{1z} & \varphi_{2z} \\ \varphi_{1x} & \varphi_{1y} & \varphi_{1z} & 0 & 0 \\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} & \varphi_{2z} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

καί $\mathbf{x}_0\equiv(x_0,y_0,z_0,\lambda_1,\lambda_2)$ μία λύσις τοῦ συστήματος $F'_x=0,\ F'_y=0,\ F'_z=0,\ F'_{\lambda_1}=0,\ F'_{\lambda_2}=0.$

τότε:

i) Ἐάν $\Delta > 0$ διά μίαν λύσιν τοῦ συστήματος, τότε ἡ λύσις εἶναι θέσις ἐλαχίστου διά τήν f.

ii) Ἐάν $\Delta < 0$ διά μίαν λύσιν τοῦ συστήματος, τότε ἡ λύσις εἶναι θέσις μεγίστου διά τήν f.

→ **Ἐφαρμογή:** Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα τῆς καμπύλης:

$$\varphi_1(x,y,z) \equiv xz+yz+2=0,\ \varphi_2(x,y,z) \equiv xy-1=0$$

τά ὁποῖα ἀπέχουν ἀπό τήν ἀρχήν (0,0,0) τήν ἐλαχίστην ἤ μεγίστην ἀπόστασιν.

Λύσις: Πρέπει νά εὑρεθοῦν τά ἀκρότατα τῆς $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ἤ τῆς $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, ὅταν $\varphi_1(x,y,z)=0$ καί $\varphi_2(x,y,z)=0$.

Σχηματίζομεν τήν βοηθητικήν συνάρτησιν:

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(xz+yz+2)+\lambda_2(xy-1).$$

Πιθαναί θέσεις ἀκροτάτων τῆς f εἶναι αἱ λύσεις τοῦ συστήματος:

$$F'_x=0,\ F'_y=0,\ F'_z=0,\ F'_{\lambda_1}=0,\ F'_{\lambda_2}=0$$

Τό σύστημα αὐτό δέχεται τάς κάτωθι λύσεις:

α) $x=1,\ y=1,\ z=-1,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$

β) $x=-1,\ y=-1,\ z=1,\ \lambda_1'=1,\ \lambda_2=-1$.

Θά ἐξετάσωμεν τώρα τό πρόσημον τῆς ὁριζούσης Δ, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τήν ἀνωτέρω πρότασιν διά κάθε λύσιν.

Διά τήν λύσιν α) εἶναι: $\Delta=24>0$ καί συνεπῶς τό σημεῖον (1,1,-1) εἶναι θέσις τοπικοῦ ἐλαχίστου. Τό τοπικόν ἐλάχιστον τῆς f εἶναι 3 καί τῆς $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ εἶναι $\sqrt{3}$.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι καί εἰς τήν δευτέραν λύσιν ἡ συνάρτησις παρουσιάζει τοπικόν ἐλάχιστον: $f(-1,-1,1)=3$.

Πρότασις V-4-2. Ἔστωσαν ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὡρισμένη εἰς ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον U τῆς $\mathbb{R}^3$ μέ μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ U καί ἡ συνθήκη: $\varphi(x,y,z)=0$.

Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν: $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\,\varphi(x,y,z)$.

Ἔστωσαν αἱ ὁρίζουσαι:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & \varphi_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & \varphi_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & \varphi_y \\ F_{zy} & F_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_y & \varphi_z & 0 \end{vmatrix}$$

καί $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ μία λύσις τοῦ συστήματος: $F'_x = 0,\ F'_y = 0,\ F'_z = 0,\ F'_\lambda = 0$.

Τότε:

i) Ἐάν διά μίαν λύσιν τοῦ συστήματος εἶναι: $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0$, τότε ἡ λύσις εἶναι θέσις ἐλαχίστου διά τήν f.

ii) Ἐάν διά μίαν λύσιν τοῦ συστήματος εἶναι: $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0$, τότε ἡ λύσις εἶναι θέσις μεγίστου διά τήν f.

Ἐφαρμογή: Νά εὑρεθοῦν τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

ὑπό τήν συνθήκην: $\varphi(x,y,z) = x + y + z + 1 = 0$.

Λύσις: Α΄ τρόπος. Σχηματίζομεν τήν βοηθητικήν συνάρτησιν:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z + 1),$$

ὅπου λ προσδιοριστέος πραγματικός ἀριθμός καί θεωροῦμεν τό σύστημα:

$$F'_x = 0,\ F'_y = 0,\ F'_z = 0,\ F'_\lambda = 0,$$

ἤτοι τό σύστημα: $2x + \lambda = 0,\ 2y + \lambda = 0,\ 2z + \lambda = 0,\ x + y + z + 1 = 0$.

Τό σύστημα τοῦτο δέχεται τήν μοναδικήν λύσιν:

$$x = -\frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3},\ z = -\frac{1}{3},\ \lambda = \frac{2}{3}$$

Συνεπῶς τό σημεῖον $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ εἶναι πιθανόν θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς f.

Πρός καθορισμόν τοῦ ἄν τό ὡς ἄνω σημεῖον εἶναι θέσις ἀκροτάτου καί εἰς καταφατικήν περίπτωσιν πρός καθορισμόν τοῦ εἴδους τοῦ ἀκροτάτου θά ἐξετάσωμεν τά πρόσημα τῶν ὁριζουσῶν Δ_1 καί Δ_2, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τήν ἀνωτέρω πρότασιν V-4-2.

Εὐκόλως ὅμως εὑρίσκομεν: $\Delta_1 = -12 < 0,\ \Delta_2 = -4 < 0$.

Ἄρα τό σημεῖον $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ εἶναι θέσις τοπικοῦ ἐλαχίστου.

Ἡ ἀπάντησις δύναται νά δοθῆ καί μέ ἐφαρμογή τοῦ ὁρισμοῦ. Πρός τούτοις σχηματίζομεν τήν διαφοράν:

$$f(x,y,z)-f(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}) = f(x,y,z)-\tfrac{1}{3} = x^2+y^2+z^2-\frac{(x+y+z)^2}{3}$$

Ἀλλά:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

Ὅθεν:

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Ἄρα:

$$f(x,y,z)-f(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}) \geq 0.$$

δηλ. τό σημεῖον $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ εἶναι θέσις ἐλαχίστου διά τήν f ὑπό τήν συνθήκην:

$$x+y+z=-1$$

!!

B΄ Τρόπος. Λόγῳ τῆς δοθείσης συνθήκης ἔχομεν:

$$f(x,y,z)=f(x,y,-x-y-1)=2x^2+2y^2+2xy+2x+2y+1$$

Ἀρκεῖ ὅθεν νά εὕρωμεν τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$g(x,y) = 2x^2+2y^2+2xy+2x+2y+1$$

Ἔχομεν: $g'_x = \frac{\partial g}{\partial x} = 4x+2y+2,\quad g'_y = \frac{\partial g}{\partial y} = 4y+2x+2.$

Τό σύστημα: $g'_x=0,\ g'_y=0$ δέχεται τήν μοναδικήν λύσιν: $(x=-\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{3})$

Ἐξ ἄλλου εὐκόλως εὑρίσκομεν·

$$r=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_{(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}=4>0,\quad s=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right|_{(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}=2,\ t=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right|_{(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}=4.$$

Ὅθεν: $\Delta = rt-s^2 = 12 > 0$.

Ἐπειδή $\Delta>0$ καί $r=\frac{\partial^2 g(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}{\partial x^2}=4>0$, συμφώνως πρός τήν πρότασιν V-1-2 (βλέπε σελ. 109), ἡ συνάρτησις $g(x,y)$ παρουσιάζει τοπικόν ἐλάχιστον εἰς τήν θέσιν $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ καί κατά συνέπειαν ἡ f παρουσιάζει τοπικόν ἐλάχιστον εἰς τήν θέσιν $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ ὑπό τήν συνθήκην: $x+y+z+1=0$, εἶναι δέ:

$$f_{min}(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}) = g_{min}(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3})=\tfrac{1}{3}.$$

§ 5. ΑΠΟΛΥΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ὁρισμός V-5-1. *Ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x_1,x_2,\dots,x_q)$ ὡρισμένη εἰς ἕν ὑποσύνολον U τοῦ R^q θά λέγωμεν ὅτι ἔχει ἕν ἀπόλυτον μέγιστον* (ἀντ. *ἀπόλυτον ἐ-*

λάχιστον) ἐπὶ τοῦ συνόλου U, *ἐάν ὑπάρχῃ ἕνα σημεῖον* $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ *τοῦ* U *τοιοῦτον, ὥστε διά κάθε* $x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in U$ *νά ἔχωμεν*: $f(x) < f(x_0)$ (ἀντ. $f(x) > f(x_0)$).

Τά ἀπόλυτα μέγιστα καί ἐλάχιστα ὀνομάζονται, μέ κοινόν ὄνομα, ***ἀπόλυτα ἀκρότατα***.

Προφανῶς ἕν ἀπόλυτον ἀκρότατον εἶναι συγχρόνως καί ἕνα τοπικόν ἀκρότατον (σχετικόν ἀκρότατον). Ἡ διαφορά μεταξύ ἑνός ἀπολύτου ἀκροτάτου καί ἑνός τοπικοῦ ἀκροτάτου μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ὅτι τό μέν ἀπόλυτον ἀκρότατον εἶναι μία ἰδιότης τήν ὁποίαν παρουσιάζει (πιθανόν) ἡ συνάρτησις ἀναφερομένη αὐτή (ἡ ἰδιότης) ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, ἐνῶ τό τοπικόν ἀκρότατον εἶναι μία ἰδιότης τῆς συναρτήσεως ἀναφερομένη εἰς μίαν περιοχήν ἑνός σημείου τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

Ἀναφορικῶς μέ τά ἀπόλυτα ἀκρότατα διατυποῦμεν ἁπλῶς, ἄνευ ἀποδείξεως, τήν κάτωθι πρότασιν.

Πρότασις V-5-1. Ἐάν ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ εἶναι συνεχής ἐπί ἑνός συμπαγοῦς συνόλου U τοῦ R^q, τότε ἡ f ἔχει ἕν ἀπόλυτον μέγιστον καί ἕν ἀπόλυτον ἐλάχιστον ἐπί τοῦ U. (Βλ. σχετικῶς Τόμος Α' σελ. 415).

Δέν θά ἀσχοληθῶμεν ἐκτενέστερον μέ τό θέμα τοῦτο. Παραπέμπομεν τόν ἀναγνώστην εἰς τό βιβλίον «ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ» τεῦχος Γ' τοῦ Δ.Α. ΚΑΠΠΟΥ.

Ἐφαρμογή: Νά εὑρεθοῦν, ἄν ὑπάρχουν, τά ἀπόλυτα ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$f(x,y,z) = xyz$, ὁριζομένης ἐπί τοῦ συνόλου $U \equiv \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 = 1,\ x+y+z=0\} \subset R^3$.

Λύσις: Τό σύνολον U εἶναι συμπαγές, ὅθεν, κατά τήν ἀνωτέρω πρότασιν, ὑπάρχουν ἀπόλυτα ἀκρότατα τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως f. Πρός τούτοις ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως: $f(x,y,z) = xyz$

ὑπό τήν συνθήκην τήν καθοριζομένην ὑπό τῶν:

$$\varphi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \varphi_2(x,y,z) = x+y+z = 0.$$

Ἐνταῦθα ἔχομεν $q=3$, $p=2$, ὅτε ἐργαζόμεθα ἀναλόγως πρός τήν ἐφαρμογήν τῆς προτάσεως V-4-1.

Θέτομεν: $$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \equiv xyz+\lambda_1(x^2+y^2-1)+\lambda_2(x+y+z)$$

καί θεωροῦμεν τό σύστημα: $F'_x=0,\ F'_y=0,\ F'_z=0,\ F'_{\lambda_1}=0,\ F'_{\lambda_2}=0.$

Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρός τά κάτωθι συστήματα:

$$\text{α)}\ \begin{cases} y-x=0 \\ yz+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ xy+\lambda_2=0 \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}, \qquad \text{β)}\ \begin{cases} z-2\lambda_1=0 \\ yz+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ xy+\lambda_2=0 \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Αἱ λύσεις τοῦ πρώτου συστήματος εἶναι:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2},\ z=-\sqrt{2},\ \lambda_1=\frac{3\sqrt{2}}{4},\ \lambda_2=-\frac{1}{2}$$

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ z=\sqrt{2},\ \lambda_1=-\frac{3\sqrt{2}}{4},\ \lambda_2=-\frac{1}{2}.$$

Αἱ λύσεις τοῦ δευτέρου συστήματος εἶναι:

$$x=-\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6},\ y=\frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{6},\ z=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{6},\ \lambda_2=\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{6},\ y=-\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6},\ z=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{6},\ \lambda_2=\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6},\ y=\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{6},\ z=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \lambda_1=-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \lambda_2=\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{6},\ y=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6},\ z=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \lambda_1=-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \lambda_2=\frac{1}{3}$$

Αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τῆς f εἶναι:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6},\frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{6},-\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6},\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{6},-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{6},\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Εἶναι τώρα εὔκολον νά συμπεράνωμεν ὅτι τό ἀπόλυτον ἐλάχιστον τῆς f εἶναι ἡ τιμή: $-\frac{\sqrt{2}}{2}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$, τό δέ **ἀπόλυτον μέγιστον ἡ** τιμή: $\frac{\sqrt{2}}{2}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$.

Συμπληρώματα καί Ἀσκήσεις

1. Νά εὑρεθοῦν τά τοπικά μέγιστα καί ἐλάχιστα τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

α). $f(x,y) = x^2+2x-y^2-4y+3$

β). $f(x,y) = x^3+y^3-3x-12y+20$

γ). $f(x,y) = xy+\frac{1}{x}+\frac{8}{y}$

δ). $f(x,y) = y\cdot\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+y}$ διά $x>-1$ καί $y>-1$

ε). $f(x,y) = x^8+x^4-2x^2y+y^2$

στ). $f(x,y) = (x+y-3)\cdot e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

ζ). $f(x,y) = x-2y+\log\sqrt{x^2+y^2}+3\,\text{τοξεφ}\,y/x,\ x>0$

η). $f(x,y) = \text{ημ}x\,\text{ημ}y\,\text{ημ}(x+y),\ (x,y)\in[0,\pi]\times[0,\pi]$

2. Δεῖξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-3x(x^2+y^2)+2x^2$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ τόν χῶρον $\mathbb{R}^2$ ἔχει ἕν ἐλάχιστον ἐπί ἑκάστης εὐθείας διερχομένης διά τῆς ἀρχῆς, δέν ἔχει ὅμως ἕνα ἐλάχιστον εἰς τήν ἀρχήν.

3. Κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀνοικτόν πρός τά ἄνω ἔχει ὄγκον $32\,dm^3$. Ποῖαι πρέπει νά εἶναι αἱ διαστάσεις του ὥστε ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια νά εἶναι ἐλαχίστη;

4. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ σταθεραί α καί β εἰς τρόπον ὥστε ἡ συνάρτησις:

$$f(a,\beta) = \int_0^{\pi}\{\text{ημ}x-(ax^2+\beta x)\}^2\,dx$$

νά γίνεται ἐλαχίστη.

(Ὑπόδ. Ἐπιλύσατε τό σύστημα: $\frac{\partial f(a,\beta)}{\partial a}=0,\ \frac{\partial f(a,\beta)}{\partial \beta}=0$ κ.τ.λ.)

5. Τό ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 9. Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί ἐάν τό γινόμενόν των εἶναι ἐλάχιστον.

6. Δεῖξατε ὅτι: ὁ ὄγκος τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τό ὁποῖον δύναται νά ἐγγραφῆ εἰς τό ἐλλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ εἶναι $\frac{8a\beta\gamma}{3\sqrt{3}}$.

7. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)=xyz(1-x-y-z)$ ἔχει ἕνα σχετικόν (τοπικόν) μέγιστον εἰς τό σημεῖον $(1/4, 1/4, 1/4)$.

7α. Νά εὑρεθῆ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν: (ε_1): $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z+2$ καί (ε_2): $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{2}$.

8. Εὕρατε τά ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων: α) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x-1$. β) $f(x,y,z)=x^3+y^3-3x-12y+120$

9. Ὑπολογίσατε τά ἀκρότατα τῶν κάτωθι συναρτήσεων, αἵτινες ὁρίζονται ὑπό ἑκάστης τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων:

α) $f(x,y)=x^3+3y^3+3xy=0$ β) $f(x,y)=x^3+3y^4-3yx^2=0$

γ) $f(x,y)=y^3+y-x^2=0$ δ) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0$

ε) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0$ στ) $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2+4xy+2xz+4yz-7=0$

(Μία λύσις τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ $(x_0,y_0,z_0)=(4,-3,2)$).

10. Εὕρετε τήν ἐλαχίστην ἀπόστασιν ἀπό τήν ἀρχήν μέχρι τῆς ὑπερβολῆς:

$$x^2+8xy+7y^2=225,\ z=0.$$

10α. Νά εὑρεθῆ τό ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $f(x,y)=\int_x^y \frac{\eta\mu t}{t}\,dt\ (x<y)$.

11. Εὕρετε τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ὑπό τήν συνθήκην τήν καθοριζομένην ὑπό τῶν:

$$\varphi_1(x,y,z)=x+y-z=0,\ \varphi_2(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}-1=0.$$

12. Εὕρετε τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, ὑπό τήν συνθήκην: $ax+\beta y+\gamma z=1$.

13. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $f(x,y)=xy$, ὑπό τήν συνθήκην: $\varphi(x,y)=x^2+y^2-2=0$.

14. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=xyz$ ὑπό τήν συνθήκην: $\varphi(x,y,z)=xy+(y+x)z-1=0$.

141. Ἐάν $\varphi(a)=k\neq 0$, $\varphi'(a)\neq 0$ καί οἱ x,y,z ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν: $\varphi(x)\cdot\varphi(y)\cdot\varphi(z)=k^3$, δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x)+f(y)+f(z)$ ἔχει ἕνα μέγιστον ὅταν εἶναι $x=y=z=a$, ὑπό τόν ὅρον νά εἶναι $f'(a)\cdot\left(\frac{\varphi''(a)}{\varphi'(a)}-\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}\right)>f''(a)$

15. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως: $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}xy + 5y^2$ ὑπό τήν συνθήκην:

$$\varphi(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

Ὑπόδ. Θέσατε $x = 2\sigma\upsilon\nu t$, $y = \eta\mu t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ καί ἀκολούθως εὕρετε τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συνθέτου συναρτήσεως:

$$g(t) \equiv f(2\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t) \equiv 4\sigma\upsilon\nu^2 t + 5\eta\mu^2 t - \eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t,\ 0 \leq t \leq 2\pi).$$

16. Εὕρετε τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ἐπί τῆς περιφερείας μέ ἐξίσωσιν: $x^2 + y^2 = 1$.

17. Εὕρετε τά ἀπόλυτα ἀκρότατα τῆς $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ὑπό τήν συνθήκην τήν καθοριζομένην ὑπό τῶν: $\varphi_1(x,y,z) = x + y + z = 0$, $\varphi_2(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4(z^2 - 1) = 0$.

18. Εὕρετε τά ἀπόλυτα ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1$ ὑπό τήν συνθήκην: $\varphi(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 \leq 0$.

19. Νά εὑρεθῆ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου $z = x + y$ τοιοῦτον ὥστε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπό τά σημεῖα $A(1,1,1)$ καί $B(-2,-2,-2)$ νά εἶναι ἐλάχιστον.

20. Ἔστω ὅτι ἡ θερμοκρασία εἰς κάθε σημεῖον (x,y,z) τῆς σφαίρας: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ εἶναι ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f μέ τύπον: $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$.
Νά ἐξετασθῆ ἐάν ὑπάρχουν ἐπί τῆς σφαίρας πηγαί θερμότητος καί ἀκολούθως νά εὑρεθῆ ἡ θερμοκρασία εἰς αὐτάς.
Ὑπόδ. Αἱ πηγαί θερμότητος εἶναι αἱ θέσεις ἀκροτάτων τῆς συναρτήσεως: $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, ὅταν $x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0$.

21. Νά εὑρεθοῦν τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως: $f(x,y,z) = x\log x + y\log y + z\log z$ ὑπό τήν συνθήκην: $x + y + z = a$, $a > 0$.

22. Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$f(x,y,z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz},\ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΩΝ

§1. ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης ὑπό πεπλεγμένην μορφήν $F(x,y)=0$. Ἕνα σημεῖον τῆς καμπύλης καλεῖται ***ὁμαλόν***, ἐάν εἰς αὐτό τό σημεῖον εἶναι $F_y(x,y) \neq 0$. Εἰς τήν περιοχήν τοῦ σημείου αὐτοῦ δυνάμεθα νά ἐπιλύσωμεν τήν ἐξίσωσιν καί νά ἐπιτύχωμεν μίαν μοναδικήν διαφορίσιμον λύσιν τῆς μορφῆς $y=f(x)$. Ἐπί πλέον ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον εἶναι $y'=-\frac{F_x}{F_y}$, (βλ. σχετικῶς Κεφ. IV, § 1). Ἀναλόγως τό σημεῖον θά καλῆται ὁμαλόν ἐάν $F_x(x,y) \neq 0$.

Καλοῦμεν ***ἀνώμαλα ἤ ἰδιάζοντα σημεῖα*** τῆς καμπύλης αὐτά, διά τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦνται συγχρόνως αἱ ἐξισώσεις:

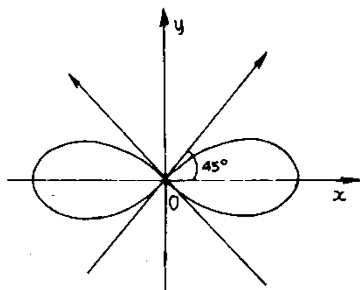
$$F_x(x,y)=0, \quad F_y(x,y)=0 \qquad (2)$$

Εἰς ἕνα ἀνώμαλον σημεῖον δέν δυνάμεθα, ἐν γένει, νά ὑπολογίσωμεν τήν κλίσιν $y'=-\frac{F_x}{F_y}$ τῆς ἐφαπτομένης.

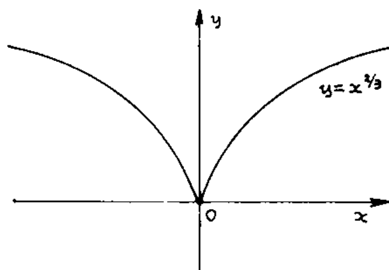
Ἕνας σπουδαῖος τύπος ἀνωμάλου σημείου εἶναι τό λεγόμενον ***πολλαπλοῦν σημεῖον*** ἤ **κόμβος**, δηλ. τό σημεῖον διά τοῦ ὁποίου διέρχονται δύο ἤ περισσότεροι κλάδοι τῆς καμπύλης. π.χ. Τό σημεῖον (0,0) εἶναι πολλαπλοῦν σημεῖον τοῦ Λημνίσκου $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ (βλ. Σχ.1 ἑπομένης σελίδος).

Ἵνα ἔχωμεν ἕνα πολλαπλοῦν σημεῖον, αἱ συνθῆκαι $F_x=0$, $F_y=0$ εἶναι ἀναγκαῖαι, ἀλλά ~~αὐτό~~ δέν ~~σημαίνει ὅτι~~ εἶναι ~~καί~~ ἱκαναί διά τήν ὕπαρξιν πολλαπλοῦ σημείου. π.χ. Ἄν θεωρήσωμεν τήν καμπύλην $y^3-x^4=0$. Διά το σημεῖον (0,0) ἔχομεν $F_x=F_y=0$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης γράφεται $y=x^{4/3}$. Παρατηροῦμεν ὅτι: $(-x)^{4/3}=x^{4/3}$, ὅθεν αὕτη εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν y. Εἶναι δέ $y'=\frac{4}{3}x^{1/3}$, συνεπῶς ἡ καμπύλη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων. Ἡ δευτέρα παράγωγος εἰς τήν θέσιν (0,0) γίνεται ἄπειρος. Ὅθεν ἄν καί μηδενίζωνται αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι εἰς τήν ἀρχήν, ἐν τούτοις εἰς τήν περιοχήν αὐτοῦ τοῦ σημείου ἡ καμπύλη εἶναι ὁμαλή καί ἔχει ἕναν κλάδον. _

Ἕνα ἄλλο παράδειγμα εἶναι ἡ καμπύλη, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $(y-x)^2=0$. Αὐτη εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς (διχοτόμος τῆς γων. $0xy$). Παρατηροῦμεν διὰ τὸ σημεῖον $(0,0)$ ὅτι εἶναι: $F_x = F_y = 0$, ὅπου $F(x,y)=(y-x)^2$, ἤτοι ἂν καὶ μηδενίζωνται αἱ F_x, F_y εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$ ἐν τούτοις ἡ καμπύλη εἶναι ὁμαλὴ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου αὐτοῦ.



Λημνίσκος
(Δύο ἐφαπτόμεναι διὰ τοῦ 0)
Σχ. 1



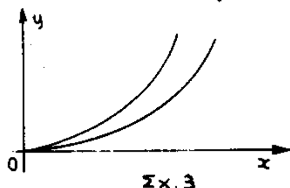
(Μία ἐφαπτομένη διὰ τοῦ 0)
Σχ. 2

Ἕνας ἄλλος τύπος ἀνωμάλων σημείων εἶναι αἱ λεγόμεναι *κορυφαί*. Καὶ εἰς αὐτὰ τὰ σημεῖα ἀμφότεραι αἱ μερικαὶ παράγωγοι F_x, F_y μηδενίζονται.

Ἕνα χαρακτηριστικὸν παράδειγμα εἶναι ἡ καμπύλη, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $y^3-x^2=0$ ἢ $y=x^{2/3}$ (βλ. Σχ 2). Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον $(0,0)$ εἶναι μία κορυφὴ τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους, οἵτινες ἔχουν κοινὴν ἐφαπτομένην (τὸν oy) εἰς τὸ σημεῖον 0. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται *σημεῖον ἀνακάμψεως α^{ου} εἴδους*, ὅταν κλάδοι τῆς καμπύλης κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἐφαπτομένης. Τέλος ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(y-x^2)^2-x^5=0$$

τὸ σημεῖον $(0,0)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον.



Σχ. 3

Ἡ γραμμὴ ἔχει δύο κλάδους $y=x^2\pm\sqrt{x^5}$ δια $x\geq 0$, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τοῦ ox εἰς τὸ σημεῖον 0 καὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὡς πρὸς τὸν ox (βλ. Σχ. 3). Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ***σημεῖον ἀνακάμψεως β^{ου} εἴδους***.

Ἤδη ἂς ἐξετάσωμεν τὸ ἄνω θέμα τῶν ἀνωμάλων σημείων κάπως ἐκτενέστερον. Ἔστω $F(x,y)=0$ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (γ), ὅπου τὸ σημεῖον $M(x,y)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον ταύτης, δηλ. $F_x=F_y=0$. Ἀναπτύσσομεν τὴν $F(x,y)$ κατὰ Taylor εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $M(x,y)$ καὶ ἔχομεν:

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y)=F(x,y)+F_x\cdot\Delta x+F_y\cdot\Delta y+\frac{1}{2}\left(F''_{x^2}\cdot\Delta x^2+2F''_{xy}\Delta x\Delta y+F_{y^2}\Delta y^2\right)+R_3 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον $M(x+\Delta x,y+\Delta y)$, ἐξ ὑποθέσεως, κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ ἐπειδὴ $F(x,y)=F_x(x,y)=F_y(x,y)=0$, ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$F''_{x^2}+2F''_{xy}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+F''_{y^2}\cdot\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\frac{R_3}{\Delta x^2}=0 \qquad (2)$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον $M'\to M$, ὅτε καὶ $\Delta x,\Delta y\to 0$ καὶ λόγῳ τοῦ ὅτι ὁ R_3 περιέχει ὅρους τουλάχιστον εἰς τὴν τρίτην δύναμιν ὡς πρὸς $\Delta x,\Delta y$, ὁ τύπος (2) μετὰ τὴν λῆψιν τῶν ὁρίων, δίδει:

$$F''_{x^2}+2\cdot F''_{xy}\cdot y'+F''_{y^2}\cdot y'^2=0 \qquad (3)$$

Ἵνα λοιπὸν εἰς τὸ θεωρηθὲν ἀνώμαλον σημεῖον $M(x,y)$ ὑπάρχουν ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης, ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς (3) ὡς πρὸς y'. Πρὸς τούτοις ἔστω $F_{yy}\neq 0$ καὶ οὕτω διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

I. Ἐὰν ἡ διακρίνουσα τῆς (3) δηλ. ἡ $F''^2_{xy}-F''_{xx}\cdot F''_{yy}>0$, διὰ τοῦ σημείου M (διπλὸ ἢ κόμβος) διέρχονται δύο ἐφαπτόμεναι, διότι ἔχομεν ἐκ τῆς (3) δύο διαφορετικὰς τιμὰς τοῦ y'. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἶναι:

$$y'=\frac{Y-y}{X-x} \qquad (4)$$

ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν τελικῶς:

$$(X-x)^2F''_{xx}+2(X-x)\cdot(Y-y)F''_{xy}+(Y-y)^2\cdot F''_{yy}=0 \qquad (5)$$

Ἡ (5) δίδει τὰ δύο ζεύγη τῶν ἐφαπτομένων.

Π.χ. Ὁ Λημνίσκος $(x^2+y^2)-2a^2(x^2-y^2)=0$ ἢ ἡ στροφοειδὴς $(x^2+y^2)(x-2a)+a^2x=0$ ἔχουν τὸ σημεῖον $M(0,0)$ διπλὸ μὲ δύο διαφορετικὰς ἐφαπτομένας.

II. Ἐάν $F''^2_{xy} - F''_{xx} \cdot F''_{yy} = 0$, τότε θά διέρχωνται διά τοῦ διπλοῦ σημείου δύο συμπίπτουσαι ἐφαπτόμεναι, δηλ. οἱ δύο κλάδοι τῆς καμπύλης ἐφάπτονται ἀλλήλων. Εἶναι ἡ περίπτωσις τῶν γωνιακῶν σημείων. Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν τότε: $y' = -\frac{F''_{xy}}{F_{yy}}$, ἡ δέ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἶναι:

$$-\frac{F''_{xy}}{F_{yy}} = \frac{Y-y}{X-x} \quad \text{ἤ} \quad F''_{xy}(X-x) + F''_{yy}(Y-y) = 0 \qquad (6)$$

III. Ἐάν $F''^2_{xy} - F''_{x^2} \cdot F''_{y^2} < 0$, εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν δέν ἔχομεν πραγματικήν ἐφαπτομένην καί τό σημεῖον καλεῖται τότε ***μεμονωμένον σημεῖον***.

Π.χ. Ἔστω ἡ καμπύλη $(x^2-\alpha^2)^2 + (y^2-\beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4$. Ἡ τιμή $x=y=0$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, ἀλλά πᾶσαι αἱ ἄλλαι τιμαί τῶν x, y αἱ κείμεναι ἐντός τοῦ χωρίου $|x| < \alpha\sqrt{2}$, $|y| < \beta\sqrt{2}$ καθιστοῦν τό ἀριστερόν μέλος τῆς ἐξισώσεως μικρότερον τοῦ δεξιοῦ, ἄρα τό σημεῖον M (0,0) εἶναι μεμονωμένον σημεῖον τῆς καμπύλης.

Τέλος παραλείπομεν τήν περίπτωσιν ὅπου πᾶσαι αἱ μερικαί παράγωγοι δευτέρας ἤ καί ἀνωτέρας τάξεως μηδενίζονται εἰς ἕνα σημεῖον. Ἡ περίπτωσις αὐτή τῶν ἀνωμάλων σημείων χρήζει περαιτέρω διερευνήσεως.

Ἐφαρμογή: Νά διερευνηθοῦν τά ἀνώμαλα σημεῖα τοῦ λημνίσκου $(x^2+y^2)^2 - \alpha^2(x^2-y^2) = 0$.

Λύσις: Θέτομεν $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - \alpha^2(x^2-y^2)$.

Εἶναι δέ, $F_x = 4(x^2+y^2)x - 2\alpha^2 x$, $F_y = 4(x^2+y^2)y + 2\alpha^2 y$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τό σύστημα: $F_x=0, F_y=0$, ἀληθεύει διά $x=y=0$ καί ὅτι ἡ τιμή αὐτή δίδει $F(0,0)=0$. Ὅθεν τό σημεῖον M (0,0) εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον τῆς καμπύλης.

Λαμβάνομεν ἐν συνεχείᾳ τάς δευτέρας παραγώγους τῆς $F(x,y)$.

Ἔχομεν $F_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 2\alpha^2$, $F_{xy} = 8xy$, $F_{yy} = 12y^2 + 4x^2 + 2\alpha^2$.

Εἶναι δέ $F^2_{xy} - F_{xx} \cdot F_{yy} \Big|_{(0,0)} = 0^2 - (-2\alpha^2)\cdot(2\alpha^2) = 4\alpha^4 > 0$.

Ἄρα τό M (0,0) εἶναι διπλό σημεῖον τῆς καμπύλης.

Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων εἰς αὐτό εἶναι:

$$X^2\cdot(-2a^2)+2\cdot X\cdot Y\cdot 0+Y^2\cdot(2a^2)=0 \quad ἤ$$

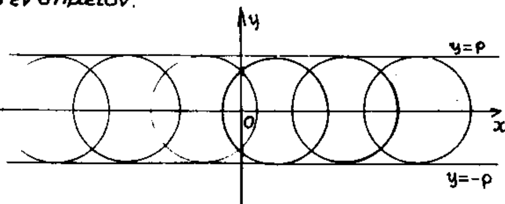
$$Y^2-X^2=0.$$

§2. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΜΙΑΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

Ἄς θεωρήσωμεν τήν μονοπαραμετρικήν οἰκογένειαν τῶν ἐπιπέδων γραμμῶν $F(x,y,c)=0$, $c_1<c<c_2$.

Ὁρισμός VII-2-1. ***Μία γραμμή (γ) θά καλῆται περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν γραμμῶν $F(x,y,c)=0$, ἐάν κάθε σημεῖον τῆς (γ) εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῆς μέ κάποια γραμμή τῆς οἰκογενείας καί κάθε γραμμή τῆς οἰκογενείας ἐφάπτεται τῆς (γ) τουλάχιστον εἰς ἕν σημεῖον.***

Παράδειγμα: Ἡ οἰκογένεια τῶν κύκλων $(x-c)^2+y^2=\rho^2$, $-\infty<c<+\infty$ ἔχει ὡς περιβάλλουσαν τάς εὐθείας $y=\pm\rho$ (βλ. Σχ.1)



Σχ.1

Ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης.

Ἔστω ἡ οἰκογένεια τῶν καμπύλων

$F(x,y,c)=0$ (1), ὅπου c παράμετρος.

Ὑποθέτομεν ὅτι αὐτη ἡ οἰκογένεια ἔχει μίαν περιβάλλουσα, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις τίθεται ὑπό τήν μορφήν $R(x,y)=0$. Ἔστω $M(x,y)$ ἕνα σημεῖον τῆς περιβαλλούσης. Τοῦτο τό σημεῖον θ᾽ἀνήκη ἐπίσης εἰς μίαν ὡρισμένην καμπύλην τῆς οἰκογενείας (1). Ὅθεν ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτήν τήν καμπύλην μία ὡρισμένη τιμή τῆς παραμέτρου c. Ἑπομένως διά κάθε σημεῖον (x,y) τῆς περιβαλλούσης ἔχομεν καί μίαν ὡρισμένην τιμήν τῆς c, συνεπῶς τό c δύναται νά θεωρηθῆ ὡς συνάρτησις τῶν (x,y), ἤτοι: $c=c(x,y)$. Ἄρα διά πάντα τά σημεῖα τῆς περιβαλλούσης θά ἔχωμεν:

$$F(x,y,c(x,y))=0 \qquad (2)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $c(x,y)$ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς ἕνα ὡρισμένον διάστημα καί διάφορος σταθερᾶς εἰς αὐτό.

Ἄς ὑπολογίσωμεν τόν συντελεστήν κατευθύνσεως της ἐφαπτομένης τῆς περιβαλλούσης τῆς διδομένης ὑπό τῆς (2) εἰς τό σημεῖον $M(x,y)$ αὐτῆς. Διά τοῦτο

ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό y' αὐτῆς. Πρός τούτοις παραγωγίζομεν τήν (2) ὡς πρός x καί λαμβάνομεν:

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F'_c \left\{ c'_x + c'_y \cdot y' \right\} = 0 \qquad (3)$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τήν ἀντίστοιχον καμπύλην τῆς οἰκογενείας (1), ἥτις διέρχεται διά τοῦ σημείου $M(x,y)$. Ταύτης ὁ συντελεστής κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης της εἰς τό σημεῖον $M(x,y)$ θά παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0 \qquad (4)$$

Ἐδῶ τό c εἶναι σταθερόν.

Ἐπειδή ἡ περιβάλλουσα καί ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη ἐφάπτονται εἰς τό σημεῖον $M(x,y)$ θά ἔχουν κοινήν ἐφαπτομένην καί ὡς ἐκ τούτου τά y' τά διδόμενα ὑπό τῶν τύπων (3) καί (4) θά πρέπει νά εἶναι ἴσα. Ἵνα συμβαίνη αὐτό θά πρέπει νά ἔχωμεν:

$$F'_c \cdot \left\{ c'_x + c'_y \cdot y' \right\} = 0 \qquad (5)$$

Ἐπειδή διά τήν περιβάλλουσαν $c \neq$ σταθερᾶς θά εἶναι καί $c'_x + c'_y \cdot y' \neq 0$.

Τά σημεῖα $M(x,y)$ τῆς περιβαλλούσης ὀφείλουν νά ἐπαληθεύσουν καί τήν ἐξίσωσιν:

$$F'_c = 0 \qquad (6)$$

Ὅθεν, τά $M(x,y)$ τῆς περιβαλλούσης ὀφείλουν νά ἐπαληθεύουν τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} F(x,y,c) &= 0 \\ \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial c} &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad (7)$$

<u>Ἐάν</u> $R(x,y) = 0$ (8) <u>εἶναι τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀπαλειφῆς τῆς c μεταξύ τῶν ἐξισώσεων</u> (7), <u>τότε τά σημεῖα τῆς περιβαλλούσης θά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν</u> (8).

Ἤτοι αἱ σχέσεις (7) ἀποτελοῦν μίαν <u>ἀναγκαίαν συνθήκην</u> ὑπάρξεως περιβαλλούσης.

- Ἔστω ἡ οἰκογένεια τῶν καμπύλων $F(x,y,c) = 0$. Θεωροῦμεν τό σύνολον

τῶν σημείων, ἄν ὑπάρχουν, τά ὁποῖα ἐπαληθεύουν συγχρόνως τάς τρεῖς ἐξισώσεις:

$$F(x,y,c)=0,\ \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial y}=0 \qquad (9)$$

Τά ἀνωτέρω σημεῖα καλοῦνται ***ἀνώμαλα ἤ ἰδιάζοντα σημεῖα τῆς οἰκογενείας*** $F(x,y,c)=0$ καί εἶναι τό σύνολον τῶν ἀνωμάλων σημείων πάντων τῶν καμπύλων τῆς οἰκογενείας $F(x,y,c)=0$. Εἰς αὐτά τά σημεῖα δέν δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τήν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης τῆς οἰκογενείας, διότι τό $y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$ δέν ὁρίζεται καί ὡς ἐκ τούτου δι' αὐτά τά σημεῖα δέν δυνάμεθα νά ὁμιλήσωμεν περί ἐπαφῆς τῶν καμπύλων.

Ἐργαζόμενοι κατά ἀκριβῶς ἀνάλογον τρόπον ὅπως διά τήν περιβάλλουσαν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ γ.τ. τῶν ἰδιαζόντων σημείων τῆς (1) θά ἐπαληθεύη ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (2) συνεπῶς καί ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (3). Ὅθεν λόγω τῶν (9) θά ἐπαληθεύη τήν ἐξίσωσιν $F'_c=0$. Ἤτοι ὁ γ.τ. τῶν ἰδιαζόντων σημείων θά ἐπαληθεύη τάς ἐξισώσεις (7), συνεπῶς καί τήν $R(x,y)=0$.

Ὅθεν, ἡ ἐξίσωσις $R(x,y)=0$ πού προκύπτει ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ c μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (7) ὁρίζει, εἴτε τήν περιβάλλουσαν τῆς οἰκογενείας (1), εἴτε τόν γ.τ. τῶν ἰδιαζόντων σημείων τῆς οἰκογενείας (1), εἴτε ἕναν συνδυασμόν τῶν δύο ἀνωτέρω.

• Ἤδη γεννᾶται τό ἐρώτημα νά εὕρωμεν τάς ἱκανάς συνθήκας, αἱ ὁποῖαι πρέπει νά πληροῦνται, ἵνα ἔχωμεν περιβάλλουσαν. Ἔστωσαν $x=x(c)$, $y=y(c)$ αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς καμπύλης, ἥτις δίδεται ὑπό τῶν ἐξισώσεων (7).

Προφανῶς θά ἔχωμεν τάς ταυτότητας:

$$F(x(c),y(c),c)=0,\ F'_c(x(c),y(c),c)=0 \qquad (10)$$

Ἡ δευτέρα τῶν (10) γράφεται:

$$F'_x\cdot\frac{dx}{dc}+F'_y\frac{dy}{dc}+F'_c=0 \qquad \text{ἤ}$$

$$F'_x\frac{dx}{dc}+F'_y\frac{dy}{dc}=0 \qquad (11)$$

Ἡ (11) πληροῦται ἀπό πάντα τά σημεῖα τῆς καμπύλης $x=x(c)$, $y=y(c)$.

Ἐάν $\quad F'^2_x+F'^2_y\neq 0$ καί $\left(\frac{dx}{dc}\right)^2+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2\neq 0 \qquad (12)$

εἰς ἕνα σημεῖον $M(x,y)$, τότε ἡ περιβάλλουσα καί ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη

ἔχουν εἰς αὐτό τό σημεῖον τήν αὐτήν ἐφαπτομένην, ἥτις ὁρίζεται πλήρως. Ὅθεν, ἡ περιβάλλουσα καί ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη τῆς οἰκογενείας, ἥτις διέρχεται δι' αὐτοῦ τοῦ σημείου, ἐφάπτονται ἀλλήλων.

Ἄρα, αἱ συνθῆκαι (7) καί (12) εἶναι ἱκαναί διά τήν ὕπαρξιν περιβαλλούσης.

Παραδείγματα 1ον Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν: $x\sigma\upsilon\nu a + y\eta\mu a - \rho = 0$ (1), ὅπου α παράμετρος.

Λύσις: Παραγωγίζοντες τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρός α λαμβάνομεν:

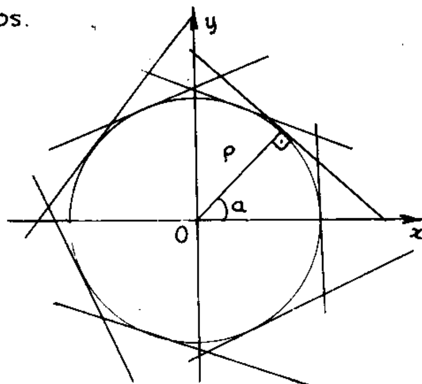
$$-x\eta\mu a + y\sigma\upsilon\nu a = 0 \quad (2)$$

Διά νά ἀπαλείψωμεν τήν παράμετρον α πολλαπλασιάζομεν τήν (1) ἐπί ημα καί τήν (2) ἐπί συνα καί προσθέτομεν, ὅτε λαμβάνομεν:

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu a \quad (3)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τήν (2) λαμβάνομεν:

$$y = \rho\eta\mu a \quad (4)$$



Σx. 1

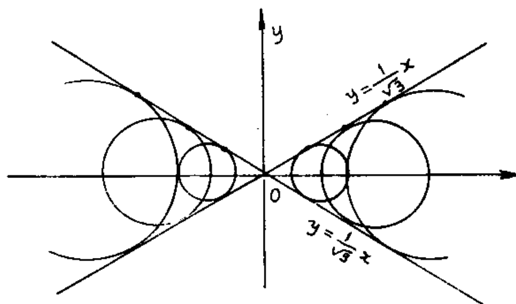
Δι' ὑψώσεως τῶν (3) καί (4) εἰς τό τετράγωνον εὑρίσκομεν: $x^2+y^2=\rho^2$ (5). Ἡ (5) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης, ἥτις εἶναι περιφέρεια κύκλου (βλ. Σx. 1).

2ον/. Να εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν κύκλων.

$$(x-2c)^2+y^2-c^2=0, \; c \text{ παράμετρος}$$

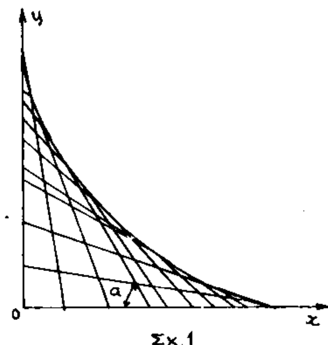
Λύσις: Διαφορίζοντες ὡς πρός c τήν δοθεῖσαν λαμβάνομεν: $2x-3c=0$. Διά ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς $c=\frac{2x}{3}$ εἰς τήν ἐξίσωσιν τῆς οἰκογενείας ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν τῆς περιβαλλούσης: $y^2=\frac{x^2}{3}$, ἥτις εἶναι αἱ εὐθεῖαι: $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$. (Σx. 2).

(Ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων ἐξαιρεῖται καθότι ἐκεῖ δέν ἔχομεν ἐπαφήν.)



Σx. 2

3ον/ Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ἐπί τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες οx, oy ἀποκόπτουν ἕνα μῆκος ἴσον πρός τήν μονάδα.



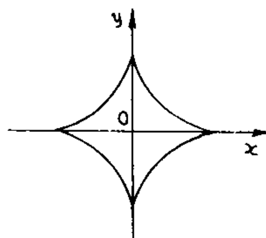
Σx.1

Λύσις: Ἐάν α=c εἶναι ἡ γωνία ἡ δεικνυομένη εἰς τό Σx. 1, τότε αὗται αἱ εὐθεῖαι δίδονται ὑπό τῆς ἐξισώσεως: $\frac{x}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{y}{\eta\mu\alpha} = 1$ (1) (διατί;)

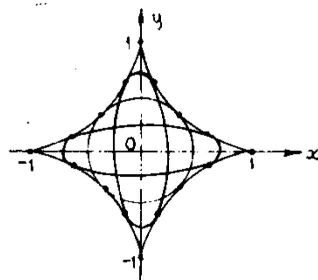
Διά παραγωγίσεως τῆς (1) ὡς πρός α λαμβάνομεν:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\, x - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu^2\alpha}\, y = 0 \quad (2)$$

Εκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν τῆς περιβαλλούσης ὑπό παραμετρικήν μορφήν, ἤτοι $x=\sigma\upsilon\nu^3\alpha$, $y=\eta\mu^3\alpha$. Ἐκ τῶν τελευταίων ἐξισώσεων λαμβάνομεν: $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. Αὕτη ἡ καμπύλη ὡς γνωστόν, καλεῖται ***ἀστεροειδής*** (Σx.2) καί εἶναι ἐπίσης ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐλλείψεων: $\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{(1-C)^2} = 1$ (Σx.3).



Σx. 2

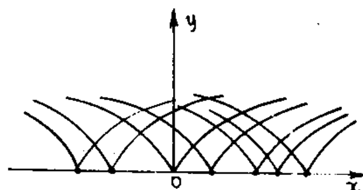


Σx. 3

4ον/ Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἡμι-κυβικῶν παραβολῶν $y^3-(x-c)^2=0$.

Λύσις: Παραγωγίζοντες πρός c τήν δοθεῖσαν λαμβάνομεν: $2(x-c)=0$ ἤ $x=c$. Ἀπαλείφοντες τήν c μεταξύ τῶν δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὑρίσκομεν:

$$y = 0$$



γ.τ. τῶν μή ὁμαλῶν σημείων
Σx 4.

Ὁ ἄξων τῶν x εἶναι ὁ γ.τ. τῶν μή ὁμαλῶν σημείων τῆς δοθείσης οἰκογενείας.

Πράγματι, ἐάν θέσωμεν $F(x,y,c)=y^3-(x-c)^2$, ἀρκεῖ νά εὕρωμεν διά ποῖα σημεῖα ἐπαληθεύονται αἱ ἐξισώσεις:

$F(x,y,c)=0$, $F'_x=0$, $F'_y=0$, ἤτοι αἱ ἐξισώσεις $y^3-(x-c)^2=0$, $-2(x-c)=0$, $3y^2=0$. Αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἐξισώσεις δίδουν τήν καμπύλην ὑπό παραμετρικήν μορφήν $x=c$, $y=0$, δηλ. τόν ἄξονα τῶν x.

Ἄρα δέν ὑπάρχει περιβάλλουσα τῆς δοθείσης οἰκογενείας καί ὁ γ.τ. τῶν μή ὁμαλῶν σημείων εἶναι ὁ ἄξων τῶν x.

5ον/. Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα καί ὁ γ.τ. τῶν μή ὁμαλῶν σημείων τῆς οἰκογενείας $(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0$ (1)

Λύσις: Διά παραγωγίσεως ὡς πρός c τήν δοθεῖσαν λαμβάνομεν:

$$-2(y-c)+\frac{2}{3}3(x-c)^2=0 \quad \text{ἤ}$$

$$y-c-(x-c)^2=0 \qquad (2)$$

Ἤδη ἀπαλείφομεν τήν c μεταξύ τῶν (1) καί (2). Πρός τοῦτο ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (1) $y-c=(x-c)^2$ λαμβάνομεν:

$$(x-c)^4-\frac{2}{3}(x-c)^3=0 \quad \text{ἤ}$$

$$(x-c)^2\left[(x-c)-\frac{2}{3}\right]=0 \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν τάς λύσεις:

$$c=x \quad \text{ἤ} \quad c=x-\frac{2}{3} \qquad (4)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τήν (2) τῆς πρώτης τῶν (4) εὑρίσκομεν:

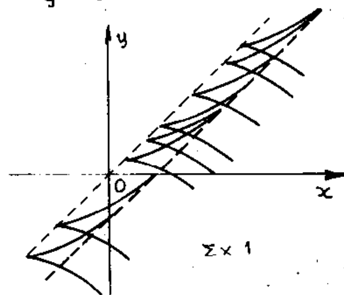
$$y-x-(x-x)^2=0, \text{ ἐξ ἧς } y=x \quad (5)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς δευτέρας τῶν (4) εἰς τήν (2) λαμβάνομεν:

$$y-x+\frac{2}{3}-\left(x-x+\frac{2}{3}\right)^2=0, \text{ ἐξ ἧς } y=x-\frac{2}{9} \quad (6)$$

Οὕτω ἐπιτύχαμεν δύο εὐθείας $y=x$, $y=x-\frac{2}{9}$.

Ἡ πρώτη εὐθεῖα ὁ γ.τ. τῶν μή ὁμαλῶν σημείων καί ἡ δευτέρα ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας (βλ. Σχ. 1)



Σχ 1

§3. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΜΙΑΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Ι. Περιβάλλουσα μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιφανειῶν:
Ἂς θεωρήσωμεν μίαν μονοπαραμετρικὴν οἰκογένειαν ἐπιφανειῶν $F(x,y,z,c)=0$ (1) ὅπου c παράμετρος μεταβαλλομένη εἰς τό διάστημα $c_1 < c < c_2$.

Ὁρισμός VI-3-1. *Θά λέγωμεν ὅτι μία ἐπιφάνεια* E *εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας* (1), *ἐάν αὐτή ἐφάπτεται ἑκάστης ἐπιφανείας τῆς οἰκογενείας* (1) *κατά μῆκος μιᾶς ὁλοκλήρου καμπύλης καί ἐάν ἐπί πλέον αὐταί αἱ καμπύλαι τῆς ἐπαφῆς σχηματίζουν μίαν μονοπαραμετρικήν οἰκογένειαν καμπύλων ἐπί τῆς ἐπιφανείας* E, *αἱ ὁποῖαι καλύπτουν πλήρως τήν* E.

Παράδειγμα: Θεωροῦμεν τήν οἰκογένειαν τῶν σφαιρῶν $x^2+y^2+(z-c)^2=1$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκτῖνα ἴση πρός τήν μονάδα καί τῶν ὁποίων τά κέντρα κεῖνται ἐπί τοῦ ἄξονος Oz. Ἡ περιβάλλουσα τούτων εἶναι ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια μέ ἐξίσωσιν $x^2+y^2=1$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι: τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, ἥτις εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας (1), ἐπαληθεύουν τάς κάτωθι ἐξισώσεις:

$$F(x,y,z,c)=0, \quad \frac{\partial F(x,y,z,c)}{\partial c}=0 \qquad (2)$$

→ βλ. ἀπόδειξιν «Πρόχειρες Σημ. Ἀνωτ. Μαθ.» Τόμος ΙΙ Ν. Κριτικοῦ σελ. 310 § 474.

Ἔστω $R(x,y,z)=0$ (3) παριστᾶ τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς c μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (2). Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἡ (3) θά παριστᾶ εἴτε τήν περιβάλλουσαν τῆς οἰκογενείας (1), εἴτε τόν γ.τ. τῶν ἀνωμάλων σημείων τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰκογενείας (1) δηλ. τῶν σημείων τῶν ἐπιφανειῶν διά τά ὁποῖα ἔχομεν $F=0$ καί $F_x=F_y=F_z=0$, εἴτε ἕναν συνδυασμόν τῶν δύο ἀνωτέρω.

Διά $c=c_0$, αἱ ἐξισώσεις $F(x,y,z,c_0)=0, \frac{\partial F(x,y,z,c_0)}{\partial c}=0$ (4) θά παριστοῦν μίαν καμπύλην (γ_0) κειμένην ἐπί τῆς περιβαλλούσης E, κατά μῆκος τῆς ὁποίας θά ἐφάπτεται ἡ ἐπιφάνεια $F(x,y,z,c_0)=0$ τῆς οἰκογενείας (1). Ἡ γραμμή (γ_0) καλεῖται ***χαρακτηριστική γραμμή*** τῆς οἰκογενείας διά τήν τιμήν $c=c_0$.

Ἡ περιβάλλουσα μιᾶς οἰκογενείας δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ὁ γ.τ. τῶν χαρακτηριστικῶν γραμμῶν ὅταν ἡ παράμετρος c μεταβάλλεται εἰς τό διάστημα $c_1 < c < c_2$.

Ἐάν θεωρήσωμεν τό σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων:

$$F(x,y,z,c)=0,\ \frac{\partial F(x,y,z,c)}{\partial c}=0,\ \frac{\partial^2 F(x,y,z,c)}{\partial c^2}=0 \qquad (5)$$

διά $c_1 < c < c_2$, τοῦτο ὁρίζει μίαν γραμμήν κειμένη ἐπί τῆς περιβαλλούσης, καί ἡ ὁποία καλεῖται *γραμμή ἀνακάμψεως* τῆς περιβαλλούσης, διότι κατά μῆκος αὐτῆς ἡ περιβάλλουσα ἀναδιπλοῦται.

Προφανῶς αἱ (5) ὁρίζουν μίαν γραμμήν κειμένην ἐπί τῆς περιβαλλούσης.

● Ἄς θέσωμεν: $F(x,y,z,c)=F(c)$.

Ἤδη θεωροῦμεν δύο γειτονικάς χαρακτηριστικάς:

$$F(c_0)=0,\ \frac{\partial}{\partial c}F(c_0)=0 \qquad (6)$$

καί $$F(c_0+\Delta c)=0,\ \frac{\partial}{\partial c}F(c_0+\Delta c)=0 \qquad (7)$$

Ἀναπτύσσοντες τά πρῶτα μέλη τῆς χαρακτηριστικῆς (7) κατά Taylor (βλ. σελίς 409, Τόμος Α΄) μέ $h=\Delta c$ λαμβάνομεν:

$$F(c_0)+\frac{\Delta c}{1!}\cdot\frac{\partial F(c_0)}{\partial c}+\frac{\Delta c^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 F(c_0)}{\partial c^2}+\dots=0,\qquad \frac{\partial F(c_0)}{\partial c}+\frac{\Delta c}{1!}\cdot\frac{\partial^2 F(c_0)}{\partial c^2}+\dots=0 \qquad (7')$$

Αἱ χαρακτηριστικαί (6) καί (7) διά $\Delta c \to 0$ ἔχουν <u>κοινά τά σημεῖα τά πληροῦντα τάς τρεῖς ἐξισώσεις</u>:

$$F(c_0)=0,\ \frac{\partial F(c_0)}{\partial c}=0,\ \frac{\partial^2 F(c_0)}{\partial c^2}=0$$

Ὅθεν, ὁ γ.τ. τῶν ἀνωτέρω σημείων, καθώς τό c μεταβάλλεται, εἶναι ἡ γραμμή ἀνακάμψεως.

<u>Παράδειγμα 1ον</u> Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων:

$$3c^2x-3cy+z-c^3=0 \qquad (1)$$

<u>Λύσις:</u> Ἡ παράγωγος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ὡς πρός c εἶναι:

$$6cx-3y-3c^2=0 \qquad (2)$$

Ἀρκεῖ νά ἀπαλείψωμεν τήν c μεταξύ τῶν (1) καί (2) ἤ μεταξύ τοῦ ἰσοδυνάμου συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} 2cx-y-c^2&=0\\ c^2x-2cy+z&=0\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Τοῦτο μᾶς δίδει:

$$\left.\begin{aligned} -(y^2-xz)&=c^2(y-x^2)\\ (y-x^2)c&=\frac{z-xy}{2}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Τελικώς έκ τοῦ (4) λαμβάνομεν:

$$4(x^2-y)(y^2-xz)-(xy-z)^2=0 \qquad (5)$$

δηλ. μία ἐπιφάνεια 4ου βαθμοῦ.

Διά νά εὕρωμεν τήν γραμμήν άνακάμψεως τῆς περιβαλλούσης άρκεῖ νά άπαλείψωμεν τό c μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καί τῆς παραγώγου τῆς (2) ὡς πρός c, δηλ. τῆς ἐξισώσεως $x-c=0$ (6).

Τελικῶς εὑρίσκομεν: $x=c, y=c^2, z=c^3$.

2ο/. Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιφανειῶν:

$$x^2+y^2=4c(z-c) \qquad (1)$$

<u>Λύσις</u>: Ἡ (1) παραγωγιζομένη ὡς πρός c δίδει:

$$-4z+8c=0 \qquad (2)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῆς c μεταξύ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$x^2+y^2=z^2 \qquad (3)$$

Ἡ (3) παριστᾶ μίαν κωνικήν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς[1] μέ ἄξονα τόν Oz καί τῆς ὁποίας ἡ γενέτειρα σχηματίζει μέ τόν ἄξονα Oz γωνίαν $45°$.

ΙΙ. Περιβάλλουσα διπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιφανειῶν.

Θεωροῦμεν τήν ἐξίσωσιν:

$$F(x,y,z,C_1,C_2)=0 \qquad (1)$$

ἡ ὁποία παριστᾶ ἐπιφανείας S ἐξαρτωμένας ἀπό δύο παραμέτρους C_1 καί C_2. Δέν ὑπάρχει γενικῶς ἐπιφάνεια ἐφαπτομένη πασῶν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῆς τῆς οἰκογενείας κατά μῆκος μιᾶς καμπύλης γραμμῆς. Θά ἀναζητήσωμεν ἐάν ὑπάρχη μία ἐπιφάνεια E ἐφαπτομένη ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰκογενείας (1) εἰς ἕνα σημεῖον καί ὄχι κατά μῆκος μιᾶς καμπύλης.

Ἐξ ὁρισμοῦ, <u>θά λέγωμεν ὅτι μία ἐπιφάνεια</u> E <u>εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς διπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιφανειῶν</u> (1) <u>ἐάν εἰς κάθε σημεῖον</u> P <u>τῆς</u> E <u>ἡ ἐπιφάνεια</u> E <u>ἐφάπτεται μιᾶς ἐπιφανείας τῆς οἰκογενείας</u> (1) <u>εἰς τρόπον ὥστε,</u>

---

1) *Μία κωνική ἐπιφάνεια μέ ἀρχήν τό O (0,0,0) δύναται νά παρασταθῆ μέ τήν ἐξίσωσιν* $F(x,y,z)=0$, *ὅπου ἡ F ὁμογενής συνάρτησις ὡς πρός* x,y,z.

καθώς τό P κινεῖται ἐπί τῆς E αἱ παραμετρικαί τιμαί C_1, C_2 ἀντιστοχοῦσαι εἰς τήν ἐπιφάνεια ἐφαπτομένην τῆς E εἰς τό P κινοῦνται εἰς ἕνα χωρίον τοῦ $C_1 C_2$ ἐπιπέδου καί ἐπί πλέον εἰς διάφορα σημεῖα (C_1, C_2) ἀντιστοιχοῦν διάφορα σημεῖα P τῆς E.

Μία ἐπιφάνεια τότε τῆς οἰκογενείας ἐφάπτεται τῆς περιβαλλούσης εἰς ἕνα σημεῖον καί ὄχι κατά μῆκος μιᾶς ὁλοκλήρου καμπύλης

Ἀποδεικνύεται ὅτι, τό σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐπιφανείας τῆς οἰκογενείας μετά τῆς περιβαλλούσης πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τάς ἐξισώσεις.

$$F(x,y,z,C_1,C_2)=0, \quad F'_{C_1}(x,y,z,C_1,C_2)=0, \quad F'_{C_2}(x,y,z,C_1,C_2)=0 \quad (2)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παραμέτρων C_1 καί C_2 μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (2) ἔχομεν εἴτε τήν τήν ἐξίσωσιν τῆς περιβαλλούσης ἡ ὁποία ἐν γένει εἶναι μία ἐπιφάνεια εἴτε τόν γ.τ. τῶν ἰδιαζόντων σημείων τῆς οἰκογενείας δηλ. τῶν σημείων διά τά ὁποῖα ἔχομεν: $F=0$, $F_x=F_y=F_z=0$.

Ἀπό τάς ἐξισώσεις (2) δυνάμεθα γενικῶς νά εὕρωμεν τό σημεῖον ἐπαφῆς ἑκάστης ἐπιφανείας χωριστά διδόντες τάς ἀντιστοίχους τιμάς εἰς τάς παραμέτρους C_1, C_2.

Παράδειγμα. Ἡ οἰκογένεια τῶν σφαιρῶν μέ μοναδιαία ἀκτῖνα καί τῶν ὁποίων τά κέντρα εὑρίσκονται ἐπί τοῦ xy – ἐπιπέδου δίδεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$F(x,y,z,C_1,C_2)=(x-C_1)^2+(y-C_2)^2+z^2-1=0 \quad (1)$$

Διά νά εὕρωμεν τήν περιβάλλουσα ἀρκεῖ νά ἀπαλείψωμεν τά C_1, C_2 μεταξύ τῆς ἐξισώσεως (1) καί τῶν ἐξισώσεων $\frac{\partial F}{\partial C_1}=-2(x-C_1)=0$ καί $\frac{\partial F}{\partial C_2}=-2(y-C_2)=0$.

Ἡ ἀπαλοιφή δίδει $z^2=1$ ἤ $z=\pm 1$ ἤτοι ἡ περιβάλλουσα εἶναι δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρός τό ἐπίπεδον oxy.

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:

1. Νά διερευνηθοῦν τά ἀνώμαλα σημεῖα τῶν κάτωθι καμπύλων καί νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων εἰς αὐτά:

α) $F(x,y)=ax^3+\beta y^3-\gamma xy=0$, β) $F(x,y)=(1+e^{1/x})y-x=0$

γ) $F(x,y)=(y^2-2x^2)^2-x^5=0$, δ) $F(x,y)=y^2(2a-x)-x^3=0$

ε) $F(x,y, \quad (y-2x)^2-x^5=0$, στ) $F(x,y)=(x^2+y^2)(x-2a)+a^2x=0$

η) $F(x,y \quad x^2+y^2)^2-y(3x^2-y^2)=0$, θ) $F(x,y)=x^4+y^4+y^3-xy^3-xy^2=0$.

2. Ὀρθῆς γωνίας ἡ κορυφὴ κινεῖται ἐπὶ τοῦ ου καὶ ἡ μία πλευρὰ διέρχεται διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου $E(a,0)$ τοῦ ox. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν: $x\sigma\upsilon\nu a + y\eta\mu a - f(a) = 0$, ὅπου $f(a)$ δοθεῖσα συνάρτησις τῆς γωνίας a.
<u>Ἐφαρμογή</u>: $f(a) = \ell\eta\mu a\sigma\upsilon\nu a$.

4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν κύκλων μὲ μοναδιαῖα ἀκτῖνα διερχομένων διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας $x^2+y^2=1$.

5. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν παραβολῶν: i) $(x-c)^2 - 2y = 0$, ii) $y^2 - 2(c+1)x + c^2 = 0$.

6. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν καμπύλων: $(x-c)^3 - y^2 = 0$.

7. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐλλείψεων:

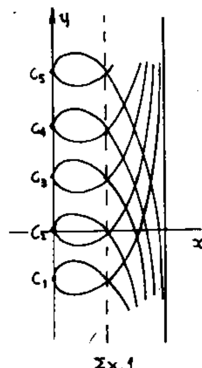
$$F(x,y,a,\beta) = x^2\beta^2 + y^2a^2 - a^2\beta^2 = 0$$

i) Ὅταν $\pi a\beta = c$, ii) Ὅταν $a+\beta = c$

8. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν στροφοειδῶν:

$$\left[x^2 + (y-c)^2\right](x-2) + x = 0 \quad (\beta\lambda.\ \Sigma\chi.1)$$

(Ἀπάντ. Ἡ εὐθεῖα $x=0$ δηλ. ὁ ἄξων τῶν y εἶναι ἡ μόνη περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας. Ἐνῷ ἡ $x=1$ διέρχεται διὰ τῶν διπλῶν σημείων τῆς οἰκογ. τῶν καμπύλων).



Σχ. 1

9 Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν παραβολῶν $y = -\frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{V_0^2\sigma\upsilon\nu^2 t} + x\varepsilon\varphi t$ (t: παράμετρος, V_0, g σταθεραί)
(Ἀπάντ: $y = -\frac{g}{2}\,\frac{x^2}{V_0^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{V_0^2}{g}$: παραβολὴ ἀσφαλείας).

10. Ἔστω $y=f(x)$ μία ἐπίπεδος γραμμὴ καὶ τὸ σημεῖον M ἐπ' αὐτῆς. Ἔστωσαν $M\Pi$ καὶ MP αἱ προβολαὶ τοῦ M ἐπὶ τῶν ἀξόνων ox, oy ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας ΠP (παράμετρος νὰ ληφθῇ τὸ x τοῦ σημείου M).

11. Νά ὁρισθῆ ἡ συνάρτησις $P(\theta)$ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα $x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta = P(\theta)$ νά ἐφάπτεται πάντοτε τῆς καμπύλης (γ) τῆς ἐχούσης ἐξισώσεις: $x = t^2$, $y = t^3$.

(Ἀπάντ. $P(\theta) = 4\sigma\upsilon\nu^3\theta / 27\eta\mu\theta$).

12. Ἔστωσαν $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης (γ). Καλοῦμεν ***ἐνειλιγμένην*** τῆς (γ) μίαν καμπύλην (γ^*), ἥτις εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν καθέτων τῆς (γ). Ἡ δέ καμπύλη (γ) καλεῖται ***ἐξειλιγμένη*** τῆς (γ^*).

Ὡς γνωστόν αἱ κάθετοι τῆς (γ) δίδονται ὑπό τῆς ἐξισώσεως $\{x - \varphi(t)\}\cdot\varphi'(t) + \{y - \psi(t)\}\cdot\psi'(t) = 0$ (1) t: παράμετρος.

Παραγωγίζοντες τήν (1) ὡς πρός t λαμβάνομεν:

$$\{x - \varphi(t)\}\varphi''(t) + \{y - \psi(t)\}\psi''(t) - \varphi'^2(t) - \psi'^2(t) - \psi = 0. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) ἐπιτυγχάνομεν τάς κάτωθι παραμετρικάς ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) - \psi'(t)\frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'} = \varphi - \frac{\psi'\rho}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \\ y &= \psi(t) + \varphi'(t)\frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'} = \psi + \frac{\varphi'\rho}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ὅπου $\rho = \dfrac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}$ δηλ. ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῆς καμπύλης. Αἱ (3) εἶναι αἱ ὑπό παραμετρικήν μορφήν ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης τῆς $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Συσχετίζοντες τούς τύπους (3) μετά τῶν τύπων πού δίδουν τάς συντεταγμένας τοῦ κέντρου καμπυλότητος μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης (βλ. Τόμος Ι, σελ. 587) παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ἐνειλιγμένη τῆς (γ) δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ὁ γ.τ. τῶν κέντρων καμυλότητος ταύτης.

13. Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιφανειῶν:

i) $y^2 - z^2 - 2c(x - c) = 0$ ii) $x\sigma\upsilon\nu t + y\eta\mu t + z = t$, t: παράμετρος.

14. **Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων $x\eta\mu a - y\sigma\upsilon\nu a + z = 0$ καθώς καί ἡ γραμμή ἀνακάμψεως τῆς περιβαλλούσης.**

15. Δείξατε ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ἡ ἴδια ἡ ἐπιφάνεια.

16. Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν συντεταγμένων ἐπί τήν ἀρχήν εἶναι σταθερόν.

17. Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐλλειψοειδῶν ἐκ περιστροφῆς $\beta^2x^2+a^2(y^2+z^2)=a^2\beta^2$, ὅταν αἱ παράμετροι α καί β συνδέωνται διά τῆς σχέσεως: $a^2+\beta^2=k^2$.

18. Ἔστω ἡ οἰκογένεια τῶν σφαιρῶν:

$$(x-a\sigma\upsilon\nu\varphi)^2+(y-a\eta\mu\varphi)^2+z^2-R^2=0$$

ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς τό σύνολον τῶν σφαιρῶν σταθερᾶς ἀκτῖνος R τῶν ὁποίων τά κέντρα εὑρίσκονται ἐπί τῆς περιφερείας $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἀνωτέρω σφαιρῶν (φ: παράμετρος) καθώς καί ἡ γραμμή ἀνακάμψεως ταύτης.

(Ἀπάντ. Ἡ περιβάλλουσα εἶναι $(x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$, ἥτις εἶναι μία σπειροειδής ἐπιφάνεια. Ἡ γραμμή ἀνακάμψεως εἶναι $z^2+a^2-R^2=0$, δηλ. ἡ γραμμή ἀνακάμψεως ἀποτελεῖται ἀπό δύο σημεῖα πραγματικά ἤ φανταστικά, καθ' ὅσον τό $|a|<R$ ἤ $|a|>R$).

(19.) Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιφανειῶν $F(x,y,z,c_1,c_2)=0$, ὅπου c_1,c_2 συνδέονται διά τῆς σχέσεως: $\varphi(c_1,c_2)=0$.

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα οἰκογένεια δύναται νά θεωρηθῆ ὡς μονοπαραμετρική μέ παράμετρον τήν c_1 θεωροῦντες τήν c_2 ὡς πεπλεγμένην συνάρτησιν τῆς c_1 ὁριζομένην ὑπό τῆς ἐξισώσεως $\varphi(c_1,c_2)=0$. Ὅθεν ἡ περιβάλλουσα θά ὁρίζεται ἀπό τήν ἐξίσωσιν $F=0$ (1) καί ἀπό τήν $F_{c_1}+\frac{dc_2}{dc_1}\cdot F_{c_2}=0$ (2), ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς (1) διά παραγωγίσεως ὡς πρός c_1.

Ἐξ ἄλλου ἐπειδή $\varphi(c_1,c_2)=0$ θά ἔχωμεν διά παραγωγίσεως ὡς πρός c_1: $\varphi_{c_1}+\frac{dc_2}{dc_1}\cdot\varphi_{c_2}=0$ (3). Ἀπαλείφοντες μεταξύ τῶν (2) καί (3) τό $\frac{dc_2}{dc_1}$ λαμβάνομεν: $F_{c_1}\varphi_{c_2}-F_{c_2}\varphi_{c_1}=0$ (4). Ἡ περιβάλλουσα λοιπόν ὁρίζεται ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

$$F=0,\quad \varphi=0,\quad F_{c_1}\varphi_{c_2}-F_{c_2}\varphi_{c_1}=0$$

20. Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων τά ὁποῖα κόπτουν τούς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, εἰς τρόπον ὥστε τό ἑκάστοτε σχηματιζόμενον τετράεδρον νά ἔχη σταθερόν ὄγκον V.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

§ 0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΤΙΚΑΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ $\mathbb{R}^2$

Προκειμένου νά ὁρίσωμεν τό διπλό ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀπαραίτητον νά δώσωμεν ἐν συντομίᾳ μερικούς τοπολογικούς ὁρισμούς ἀναφερομένους εἰς τό ἐπίπεδον οxy, δηλ. εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^2$. Τινάς ἐξ αὐτῶν τούς ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τό Κεφάλαιον I §§ 2,4.

Θεωροῦμεν τό ἐπίπεδον οxy καί δύο σημεῖα αὐτοῦ, ἔστω $\alpha=(x_1, y_1)$ καί $\beta=(x_2, y_2)$. Ὡς γνωστόν, ἡ ἀπόστασις d τῶν α καί β δίδονται ὑπό τοῦ τύπου:

$$d\,(\alpha,\beta) = \left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right]^{1/2}.$$

Τό σύνολον $E=\left\{(x,y): (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<\varepsilon^2\right\}$ καλεῖται ἕνας ***ἀνοικτός κύκλος*** κέντρου (α,β) καί ἀκτῖνος ε. Ὁ ἀνωτέρω κύκλος λαμβάνεται καί ὡς μία ε-<u>περιοχή</u> ἤ ἁπλῶς <u>περιοχή</u> τοῦ σημείου (α,β).

Ἕνα σημεῖον α ἑνός συνόλου $A\subset\mathbb{R}^2$ θά καλῆται ***ἐσωτερικόν*** σημεῖον τοῦ A, ἐάν ὑπάρχῃ μία ε-περιοχή τοῦ α κειμένη ἐντός τοῦ A.

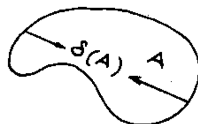
Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τοῦ ἀνοικτοῦ συνόλου τό ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τό Κεφάλαιον I, § 4, σελ. 19 εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, ἵνα ἕνα σύνολον A εἶναι ἀνοικτόν πρέπει καί ἀρκεῖ νά περιέχῃ μόνον τά ἐσωτερικά του σημεῖα.

Ἕνα σημεῖον α καλεῖται ***συνοριακόν*** τοῦ συνόλου A, ἐάν κάθε περιοχή αὐτοῦ περιέχῃ σημεῖα ἀνήκοντα καί μή ἀνήκοντα εἰς τό A. Τό σύνολον τῶν συνοριακῶν σημείων ἑνός συνόλου A καλεῖται ***σύνορον*** τοῦ A.

Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τοῦ κλειστοῦ συνόλου, τόν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τό κεφάλαιον I § 4 θά πρέπει κάθε κλειστόν σύνολον νά περιέχῃ τό σύνορόν του.

Ἔστω τό σύνολον A καί $x,y\in A$. <u>Διάμετρος</u> δ τοῦ συνόλου A καλεῖται ὁ ἀριθμός ὁ ὁριζόμενος ὑπό τοῦ τύπου:

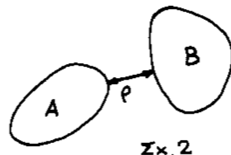
$$\delta(A)=\sup_{(x,y)\in A\times A} d\,(x,y),\ (\beta\lambda.\ \Sigma\chi.\ 1)$$



Σχ. 1

'Εάν A και B είναι δύο τυχόντα σύνολα του επιπέδου, <u>απόστασις</u> ρ τούτων, καλείται ο αριθμός ο οριζόμενος υπό του τύπου:

$$\rho(A,B) = \inf_{x\in A,\, y\in B} d(x,y), \text{(βλ. Σχ. 2)}.$$



Σχ. 2

'Εάν τα A και B έχουν ένα τουλάχιστον κοινόν σημείον, τότε $\rho(A,B) = 0$.

"Ενα σύνολον καλείται ***φραγμένον*** εάν τούτο δύναται να εγκλεισθή εντός κύκλου πεπερασμένης ακτίνος.

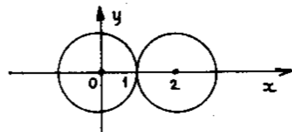
"Ως γνωστόν, ένα σημείον a θα καλείται *οριακόν* του συνόλου A, εάν υπάρχη μία ακολουθία $\{x_n\}$ εκ σημείων του A τοιαύτη ώστε $d(x_n, a) \longrightarrow 0$, $n \uparrow \infty$.

<u>**Θεώρημα VII - 0-1**</u> (Διαχωρισιμότητος). 'Εάν A <u>και</u> B <u>είναι δύο κλειστά και φραγμένα σύνολα με μη κοινά σημεία, τότε</u> $\rho(A,B) > 0$.

'Ο ορισμός του συνεκτικού συνόλου που εδώσαμεν εις το κεφάλαιον I § 5 δύναται να διατυπωθή διά τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ κατά έναν πιό εύχρηστον τρόπον ως ακολούθως:

"Ενα σύνολον $G \subset R^2$ θα λέγεται ***συνεκτικόν***, εάν κάθε ζεύγος σημείων του δύναται να ενωθή διά μιας πολυγωνικής γραμμής κειμένης εξ ολοκλήρου εντός του G. "Εν ανοικτόν συνεκτικόν σύνολον θα καλήται ***πεδίον***. Π.χ. το σύνολον $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ είναι ένα πεδίον.

Τό σύνολον $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1$ είτε $(x-2)^2 + y^2 < 1\}$ βλ. Σχ. 1 δεν είναι πεδίον, διότι είναι ανοικτόν, αλλ' ουχί συνεκτικόν.



Σχ. 1

<u>**Θεώρημα VII - 0-2**</u> (Heine-Borel-Lebesgue). <u>"Εστω</u> G <u>ένα κλειστόν και φραγμένον σύνολον του επιπέδου. Υποθέτομεν ότι εις κάθε σημείον</u> P <u>του</u> G <u>αντιστοιχεί ένας ανοικτός κύκλος</u> (P, R_P). <u>Καλούμεν αυτήν την οικογένειαν των κύκλων</u> f. <u>Τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ανοικτών κύκλων εκ της οικογενείας</u> f <u>η οποία καλύπτει το σύνολον G, δηλ. κάθε σημείον του G ανήκει τουλάχιστον εις έναν εκ των πεπερασμένου το πλήθος κύκλων.</u>

Παρατηρήσεις i) Ἀντί τῆς οἰκογενείας ἀνοικτῶν κύκλων δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν μίαν οἰκογένειαν ἀνοικτῶν τετραγώνων ἤ τριγώνων ἤ κάθε τύπο περιοχῆς τῶν σημείων τοῦ G.

ii) Τό ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι θεμελιῶδες διά τήν Ἀνάλυσιν.

iii) Ἡ ὑπόθεσις ὅτι τό G εἶναι κλειστόν καί φραγμένον εἶναι οὐσιώδης.

Ὁ ὁρισμός τῆς ὁμαλῆς συνεχείας πού ἐδώσαμεν εἰς τό κεφάλαιον II § 7 διατυποῦται εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἀκολούθως:

Ὁρισμός VII-0-1. ***Μία συνάρτησις $f(x,y)$ ὡρισμένη καί συνεχής εἰς ἕνα σύνολον S λέγομεν ὅτι εἶναι ὁμαλῶς συνεχής ἐπί τοῦ S, ἐάν διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχη $\delta(\varepsilon)>0$ τοιοῦτον ὥστε $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$, ὅταν $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta(\varepsilon)$ διά κάθε $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S$.***

Θεώρημα VII-0-3. Ἐάν ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι συνεχής εἰς ἕνα κλειστόν καί φραγμένον σύνολον S, τότε ἡ $f(x,y)$ εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ.

Ἡ ὑπόθεσις ὅτι τό S εἶναι κλειστόν εἶναι οὐσιώδης. Π.χ. ἡ συνάρτησις $f(x,y)=\frac{1}{1-(x^2+y^2)}$ εἶναι συνεχής εἰς τό ἀνοικτόν σύνολον $S=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$, ἀλλ' οὐχί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, καθότι αὕτη δέν εἶναι φραγμένη.

§ 1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Τήν ἔννοιαν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνός πολυγωνικοῦ χωρίου τήν θεωροῦμεν γνωστήν ἀ... τήν στοιχειώδη Γεωμετρίαν. Ἐξ ἄλλου αὐτό τό ἐδέχθημεν καί ὅταν ἐπρόκειτο ... ὁρίσωμεν τό ἐμβαδόν ἑνός ἐπιπέδου χωρίου (βλ. Τόμος I σελ. 509-511). Ἤδη θά μελετήσωμεν εἰς τήν παροῦσαν § τήν ἔννοια τοῦ ἐμβαδοῦ ἀναλυτικώτερον, προκειμένου νά χρησιμοποιήσωμεν ταύτην διά τόν ὁρισμόν τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.

Ἔστω F ἕνα τυχόν ἐπίπεδον σχῆμα καί ἄς θεωρήσωμεν πάντα τά πολυγωνικά σχήματα P τά ὁποῖα ἐγκλείονται ὑπό τοῦ F καί πάντα τά πολυγωνικά σχήματα Q τά ὁποῖα ἐγκλείουν τό F.

Διά τά ἀνωτέρω σχήματα P καί Q ἔχομεν: ἐμβαδόν $P\leq$ ἐμβαδοῦ Q

Τά ἐμβαδά τῶν πολυγωνικῶν σχημάτων P προφανῶς φράσσονται ἐκ τῶν ἄνω ἀπό τό ἐμβαδόν ἑνός πολυγωνικοῦ σχήματος, τό ὁποῖον περιέχει τό F καί τά ἐμβαδά τῶν πολυγωνικῶν σχημάτων Q φράσσονται ἐκ τῶν κάτω ἀπό τό ἐμβαδόν ἑνός πολυγωνικοῦ σχήματος τό ὁποῖον κεῖται ἐντός τοῦ F.

Ὅθεν, τά ἐμβαδά τῶν P ἔχουν ἕνα ἀνώτερον πέρας καί τά ἐμβαδά τῶν Q ἔχουν ἕνα κατώτερον πέρας. Οὕτω δυνάμεθα νά ἔχωμεν τούς κάτωθι ἀριθμούς:

$$S_* = S_*(F) = \sup_{P \subset F} (\text{ἐμβ. } P) \qquad (1)$$

$$S^* = S^*(F) = \inf_{Q \supset F} (\text{ἐμβ. } Q) \qquad (2)$$

Προφανῶς ἔχομεν: $S_* \leq S^*$ (3)

Ἐάν $S_* = S^* = S$, τότε αὐτήν τήν κοινήν τιμήν καλοῦμεν ***ἐμβαδόν τοῦ χωρίου*** F. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν θά λέγωμεν ὅτι τό χωρίον F εἶναι ***τετραγωνίσιμον***.

Πρότασις VII-1-1. Ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα F εἶναι τετραγωνίσιμον, ἐάν καί μόνον ἐάν, διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχουν δύο πολυγωνικά σχήματα $P \subset F$ καί $Q \supset F$ τοιαῦτα, ὥστε ἐμβ. Q − ἐμβ. P < ε (1).

Ἀπόδειξις: Πράγματι, ἐάν ὑπάρχουν τοιαῦτα πολυγωνικά σχήματα πληροῦντα τήν σχέσιν (1) θά ἔχωμεν:

$$\text{ἐμβ. } P \leq S_* \leq S^* \leq \text{ἐμβ. } Q \quad (2) \quad \text{ἤ}$$

$$0 \leq S^* - S_* < \varepsilon \qquad (3)$$

Ἐπειδή ἡ (3) ἰσχύει διά κάθε $\varepsilon > 0$ ἕπεται ὅτι $S^* = S_* = S$, ἤτοι τό χωρίον εἶναι τετραγωνίσιμον.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω $S^* = S_*$ καί ἔστω $\varepsilon > 0$. Ὑπάρχει ἕνα πολυγωνικόν σχῆμα P ἐγκλειόμενον ὑπό τοῦ F καί ἕνα πολυγωνικόν σχῆμα Q ἐγκλεῖον τό F τοιαῦτα, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{εμβ. } P \leq S_* \text{ καί } S^* \leq \text{εμβ. } Q \leq S^* + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

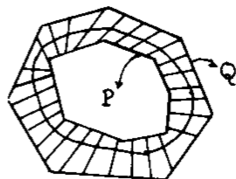
ἤ ἐπειδή $S_* = S^*$ ἔχομεν:

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{εμβ. } P \leq S_* \leq \text{ἐμβ. } Q \leq S_* + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$\text{ἐμβ. } Q - \text{ἐμβ. } P < \varepsilon.$$

Τό σύνολον τῶν σημείων τῶν ἀνηκόντων εἰς τό Q καί συγχρόνως μή ἀνηκόν των εἰς τό P εἶναι ἕνα πολυγωνικόν σχῆμα (βλ. Σχ.1) τό ὁποῖον ἔχει ἐμβαδόν (ἐμβ. Q - ἐμβ. P) καί τό ὁποῖον περιέχει τό σύνορον F. Ὅθεν, ἡ συνθήκη τῆς ἀνωτέρω προτάσεως διατυποῦται ὡς ἀκολούθως:



Σχ.1

Πρότασις VII-1-2. Τό χωρίον F εἶναι τετραγωνίσιμον, ἐάν καί μόνον ἐάν, τό σύνορόν του δύναται νά ἐγκλεισθῆ εἰς ἕνα πολυγωνικόν χωρίον, τό ὁποῖον νά ἔχη ὅσο θέλομεν μικρόν ἐμβαδόν.

Ἕνεκα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως θά λέγωμεν ὅτι, ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα καί εἰδικώτερον μία καμπύλη ἔχει μηδενικόν ἐμβαδόν, ἐάν τοῦτο δύναται νά ἐγκλεισθῆ εἰς ἕνα πολυγωνικόν χωρίον τό ὁποῖον ἔχει ὅσο θέλομεν μικρό ἐμβαδόν.

Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τοῦ μηδενικοῦ ἐμβαδοῦ καί τῆς Προτάσεως VII-1-1 ἔχομεν τήν κάτωθι πρότασιν:

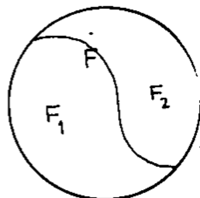
Πρότασις VII-1-3. Ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα εἶναι τετραγωνίσιμον, ἐάν καί μόνον ἐάν, τό σύνορόν του ἔχη μηδενικόν ἐμβαδόν.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι: Μία καμπύλη μέ πεπερασμένον μῆκος ἔχει μηδενικόν ἐμβαδόν.

Μία ἀξιοσημείωτος ἰδιότης τῶν μηδενικῶν ἐμβαδῶν εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

Πρότασις VII-1-4. Ἐάν F_1 καί F_2 εἶναι δύο τετραγωνίσιμα χωρία ἄνευ κοινῶν ἐσωτερικῶν σημείων καί F εἶναι ἡ ἕνωσις αὐτῶν, τότε τό F εἶναι ὁμοίως τετραγωνίσιμον καί ἰσχύει: $\text{ἐμβ. } F = \text{ἐμβ. } F_1 + \text{ἐμβ. } F_2$ (1)

Ἀπόδειξις: Τό ὅτι τό F εἶναι τετραγωνίσιμον ἕπεται ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως καί ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τό σύνορον τοῦ F συνίσταται ἐκ συνόλων μηδενικοῦ ἐμβαδοῦ, τά ὁποῖα τινά εἶναι μέρη τῆς ἑνώσεως τῶν συνόρων τῶν τετραγωνισίμων χωρίων F_1 καί F_2 (βλ. Σχ.2). Ἡ ἀπόδειξις ὁλοκληροῦται ἐάν διαπιστώσωμεν



Σχ.2

τὴν ἰσότητα (1).

Πρὸς τούτοις θεωροῦμεν τὰ πολυγωνικὰ σχήματα P_1 καὶ P_2 ἐγκλειόμενα εἰς τὰ F_1 καὶ F_2 καὶ τὰ πολυγωνικὰ σχήματα Q_1 καὶ Q_2 ἐγκλείοντα τὰ F_1 καὶ F_2 ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ τὰ P_1 καὶ P_2 δὲν τέμνονται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος P τὸ ὁποῖον συνίσταται ἐκ τῶν P_1 καὶ P_2 εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβ. P_1 + ἐμβ. P_2. Ὁμοίως, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος Q τὸ ὁποῖον συνίσταται ἐκ τῶν τεμνομένων πολυγωνικῶν σχημάτων Q_1 καὶ Q_2 εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς τὸ ἐμβ. Q_1 + ἐμβ. Q_2. Οὕτω ἔχομεν:

$$\text{ἐμβ. } P = \text{ἐμβ. } P_1 + \text{ἐμβ. } P_2 \leq \text{ἐμβ. } F \leq \text{ἐμβ. } Q \leq \text{ἐμβ. } Q_1 + \text{ἐμβ. } Q_2 \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\text{ἐμβ. } P_1 + \text{ἐμβ. } P_2 \leq \text{ἐμβ. } F_1 + \text{ἐμβ. } F_2 \leq \text{ἐμβ. } Q_1 + \text{ἐμβ. } Q_2 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι:

$$0 \leq \left|\text{ἐμβ. } F - (\text{ἐμβ. } F_1 + \text{ἐμβ. } F_2)\right| \leq (\text{ἐμβ. } Q_1 - \text{ἐμβ. } P_1) + (\text{ἐμβ. } Q_2 - \text{ἐμβ. } P_2).$$

Ἐπειδὴ αἱ διαφοραὶ (ἐμβ. Q_1 − ἐμβ. P_1), (ἐμβ. Q_2 − ἐμβ. P_2) δύνανται νὰ καταστοῦν ὅσο θέλομεν μικραί, ἕπεται ὅτι:

$$\text{ἐμβ. } F = \text{ἐμβ. } F_1 + \text{ἐμβ. } F_2$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι: <u>ἡ τομὴ δύο τετραγωνισίμων σχημάτων εἶναι ἕνα τετραγωνίσιμο σχῆμα.</u>

§2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ἔστω G ἕνα τετραγωνίσιμο χωρίον καὶ $f(x,y)$ μία φραγμένη συνάρτησις ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ G. Οὕτω ὑπάρχουν δύο ἀριθμοὶ m καὶ M, κάτω καὶ ἄνω φρᾶγμα τῆς $f(x,y)$ ἐπὶ τοῦ G τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$m \leq f(x,y) \leq M \quad \text{διὰ κάθε } (x,y) \in G.$$

Χωρίζομεν τὸ χωρίον G εἰς τετραγωνίσιμα χωρία G_p πεπερασμένου πλήθους τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

i) Ἕκαστον τῶν G_ρ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ G.

ii) Ἕκαστον σημεῖον (x,y) τοῦ G ἀνήκει εἰς ἕνα τουλάχιστον τῶν G_ρ.

iii) Δύο οἱαδήποτε μέρη G_j καί G_k $(j \neq k)$ ἤ δέν ἔχουν κοινά σημεῖα ἤ ἄν ἔχουν τινά κοινά σημεῖα ταῦτα δέν εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα οὔτε τοῦ G_j οὔτε τοῦ G_k.

Ὁ χωρισμός τοῦ τετραγωνισίμου χωρίου G εἰς τετραγωνίσιμα χωρία G_ρ ἔχοντα τάς ἀνωτέρω ἰδιότητας καλεῖται *διαμέρισις* τοῦ G καί συμβολίζεται αὕτη διά τοῦ $\mathfrak{D}$, τά δέ G_ρ καλοῦνται *στοιχεῖα* τῆς $\mathfrak{D}$.

Μία διαμέρισις $\mathfrak{D}'$ καλεῖται *λεπτοτέρα* τῆς $\mathfrak{D}$, ἐάν ἡ $\mathfrak{D}'$ προκύπτη ἀπό τήν $\mathfrak{D}$ μέ περαιτέρω διαίρεσιν τῶν στοιχείων G_ρ τῆς $\mathfrak{D}$ ἤ ὅπερ ἰσοδυνάμως κάθε στοιχεῖον G_ρ τῆς $\mathfrak{D}$ εἶναι εἴτε ἕνα στοιχεῖον τῆς $\mathfrak{D}'$ εἴτε ἡ ἕνωσις διαφόρων στοιχείων αὐτῆς.

Θεωροῦμεν τό ἄθροισμα τῆς μορφῆς:

$$\sigma = \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho)\, \Delta S_\rho \qquad (1)$$

ὅπου ΔS_ρ παριστᾶ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου G_ρ καί (ξ_ρ, η_ρ) εἶναι ἕνα τυχόν σημεῖον ἀνῆκον εἰς τό G_ρ. Ἄθροισμα τῆς μορφῆς (1) καλεῖται *ἄθροισμα τοῦ Riemann* ὡς πρός τήν συνάρτησιν $f(x,y)$ καί τό χωρίον G, ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$.

Ἐάν D παριστᾶ τήν μεγίστην τῶν διαμέτρων $\delta(G_\rho)$ τῶν χωρίων G_ρ, ἡ ποσότης D καλεῖται *λεπτότης τῆς διαμερίσεως*.

Ὁρισμός III-2-1. ***Ἕνας ἀριθμός J θά λέγωμεν ὅτι εἶναι τό ὅριον τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Riemann (1) καθώς τό $D \to 0$, ἐάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἕνας ἀριθμός $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ μέ $D < \delta(\varepsilon)$ καί κάθε ἐκλογή τῶν σημείων $(\xi_\rho, \eta_\rho) \in G_\rho$ νά ἔχωμεν:***

$$\left| \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho)\, \Delta S_\rho - J \right| < \varepsilon .$$

Ἐάν ὑπάρχη ὁ ἀριθμός J, οὗτος εἶναι τό ὅριον:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ D \to 0}} \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho)\, \Delta S_\rho$$

τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Riemann καί καλεῖται διπλό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $f(x,y)$ ἐπί τοῦ χωρίου G συμβολιζόμενον οὕτω: $\iint_G f(x,y)\,dS$ ἤ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$.

Ὥστε, $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ D\to 0}} \sum\limits_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho,\eta_\rho)\,\Delta S_\rho$

Ἐάν λοιπόν ὑπάρχῃ τό διπλό ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x,y)$ ἐπί τοῦ χωρίου G, αὐτη θά καλῆται ***ὁλοκληρώσιμος*** ἐπί τοῦ G, ἡ δέ ἔκφρασις $f(x,y)ds$ ἤ $f(x,y)dxdy$ καλεῖται ***στοιχεῖον τῆς ὁλοκληρώσεως***.

Τό G καλεῖται συνήθως καί ***πεδίον*** τῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἐάν $f(x,y)=1$ διά κάθε $(x,y)\in G$, τότε:

$$\iint\limits_G dx\,dy = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ D\to 0}} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \Delta S_\rho = \text{ἐμβ. } G.$$

§3. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΥΠΑΡΞΕΩΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ὡρισμένη ἐπί τοῦ τετραγωνισίμου χωρίου G καί $\mathfrak{D}$ μία διαμέρισις αὐτοῦ. Ἄς συμβολίσωμεν διά M_ρ καί m_ρ τό ἀνώτερον καί κατώτερον πέρας τῆς $f(x,y)$ ἐπί τῶν τετραγωνισίμων χωρίων G_ρ πού προκύπτουν ἐκ τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$.

Διά τήν δοθεῖσαν συνάρτησιν $f(x,y)$ σχηματίζομεν τά ἀθροίσματα:

$$\Omega^*(\mathfrak{D}) = \sum_{\rho=1}^{n} M_\rho\cdot\Delta S_\rho \qquad (1)$$

$$\Omega_*(\mathfrak{D}) = \sum_{\rho=1}^{n} m_\rho\,\Delta S_\rho \qquad (2)$$

ὅπου τό ΔS_ρ εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου G_ρ.[1]

Τά ἀθροίσματα (1) καί (2) καλοῦνται ***ἄνω καί κάτω ἄθροισμα τοῦ Darboux τῆς f ἀντιστοιχοῦντα εἰς τήν διαμέρισιν*** $\mathfrak{D}$.

Ἔστω ἕνα σημεῖον $(\xi_\rho,\eta_\rho)\in G_\rho$ καί $f(\xi_\rho,\eta_\rho)$ ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως $f(x,y)$ θά ἔχωμεν:

$$\Omega_*(\mathfrak{D}) = \sum_{\rho=1}^{n} m_\rho\,\Delta S_\rho \le \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho,\eta_\rho)\,\Delta S_\rho \le \sum_{\rho=1}^{n} M_\rho\cdot\Delta S_\rho = \Omega^*(\mathfrak{D}).$$

Ὅθεν:

$$\Omega_*(\mathfrak{D}) \le \Omega^*(\mathfrak{D}) \qquad (3)$$

ἤτοι: τό κάτω ἄθροισμα τῆς f τό ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ εἶναι μικρότερον ἤ ἴσον τοῦ ἀντιστοίχου ἄνω ἀθροίσματος αὐτῆς.

Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τοῦ ἀνωτέρω πέρατος διά κάθε $\varepsilon>0$ εἶναι δυνατόν νά εὑ-

1) *Χάριν ἀπλουστεύσεως τῆς γραφῆς γράφομεν* M_ρ *καί* m_ρ *ἀντί* $M_\rho(f)$ *καί* $m_\rho(f)$. *ὁμοίως* $\Omega^*(\mathfrak{D})$ *καί* $\Omega_*(\mathfrak{D})$ *ἀντί* $\Omega^*(f,\mathfrak{D})$ *καί* $\Omega_*(f,\mathfrak{D})$.

ρωμεν ἕνα σημεῖον (ξ_ρ, η_ρ) ἀνῆκον εἰς τὸ G_ρ τῆς διαμερίσεως $\mathcal{D}$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$M_\rho - f(\xi_\rho, \eta_\rho) < \frac{\varepsilon}{S} \qquad (4)$$

ὅπου S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου G.

Λόγῳ τῆς (4) ἔχομεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho)\Delta S_\rho = \sum_{\rho=1}^{n}\left[M_\rho - f(\xi_\rho, \eta_\rho)\right]\Delta S_\rho < \frac{\varepsilon}{S}\cdot\sum_{\rho=1}^{n}\Delta S_\rho = \frac{\varepsilon}{S}\cdot S = \varepsilon .$$

Ὅθεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho)\Delta S_\rho < \varepsilon \qquad (5)$$

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν:

$$\sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho)\Delta S_\rho - \Omega_*(\mathcal{D}) < \varepsilon \quad (6).$$

Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) συμπεραίνομεν ὅτι: <u>Διὰ κάθε διαμέρισιν $\mathcal{D}$ ἐπὶ τοῦ τετραγωνισίμου χωρίου G τὸ ἄθροισμα τοῦ Riemann τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν $f(x,y)$ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ἄνω ἀθροίσματος τῆς f καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου κάτω ἀθροίσματος τῆς f. **Αἱ δὲ διαφοραὶ αἱ διδόμεναι ὑπὸ τῶν (5) καὶ (6)** δύνανται νὰ καταστοῦν ὅσον θέλομεν μικραί.</u>

<u>**Πρότασις VII-3-1.**</u> <u>Ἐὰν ἡ διαμέρισις $\mathcal{D}'$ εἶναι λεπτοτέρα τῆς $\mathcal{D}$, τότε θὰ ἔχωμεν:</u> $\Omega_*(\mathcal{D}) \leq \Omega_*(\mathcal{D}') \leq \Omega^*(\mathcal{D}') \leq \Omega^*(\mathcal{D})$.

<u>**Ἀπόδειξις:**</u> Κάθε στοιχεῖον G_ρ τῆς διαμερίσεως $\mathcal{D}$ εἶναι ἡ ἕνωσις κάποιων στοιχείων $G'_{\rho\kappa}$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \lambda_i$ τῆς $\mathcal{D}'$.

Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν:

$$\Delta S_\rho = \sum_{\kappa=1}^{\lambda_i} \Delta S'_{\rho\kappa}, \text{ ὅπου } \Delta S'_{\rho\kappa} \text{ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ } G'_{\rho\kappa}$$

καὶ

$$M_\rho \geq M_{\rho\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \ldots, \lambda_i$$

Κάθε στοιχεῖον G'_j θεωρεῖται ὅτι εἶναι ὑποσύνολον ἑνὸς μόνον στοιχείου G_ρ. Ἐπὶ πλέον δὲ θὰ ἔχωμεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) = \sum_{\rho=1}^{n} M_\rho \cdot \Delta S_\rho \geq \sum_{\rho=1}^{n} M_{\rho\kappa}\left(\sum_{\kappa=1}^{\lambda_i}\Delta S'_{\rho\kappa}\right) = \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{\lambda_i} M_{\rho\kappa}\cdot\Delta S'_{\rho\kappa} = \Omega^*(\mathcal{D}') .$$

Ὅθεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) \geq \Omega^*(\mathcal{D}') \qquad (7)$$

Ἀναλόγως:

$$\Omega_*(\mathcal{D}) \leq \Omega_*(\mathcal{D}') \qquad (8)$$

Ἐκ τῶν (7) καί (8) καί ἐπειδή $\mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}') \leq \mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}')$ ἔχομεν τήν ἀποδεικτέαν.

Πρότασις VII-3-2. Ἐάν $\mathfrak{D}_1$ καί $\mathfrak{D}_2$ εἶναι δύο διαμερίσεις τοῦ χωρίου G καί $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_1)$, $\mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_1)$ καί $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_2)$, $\mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_2)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά ἄνω καί κάτω ἀθροίσματα τά ἀντιστοιχοῦντα εἰς τάς ἀνωτέρω διαμερίσεις, τότε θά ἔχωμεν: $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_1) \geq \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_2)$ καί $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_2) \geq \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_1)$, δηλ. κάθε κάτω ἄθροισμα ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν δοθεῖσαν συνάρτησιν $f(x,y)$ εἶναι μικρότερον παντός ἄνω ἀθροίσματος τῆς αὐτῆς συναρτήσεως.

Ἀπόδειξις: Πρός ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω Προτάσεως θεωροῦμεν τήν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$, ἡ ὁποία εἶναι λεπτοτέρα ἀμφοτέρων τῶν διαμερίσεων $\mathfrak{D}_1$ καί $\mathfrak{D}_2$ καί ὡς τοιαύτην λαμβάνομεν, π.χ., αὐτήν ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς τομῆς τῶν στοιχείων ἀμφοτέρων τῶν διαμερίσεων $\mathfrak{D}_1$ καί $\mathfrak{D}_2$. Ἄς καλέσωμεν δέ $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D})$ καί $\mathfrak{L}_*(\mathfrak{D})$ τό ἄνω καί κάτω ἄθροισμα τό ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτήν. Συμφώνως πρός τήν προηγουμένην Πρότασιν θά ἔχωμεν:

$$\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_1) \geq \mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}), \quad \mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_2) \geq \mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}) \quad \text{καί}$$

$$\mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_1) \leq \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}), \quad \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_2) \leq \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D})$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}) \leq \mathfrak{L}^*(\mathfrak{D})$.

Οὕτω λόγῳ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἔχομεν:

$$\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_1) \geq \mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}) \geq \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}) \geq \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_2),$$

ἤτοι:

$$\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_1) \geq \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_2)$$

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν: $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_2) \geq \mathfrak{L}_*(\mathfrak{D}_1)$. ὅ.ἔ.δ.

● Τό σύνολον τῶν ἄνω ἀθροισμάτων $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{D})$ τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς μίαν δοθεῖσαν συνάρτησιν $f(x,y)$ φράσσεται κάτω, διότι ἕν ἄνω ἄθροισμα εἶναι, σύμφωνα πρός τήν προηγουμένην πρότασιν, πάντοτε μεγαλύτερον παντός κάτω ἀθροίσματος. Ὁμοίως τό σύνολον τῶν κάτω ἀθροισμάτων φράσσεται ἄνω, διότι ἕνα κάτω ἄθροισμα εἶναι πάντοτε μικρότερον, κατά τήν προηγουμένην πρότασιν, παντός ἄνω ἀθροίσματος. Ὅθεν, τό σύνολον τῶν ἄνω ἀθροισμάτων τῆς $f(x,y)$, συμφώνως πρός τήν Πρότασιν II-5-1, Τόμος I, σελ. 88, ἔχει ἕνα κατώτερον πέρας καί τό

σύνολον τῶν κάτω ἀθροισμάτων, συμφώνως πρὸς τὸ Ἀξίωμα II-5-1, Τόμος I, σελ. 88, ἔχει ἕνα ἀνώτερον πέρας. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θέσωμεν:

$$\overline{J} = \inf_{\mathfrak{D}} \Omega^*(\mathfrak{D}) \text{ καὶ } \underline{J} = \sup_{\mathfrak{D}} \Omega_*(\mathfrak{D}) \qquad (1).$$

Οἱ ἀριθμοὶ $\overline{J}$ καὶ $\underline{J}$ καλοῦνται ἀντιστοίχως ἄνω καὶ κάτω ***ὁλοκλήρωμα τοῦ Darboux*** ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν συνάρτησιν $f(x,y)$.

<u>Πρότασις VII-3-3</u>. <u>Διὰ τὸ κάτω καὶ ἄνω ὁλοκλήρωμα τοῦ Darboux ἰσχύει $\underline{J} \leq \overline{J}$.</u>

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἔστω ὅτι $\underline{J} > \overline{J}$· τότε ὑπάρχει ἕν $\varepsilon > 0$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\underline{J} - \overline{J} > \varepsilon > 0 \text{ ἢ } \varepsilon - (\underline{J} - \overline{J}) < 0 \qquad (2).$$

Ἐξ ἄλλου, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου πέρατος, ὑπάρχει ἕνα ἄνω ἄθροισμα $\Omega^*(\mathfrak{D}_1)$ καὶ ἕνα κάτω ἄθροισμα $\Omega_*(\mathfrak{D}_2)$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\Omega^*(\mathfrak{D}_1) - \overline{J} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ καὶ } \underline{J} - \Omega_*(\mathfrak{D}_2) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3).$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) λαμβάνομεν:

$$\Omega^*(\mathfrak{D}_1) - \Omega_*(\mathfrak{D}_2) + (\underline{J} - \overline{J}) < \varepsilon \qquad (4)$$

Λόγῳ δὲ τῶν σχέσεων (2) καὶ (4) ἔχομεν:

$$\Omega^*(\mathfrak{D}_1) - \Omega_*(\mathfrak{D}_2) < \varepsilon - (\underline{J} - \overline{J}) < 0 \qquad (5).$$

Τὸ τελευταῖον συμπέρασμα εἶναι ἄτοπον, διότι ἀντιβαίνει πρὸς τὴν πρότασιν VII-3-2 (ἥτις λέγει ὅτι: κάθε ἄνω ἄθροισμα τῆς $f(x,y)$ εἶναι μεγαλύτερον παντὸς κάτω ἀθροίσματος).

• Ἔστω μία διαμέρισις $\mathfrak{D}$ τοῦ χωρίου G εἰς τετραγωνίσιμα χωρία G_ρ μὲ ἀντίστοιχα σύνορα L_ρ. Ἡ ἕνωσις L τῶν συνόρων L_ρ ὅλων τῶν στοιχείων G_ρ τῆς $\mathfrak{D}$ θὰ καλῆται ***σύνορον τῆς διαμερίσεως*** $\mathfrak{D}$, δηλ. εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ:

$$L \underset{\text{ὁρ}}{=} \bigcup_{\rho=1}^{n} L_\rho .$$

Τὰ σύνορα L_ρ ἔχουν ἐμβαδὸν μηδενικὸν διὰ κάθε διαμέρισιν τοῦ χωρίου G εἰς τετραγωνίσιμα χωρία G_ρ. Συνεπῶς καὶ τὸ σύνορον L τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$, ὡς ἕνωσις πεπερασμένου πλήθους συνόρων ἐχόντων μηδενικὸν ἐμβαδόν, θὰ ἔχῃ μηδενικὸν ἐμβαδόν.

Ἐπὶ πλέον τὸ σύνορον L, ὡς πεπερασμένη ἕνωσις κλειστῶν συνόλων, εἶναι κλειστὸν σύνολον.

Λῆμμα VIII-3-1. (Darboux). Τό ἄνω ὁλοκλήρωμα $\overline{J}$ (ἀντ. κάτω ὁλοκλήρωμα $\underline{J}$) εἶναι τό ὅριον τῶν ἄνω (ἀντ. κάτω) ἀθροισμάτων τοῦ Darboux καθώς $D \to 0$.

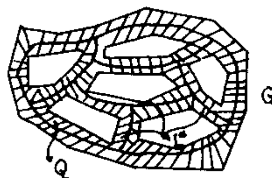
δηλ. $\overline{J} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ D\to 0}} \sum_{\rho=1}^{n} M_\rho \Delta S_\rho$ (ἀντ. $\underline{J} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ D\to 0}} \sum_{\rho=1}^{n} m_\rho \Delta S_\rho$). (ὅπου D παριστᾶ τήν μεγίστην τῶν διαμέτρων $\delta(G_\rho)$ τῶν στοιχείων G_ρ τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$ τοῦ χωρίου G).

Ἀπόδειξις: Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τοῦ ἄνω ὁλοκληρώματος $\overline{J}$ διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει μία διαμέρισις $\mathfrak{D}^*$ τοῦ G τοιαύτη, ὥστε τό ἀντίστοιχον ἄνω ἄθροισμα νά πληροῖ τήν σχέσιν:

$$0 < \overline{\Omega}^*(\mathfrak{D}^*) - \overline{J} < \varepsilon .$$

Ἐγκλωβίζομεν τό σύνορον L^* τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}^*$ ἐντός ἑνός πολυγωνικοῦ σχήματος Q, τό ὁποῖον νά ἔχῃ ἐμβαδόν μικρότερον τοῦ $\frac{\varepsilon}{2M}$, ἔνθα $M = \sup_{(x,y)\in G} |f(x,y)|$, εἰς τρόπον, ὥστε τό L^* νά μήν ἔχῃ κοινά σημεῖα μετά τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος (βλ. Σχ. 1).

Τό σύνορον L^* καί τό σύνορον τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος Q εἶναι δύο κλειστά καί φραγμένα σύνολα μή ἔχοντα κοινά σημεῖα, συνεπῶς, συμφώνως πρός τό θεώρημα VIII-0-1, ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι ἕνας θετικός ἀριθμός ἔστω $a > 0$. Ἤδη ἄς θεωρήσωμεν μίαν αὐθαίρετον διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ τοῦ χωρίου G, τῆς ὁποίας τά στοιχεῖα θά τά παριστῶμεν διά τοῦ G_ρ καί τοιαύτην ὥστε $D < a$.



Σχ. 1

Ἤδη ὑπάρχει μία προφανής ἰδιότης τῶν στοιχείων G_ρ τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$, ἤτοι: Ἐάν G_ρ καί L^* ἔχουν τουλάχιστον ἕνα κοινόν σημεῖον, τότε τό στοιχεῖον G_ρ κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ πολυγωνικοῦ χωρίου Q. Τό ἐσωτερικόν τοῦ πολυγωνικοῦ χωρίου εἰς τό Σχ. 1 εἶναι τό γραμμοσκιασθέν. Τά στοιχεῖα G_ρ τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$ τά ἀνήκοντα εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ πολυγωνικοῦ χωρίου καλοῦνται συνοριακά στοιχεῖα τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ὑπάρχουν στοιχεῖα τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$ τοιαῦτα, ὥστε ἕνα τμῆμα αὐτῶν ἀνήκει εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ πολυγωνικοῦ χωρίου καί ἕνα ἄλλο εἰς τό ἐξωτερικόν αὐτοῦ, τότε θεωροῦμεν τήν διαμέρισιν $\mathfrak{D} \cap Q = \mathfrak{D}_1$, δηλ. τήν

τομήν πάντων τῶν στοιχείων τῆς $\mathfrak{D}$ μετά τοῦ Q, ἡ $\mathfrak{D}_1$ εἶναι λεπτοτέρα τῆς $\mathfrak{D}$. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον πάντα τά στοιχεῖα τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$ (ἤ τῆς $\mathfrak{D}_1$) θά εἶναι συνοριακά καί μή συνοριακά, τά δεύτερα δέ θά τά καλοῦμεν *ἐσωτερικά* στοιχεῖα τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$.

Κάθε ἐσωτερικόν στοιχεῖον θά περιέχεται γνησίως εἰς ἕνα στοιχεῖον τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}^*$, διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἐάν ἐτέμνετο ὑπό δύο στοιχείων τῆς $\mathfrak{D}^*$, τότε θά ἐτέμνετο καί ὑπό τοῦ συνόρου L^*, ἤτοι θά ἦτο συνοριακόν στοιχεῖον, ὅπερ ἄτοπον.

Ἤδη θά δείξωμεν ὅτι διά κάθε διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ μέ $D < a$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἄνω ἄθροισμα $\mathfrak{O}^*(\mathfrak{D})$ μέ διαφορά ἀπό τό $\overline{J}$ μικρότερον τοῦ ε. Διά νά δείξωμεν αὐτό χωρίζομεν τό ἄθροισμα $\mathfrak{O}^*(\mathfrak{D})$ εἰς δύο ὁμάδας ὅρων:

$$\mathfrak{O}^*(\mathfrak{D}) = \sum_{\rho=1}^{n} M_\rho \cdot \Delta S_\rho = \sum{}' M'_\rho \cdot \Delta S'_\rho + \sum{}'' M''_\rho \cdot \Delta S''_\rho,$$

ὅπου ἡ ἄθροισις $\sum'$ ἐπεκτείνεται ἐφ' ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν στοιχείων τῆς διαμερίσεως καί ἡ $\sum''$ ἐπεκτείνεται ἐφ' ὅλων τῶν συνοριακῶν στοιχείων τῆς διαμερίσεως. Ἄς ὑπολογίσωμεν ἤδη χωριστά ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἀθροισμάτων. Τό ἀντίστοιχον ἀνώτερον πέρας M'_ρ δέν εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τό ἀνώτερον πέρας τῶν τιμῶν τῆς $f(x,y)$, ὑποθέτοντες τοῦτο ἐπί τοῦ ἰδίου στοιχείου τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}^*$.

Ἕνεκα τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

$$\sum{}' M'_\rho \Delta S'_\rho \leq \widetilde{\mathfrak{O}}^*(\mathfrak{D}).$$

Ἐπί πλέον ἔχομεν τήν προφανῆ ἀνισότητα:

$$|M''_\rho| \leq M = \sup_{(x,y)\in G} |f(x,y)| \text{ δι' ὅλα τά } \rho$$

καί

$$\sum{}'' \Delta S''_\rho < \varepsilon\mu\beta.\, Q < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Συνεπῶς:

$$\left| \sum{}'' M''_\rho \Delta S''_\rho \right| \not< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ὅθεν, $\mathfrak{O}^*(\mathfrak{D}) = \sum' M'_\rho \cdot \Delta S'_\rho + \sum'' M''_\rho \Delta S''_\rho < \widetilde{\mathfrak{O}}^*(\mathfrak{D}) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{J} + \varepsilon.$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἀνισότητος ἕπεται τό συμπέρασμα

Διά τό κάτω ἄθροισμα θά ἔχωμεν κατ' ἀναλογίαν:

$$\underline{J} - \varepsilon < \mathfrak{O}_*(\mathfrak{D})$$

Θεώρημα VII – 3-1. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ συνάρτησις $f(x,y)$, ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ τετραγωνισίμου χωρίου G, εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ G, εἶναι διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ νὰ ὑπάρχῃ μία διαμέρισις $\mathfrak{D}$ τοῦ χωρίου G τοιαύτη, ὥστε τὰ ἀθροίσματα τοῦ Darboux τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὴν τὴν διαμέρισιν νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν: $\Omega^*(\mathfrak{D}) - \Omega_*(\mathfrak{D}) < \varepsilon$.

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον) Ἔστω ὅτι ἡ $f(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ G καὶ ἔστω J τὸ ὁλοκλήρωμα ταύτης ἐπὶ τοῦ G. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁρίου τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Riemann διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ μὲ $D < \delta(\varepsilon)$ ἡ ἀνισότης

$$\left| J - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho) \Delta S_\rho \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (1)$$

νὰ ἱκανοποιῆται ἀνεξαρτήτως τῆς ἐκλογῆς τῶν (ξ_ρ, η_ρ) ἐπὶ τῶν στοιχείων G_ρ τῆς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ Riemann τῆς $f(x,y)$ ἐπὶ τοῦ G εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ἄνω ἀθροίσματος τῆς f καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου κάτω ἀθροίσματος ταύτης, διὰ τὴν δοθεῖσαν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ μὲ $D < \delta$ δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν τὰ σημεῖα (ξ'_ρ, η'_ρ) καὶ $(\xi''_\rho, \eta''_\rho)$ ἐπὶ τῶν στοιχείων G_ρ τῆς $\mathfrak{D}$ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ ἀνισότητες:

$$\Omega^*(\mathfrak{D}) - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi'_\rho, \eta'_\rho) \Delta S_\rho < \frac{\varepsilon}{4} \text{ καὶ } \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi''_\rho, \eta''_\rho) \Delta S_\rho - \Omega_*(\mathfrak{D}) < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) λαμβάνομεν:

$$\Omega^*(\mathfrak{D}) - \Omega_*(\mathfrak{D}) < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi'_\rho, \eta'_\rho) \Delta S_\rho - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi''_\rho, \eta''_\rho) \Delta S_\rho \right|. \qquad (3)$$

Ἐξ ἄλλου, λόγῳ τῆς (1), ἔχομεν:

$$\left| \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi'_\rho, \eta'_\rho) \Delta S_\rho - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi''_\rho, \eta''_\rho) \Delta S_\rho \right| = \left| \left(J - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi'_\rho, \eta'_\rho) \Delta S_\rho\right) - \left(J - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi''_\rho, \eta''_\rho) \Delta S_\rho\right) \right| \leq$$

$$\leq \left| J - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi'_\rho, \eta'_\rho) \Delta S_\rho \right| + \left| J - \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi''_\rho, \eta''_\rho) \Delta S_\rho \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

Ἡ (3), λόγῳ τῆς (4), δίδει:

$$\Omega^*(\mathfrak{D}) - \Omega_*(\mathfrak{D}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ἱκανόν: Ἔστω ὅτι διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει μία διαμερισις $\mathfrak{D}$ τοιαύτη, ὥστε $\Omega^*(\mathfrak{D}) - \Omega_*(\mathfrak{D}) < \varepsilon$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἄνω καί κάτω ὁλοκληρώματος ἔχομεν: $\overline{J} \leq \Omega^*(\mathfrak{D})$ καί $\underline{J} \geq \Omega_*(\mathfrak{D})$. Συνεπῶς $0 \leq \overline{J} - \underline{J} < \Omega^*(\mathfrak{D}) - \Omega_*(\mathfrak{D}) < \varepsilon$ διά κάθε $\varepsilon > 0$.

Ἄρα $\overline{J} = \underline{J}$.

Ἤδη ἄς παραστήσωμεν διά τοῦ J τήν κοινήν τιμήν τῶν $\overline{J}$ καί $\underline{J}$. Ἐν συνεχεία θά δείξωμεν ὅτι τό J εἶναι τό ὅριον τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Riemann ὅπου τό $D \to 0$, δηλ. τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x,y)$ ἐπί τοῦ χωρίου G. Πρός τούτοις, συμφώνως πρός τό Λῆμμα τοῦ Darboux, τό $J = \lim\limits_{\substack{D \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{\rho=1}^{n} M_\rho \Delta S_\rho = \lim\limits_{\substack{D \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{\rho=1}^{n} m_\rho \Delta S_\rho$.

Ἐξ ἄλλου εἶναι:

$\sum\limits_{\rho=1}^{n} m_\rho \Delta S_\rho \leq \sum\limits_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho) \Delta S_\rho \leq \sum\limits_{\rho=1}^{n} M_\rho \Delta S_\rho$ (5), ὅπου $(\xi_\rho, \eta_\rho) \in G_\rho$. Λαμβάνοντες τά ὅρια τῆς διπλῆς ἀνισότητος (5) μέ $n \uparrow \infty$ καί $D \to 0$ καί ἐπειδή τά ὅρια τῶν δύο ἄκρων εἶναι ἴσα πρός J, ἔπεται ὅτι καί τό $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ D \to 0}} \sum\limits_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho) \Delta S_\rho = J$ (6). Ἀλλά τό ἀριστερόν μέλος τῆς (6) εἶναι τό $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$. Ὅθεν: $J = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$.

§ 4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἐφαρμόζοντες τό Θεώρημα VII-3-1 θά ἐξετάσωμεν ἀκολούθως τήν ὁλοκληρωσιμότητα ὡρισμένων σπουδαίων κατηγοριῶν συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τάς διαφόρους ἐφαρμογάς.

Θεώρημα VII-4-1 Κάθε συνεχής συνάρτησις $f(x,y)$ ὡρισμένη ἐπί ἑνός κλειστοῦ καί φραγμένου χωρίου G εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπ' αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις: Ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ κλειστοῦ καί φραγμένου χωρίου G, κατά συνέπειαν θά εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, ἤτοι: Διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀριθμός $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἄν θεωρήσωμεν δύο τυχόντα σημεῖα $M_1(x_1,y_1)$ καί $M_2(x_2,y_2)$ τοιαῦτα ὥστε: $|M_1 M_2| = [(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]^{1/2} < \delta(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν:

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{S},$$ ὅπου S τό ἐμβαδόν τοῦ G.

Ἤδη χωρίζομεν τό χωρίον G διά μιάς διαμερίσεως $\mathfrak{D}$ τοιαύτης, ὥστε $D < \delta(\varepsilon)$.

'Εφ' ἑκάστου τῶν χωρίων G_ρ θά ἔχωμεν διά τήν $f(x,y)$ λόγω τῆς ὁμαλῆς συνεχείας:
$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{2S}$ διά κάθε ζεῦγος σημείων $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ τοῦ χωρίου G_ρ.
Συνεπῶς θά ὑπάρχουν δύο σημεῖα $(x_0,y_0),(x_0',y_0')$ τοῦ G_ρ διά τά ὁποῖα θά ἰσχύει:

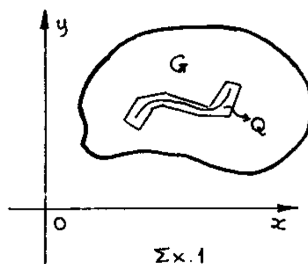
$$f(x_0,y_0)-f(x_0',y_0')=M_\rho-m_\rho<\frac{\varepsilon}{S}.$$

Ὅθεν: $\Omega^*(\mathfrak{D})-\Omega_*(\mathfrak{D})=\sum_{\rho=1}^{n}M_\rho\Delta S_\rho-\sum_{\rho=1}^{n}m_\rho\Delta S_\rho=\sum_{\rho=1}^{n}(M_\rho-m_\rho)\Delta S_\rho<\frac{\varepsilon}{S}\cdot\sum_{\rho=1}^{n}\Delta S_\rho=\frac{\varepsilon}{S}\cdot S=\varepsilon$.

Συμφώνως, λοιπόν, πρός τό θεώρημα VII – 3-1 ἡ $f(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

Θεώρημα VII – 4-2. 'Εάν μία συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι φραγμένη ἐπί ἑνός κλειστοῦ καί φραγμένου χωρίου G καί εἶναι συνεχής παντοῦ ἐπί τοῦ G, δυνατόν ἐκτός ἑνός συνόλου μηδενικοῦ ἐμβαδοῦ, τότε ἡ συνάρτησις εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ G.

'Απόδειξις: 'Εξ ὑποθέσεως ἡ $f(x,y)$ εἶναι φραγμένη ἐπί τοῦ G· αὐτό σημαίνει ὅτι ὑπάρχει μία σταθερά $K>0$ τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν $|f(x,y)|<k$ διά κάθε $(x,y)\in G$. 'Εγκλωβίζομεν τό σύνολον ἐπί τοῦ ὁποίου ἡ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχής ἐντός ἑνός πολυγωνικοῦ σχήματος Q ἐμβαδοῦ μικροτέρου τοῦ $\frac{\varepsilon}{4K}$, εἰς τρόπον ὥστε τό σύνολον ὅπου ἡ $f(x,y)$ εἶναι ἀσυνεχής νά περιέχεται γνησίως ἐντός τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος (βλ. σχ.1). Παριστῶμεν διά τοῦ $\tilde{G}$ τό μέρος τοῦ χωρίου G τό μή εἰσερχόμενον εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ Q. Τά συνοριακά σημεῖα τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος Q, τά ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τό G κεῖνται ἐπί τοῦ $\tilde{G}$, συνεπῶς τό $\tilde{G}$ εἶναι κλειστόν. 'Επειδή ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής εἰς τό κλειστόν καί φραγμένον σύνολον $\tilde{G}$ θά εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ.



Σχ.1

Ὅθεν, ὅπως ἐδείχθη κατά τήν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἀριθμός $\delta(\varepsilon)>0$ τοιοῦτος, ὥστε ἐάν θεωρήσωμεν μίαν διαμέρισιν $\tilde{\mathfrak{D}}$ τοῦ χωρίου $\tilde{G}$ μέ $D<\delta(\varepsilon)$, ἐφ' ἑκάστου στοιχείου $\tilde{G}_\rho$ τῆς ἐν λόγω διαμερίσεως, νά ἔχωμεν: $\sup_{x,y\in\tilde{G}_\rho} f(x,y)-\inf_{x,y\in\tilde{G}_\rho} f(x,y)=M_\rho-m_\rho\leq\frac{\varepsilon}{2S}$, ὅπου S εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ G.
Ἤδη θεωροῦμεν τήν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ τοῦ G τῆς ὁποίας τό πρῶτον στοιχεῖον G_1 συμπίπτει μέ τό Q τά δέ ἄλλα στοιχεῖα εἶναι τά στοιχεῖα τῆς ἀνωτέρω δε-

ωρηθείσης διαμερίσεως ἐπί τοῦ $\bar{G}$. Ὑπολογίζομεν ἤδη τήν διαφοράν

$$\Omega^*(\mathcal{D}) - \Omega_*(\mathcal{D}) = M_1 \Delta S_1 - m_1 \Delta S_1 + \sum_{\rho=2}^{n} (M_\rho - m_\rho) \Delta S_\rho$$

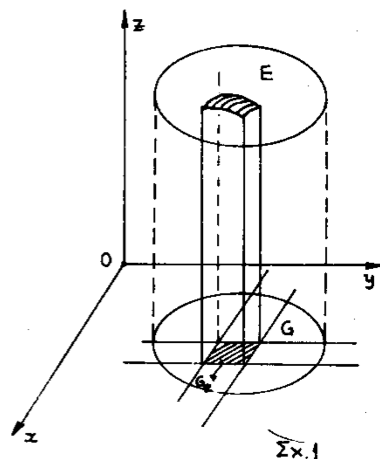
$$< (M_1 - m_1) \cdot \frac{\varepsilon}{4k} + \sum_{\rho=2}^{n} \frac{\varepsilon}{2S} \cdot \Delta S_\rho .$$

Ἀλλά $\quad M_1 - m_1 \leq 2k \quad$ καί $\quad \sum_{\rho=2}^{n} \Delta S_\rho < S$

Ὅθεν : $\quad \Omega^*(\mathcal{D}) - \Omega_*(\mathcal{D}) < 2k \cdot \frac{\varepsilon}{4k} + \frac{\varepsilon}{2S} \cdot S = \varepsilon .$

Οὕτω $\Omega^*(\mathcal{D}) - \Omega_*(\mathcal{D}) < \varepsilon$ διά κάθε $\varepsilon > 0$. Συμφώνως λοιπόν πρός τό θεώρημα VII-3-1 ἡ $f(x,y)$ θά εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

§5. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$.



Σχ. 1

Ἄς θεωρήσωμεν τήν ἐπιφάνειαν εἰς τό σύστημα τῶν ἀξόνων $0xyz$, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $z = f(x,y) \geq 0$, ὑποθέτοντες τήν συνάρτησιν $f(x,y)$ συνεχῆ ἐπί ἑνός πεδίου μεταβολῆς τῶν x καί y. Θεωροῦμεν τό πρισματικόν στερεόν τό ὁποῖον ὁρίζεται: α) Ἀπό ἕνα τμῆμα E τῆς ἀνωτέρω ἐπιφανείας, β) Ἀπό τήν προβολήν G αὐτοῦ τοῦ τμήματος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων oxy καί γ) Ἀπό τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν πού προβάλλει τό περίγραμμα τοῦ τμήματος E τῆς ἐπιφανείας εἰς τό σύνορον τοῦ G ἐπί τοῦ ἐπιπέδου oxy (βλ. Σχ. 1). Ἤδη προτιθέμεθα νά ὁρίσωμεν τόν ὄγκον τοῦ ἀνωτέρω στερεοῦ. Πρός τοῦτοις θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν $\mathcal{D}$ τοῦ χωρίου G ὑπό εὐθειῶν παραλλήλων πρός τούς ἄξονας ox, oy καί ἐφ' ἑκάστου στοιχείου (ὀρθογωνίου) G_ρ αὐτῆς λαμβάνομεν ἕνα τυχόν σημεῖον (ξ_ρ, η_ρ) καί ἀκολούθως σχηματίζομεν τό ἄθροισμα:

$$\sigma_n = \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho)\, \Delta S_\rho \qquad (1)$$

ὅπου ΔS_ρ εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου G_ρ.

Προφανῶς τό ἀνωτέρω ἄθροισμα γεωμετρικῶς παριστᾶ ἕνα ἄθροισμα ὄγκων ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων. Πράγματι, τό $f(\xi_\rho,\eta_\rho)\,\Delta S_\rho$ παριστᾶ τόν ὄγκον (γνωστό ἐκ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας) τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ βάσιν ἕνα ὀρθογώνιον ἐμβαδοῦ ΔS_ρ καί ὕψος ἴσον πρός τήν τιμήν $f(\xi_\rho,\eta_\rho)$.

Ἔστω ἤδη τό $n\uparrow\infty$ συγχρόνως δέ καί τό $D\to 0$, τότε ὑπάρχει τό $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ D\to 0}}\sum\limits_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho,\eta_\rho)\,\Delta S_\rho$ καί ἐξ ὁρισμοῦ καλεῖται ὄγκος V τοῦ ἀνωτέρω πρισματικοῦ στερεοῦ. Ἐξ ἄλλου τό ἀνωτέρω ὅριον εἶναι τό $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$.

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ ἀνωτέρω στερεοῦ εἶναι $V=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ (2)

§ 6. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Αἱ βασικαί ἰδιότητες τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι τελείως ἀνάλογοι μέ τάς ἀντιστοίχους ἰδιότητας τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Διά τοῦτο θά ἀναφέρωμεν ἁπλῶς αὐτάς χωρίς νά δώσωμεν τάς ἀποδείξεις των.

I. Ἐάν αἱ συναρτήσεις $f_1(x,y)$ καί $f_2(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπί τοῦ χωρίου G, τότε καί ἡ συνάρτησις $c_1 f_1(x,y)+c_2 f_2(x,y)$, ὅπου c_1, c_2 τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί, εἶναι ἐπίσης ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ G καί ἰσχύει:

$$\iint\limits_G \left[c_1 f_1(x,y)+c_2 f_2(x,y)\right]dx\,dy = c_1\iint\limits_G f_1(x,y)\,dx\,dy + c_2\iint\limits_G f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συνάγεται ὅτι:

Τό σύνολον τῶν ὁλοκληρωσίμων συναρτήσεων ἐπί τοῦ G ἀποτελεῖ ἕναν διανυσματικόν χῶρον.

IIα. Ἐάν διά τήν ὁλοκληρώσιμον συνάρτησιν $f(x,y)$ ἐπί τοῦ χωρίου G ἰσχύη $f(x,y)\geq 0$, τότε θά εἶναι καί $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy\geq 0$.

Συνέπεια τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος εἶναι ὅτι

II$_\beta$. Ἐάν αἱ $f_1(x,y)$ καί $f_2(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπί του χωρίου G καί εἶναι $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, τότε θά εἶναι καί $\iint_G f_1(x,y)dxdy \leq \iint_G f_2(x,y)dxdy$.

III. Εἶναι $\left|\iint_G f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_G |f(x,y)|dxdy$.

IV. Ἐάν εἶναι $\iint_G f(x,y)dxdy = 0$ καί ἡ $f(x,y)$ εἶναι μή ἀρνητική, τότε ἡ $f(x,y)=0$ διά κάθε $x,y \in G$, ἐκτός ἑνός συνόλου μηδενικοῦ ἐμβαδοῦ.

V. Ἔστω G' ἕν ἐσωτερικόν χωρίον τοῦ G. Ἐάν ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ G καί ἐάν $\iint_{G'} f(x,y)dxdy=0$ διά κάθε χωρίον G', τότε ἡ $f(x,y)$ εἶναι μηδέν εἰς κάθε σημεῖον τοῦ G.

Πράγματι, ἐάν ἡ $f(x,y)$ ἦτο θετική εἰς ἕνα σημεῖον M, τότε θά ὑπῆρχεν μία περιοχή G' περιέχουσα τό σημεῖον M ἐντός τῆς ὁποίας, ἕνεκα τῆς συνεχείας τῆς $f(x,y)$, ἡ $f(x,y)$ θά ἦτο θετική, τότε τό ὁλοκλήρωμα $\iint_{G'} f(x,y)dxdy$ δέν θά ἦτο μηδέν, ὅπερ ἄτοπον.

VI. Ἐάν G_1 καί G_2 εἶναι δύο χωρία τοιαῦτα, ὥστε $G_1 \cap G_2 = D$, ἔνθα τό ἐμβαδόν τοῦ D εἶναι μηδενικόν καί $G=G_1 \cup G_2$, τότε $\iint_G f(x,y)dxdy=\iint_{G_1} f(x,y)dxdy+\iint_{G_2} f(x,y)dxdy$.

VII. Ἐάν ἡ $f(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ G καί ἔστω S τό ἐμβαδόν τοῦ G καί M καί m τό ἀνώτερον καί κατώτερον πέρας τῆς $f(x,y)$ ἐπί τοῦ G, τότε θά εἶναι:

$$m \cdot S \leq \iint_G f(x,y)dxdy \leq M \cdot S.$$

VIII, (Θεώρημα Μέσης τιμῆς) Ἔστω ἡ συνεχής συνάρτησις $f(x,y)$ ἐπί τοῦ κλειστοῦ καί φραγμένου χωρίου G τό ὁποῖον ὑποθέτομεν συνεκτικόν. Τότε ὑπάρχει ἕν τουλάχιστον σημεῖον $(\xi,\eta) \in G$ τοιοῦτον, ὥστε $\iint_G f(x,y)dxdy = S \cdot f(\xi,\eta)$, ἔνθα S τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου G.

Ἀπόδειξις: Εἶναι γνωστόν, ὅτι τό ἀνώτερον πέρας M καί τό κατώτερον πέρας m εἶναι αἱ τιμαί πού λαμβάνει ἡ συνεχής συνάρτησις εἰς κάποια σημεῖα τοῦ πε-

δίου ὁρισμοῦ της. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τάς ἀνωτέρω τιμάς λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς τά σημεῖα (x_1, y_1) καί (x_2, y_2) ἀντιστοίχως καί τά ὁποῖα ὑποθέτομεν ὅτι κεῖνται εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ χωρίου G. Ἐπειδή τό χωρίον G ὑπετέθη συνεκτικόν τά σημεῖα ταῦτα δύνανται νά συνδεθοῦν διά μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς κειμένης ἐντός τοῦ G. Ὥστε διά τά σημεῖα (x_1, y_1) καί (x_2, y_2) τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ καθίσταται ἴση πρός M καί m ἀντιστοίχως. Ἐπειδή δέ ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής κατά μῆκος αὐτῆς τῆς γραμμῆς, θά λαμβάνῃ μαζύ μέ τάς τιμάς M καί m καί πάσας τάς ἐνδιαμέσους τοιαύτας. Ὅθεν, δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἐπ' αὐτῆς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἕνα σημεῖον (ξ, η) τοιοῦτον, ὥστε δι' αὐτό ἡ συνάρτησις νά λαμβάνῃ τήν τιμήν $\frac{1}{S} \cdot \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$, ἤτοι:

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \cdot \iint_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

§ 7. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Εἰς τάς προηγουμένας παραγράφους ἐδώσαμεν τόν ὁρισμόν τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος, τάς βασικάς ἰδιότητας τούτου καθώς καί τήν συνθήκη ὁλοκληρωσιμότητος μιᾶς συναρτήσεως. Ἀπομένει ἤδη νά μελετήσωμεν τήν μέθοδον ὑπολογισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος μιᾶς ὁλοκληρωσίμου συναρτήσεως. Πρός τούτοις διακρίνομεν δύο βασικάς περιπτώσεις ὡς πρός τό πεδίον ὁλοκληρώσεως τῆς συναρτήσεως.

I. Τό πεδίον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἕν ὀρθογώνιον σχῆμα.

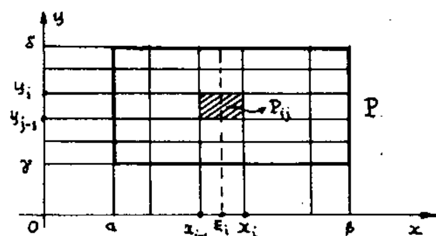
Θεώρημα VII – 7-1 Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι ὡρισμένη καί ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ ὀρθογωνίου: $P = \{(x,y): a \le x \le \beta$ καί $\gamma \le y \le \delta\}$. Ἐπί πλέον δεχόμεθα ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $J(x) = \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy$ ὑπάρχει διά κάθε x τοῦ διαστήματος $a \le x \le \beta$. Τότε ἰσχύουν τά κάτωθι:

α) Τό ὁλοκλήρωμα $\int_a^\beta J(x)\,dx = \int_a^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right] dx$ τό ὁποῖον γράφομεν καί οὕτω $\int_a^\beta dx \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy$ ὑπάρχει.

β) *Ἐπί πλέον ἔχομεν*: $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_a^\beta dx \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy$ (Θεώρημα τοῦ Fubini).

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν μίαν τυχοῦσαν διαμέρισιν τοῦ διαστήματος $[a,\beta]$, ἔστω $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=\beta$, καί μίαν τυχοῦσαν διαμέρισιν τοῦ διαστήματος $[\gamma,\delta]$, ἔστω τήν $\gamma=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_m=\delta$.

Ἐκ τῶν σημείων τῆς πρώτης διαμερίσεως φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρός τόν ἄξονα oy καί ἐκ τῶν σημείων τῆς δευτέρας φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρός τόν ἄξονα ox. Οὕτως ἔχομεν ἐπιτύχει μίαν διαμέρισιν $\mathcal{D}$ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου P εἰς τά ὀρθογώνια P_{ij}, $1\le i\le n$, $1\le j\le m$ (βλ. Σχ. 1). Ἔστω M_{ij} καί m_{ij} τό ἀνώτερον καί κατώτερον πέρας τῶν τιμῶν τῆς $f(x,y)$ ἐπί τοῦ ὀρθογωνίου P_{ij}. Διά ἕνα σταθερόν $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ καί ἕνα οἱονδήποτε $y\in[y_{j-1},y_j]$ προφανῶς θά ἔχωμεν:



Σχ. 1

$$m_{ij} \le f(\xi_i,y) \le M_{ij} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) προκύπτει:

$$m_{ij}\,\Delta y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dy \le M_{ij}\,\Delta y_j \quad (2),\quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

Ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως τό ὁλοκλήρωμα (2) ὑπάρχει πάντοτε.
Ἀθροίζοντες τάς (2) ἀπό $j=1$ ἕως $j=m$ λαμβάνομεν:

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta y_j \le \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta y_j \qquad \text{ἤ}$$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta y_j \le \int_\gamma^\delta f(\xi_i,y)\,dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta y_j \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τάς (3) ἐπί $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ καί ἀθροίζοντες ἀπό $i=1$ ἕως $i=n$ λαμβάνομεν:

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n} J(\xi_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta y_j$$

Ἡ ἔκφρασις $\sum_{i=1}^{n} J(\xi_i)\,\Delta x_i$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ Riemann τῆς συναρτήσεως $J(x)$, τὰ δὲ $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta y_j$ καὶ $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta y_j$ εἶναι τὸ κάτω καὶ ἄνω ἄθροισμα τοῦ Darboux τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα.

$$\text{Συνεπῶς: } \mathfrak{D}_*(\mathfrak{D}) \leq \sum_{i=1}^{n} J(\xi_i)\,\Delta x_i \leq \mathfrak{D}^*(\mathfrak{D}) \qquad (4)$$

Ὑποθέτοντες ἤδη ὅτι τὰ Δx_i καὶ Δy_j τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν $n,m \uparrow \infty$ (δηλ. τὰ ἐμβαδὰ τῶν στοιχείων τῆς $\mathfrak{D}$ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν), ἕνεκα τῆς ὑπάρξεως τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$, λόγῳ τῆς (4), θὰ ἔχωμεν:

$$\sup_{\mathfrak{D}} \mathfrak{D}_*(\mathfrak{D}) = \inf_{\mathfrak{D}} \mathfrak{D}^*(\mathfrak{D}) = \iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \lim_n \sum_{i=1}^{n} J(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^\beta J(x)\,dx \qquad (5)$$

Ὅθεν ὑπάρχει τὸ $\int_a^\beta J(x)\,dx$.

Ἐπὶ πλέον, λόγῳ τῶν (5), ἔχομεν:

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^\beta J(x)\,dx = \int_a^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy\right] dx = \int_a^\beta dx \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy.$$

<u>Παρατηρήσεις</u> 1ᵒ. Ἐναλλάσσοντες τὰς μεταβλητὰς x καὶ y καὶ ὑποθέτοντες ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα $J_1(y) = \int_a^\beta f(x,y)\,dx$ ὑπάρχει καταλήγομεν εἰς μίαν ἀνάλογον σχέσιν τῆς μορφῆς:

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_\gamma^\delta \left[\int_a^\beta f(x,y)\,dx\right] dy = \int_\gamma^\delta dy \int_a^\beta f(x,y)\,dx.$$

2ᵒ/. Μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὑπάρχουν τὰ ὁλοκληρώματα:

$$J(x) = \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \quad \text{καὶ} \quad J_1(y) = \int_a^\beta f(x,y)\,dx$$

πρᾶγμα ποὺ συμβαίνει ὅταν ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ ὀρθογώνιον P, τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^\beta dx \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy = \int_\gamma^\delta dy \int_a^\beta f(x,y)\,dx.$$

ἤτοι, ἐπιτρέπεται ἐν προκειμένῳ ἡ ἐναλλαγὴ τῶν ὁρίων ὁλοκληρώσεως.

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία καλεῖται *"διολοκλήρωσις"* ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως.

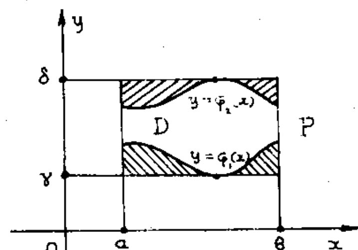
3?/. Ἐάν $f(x,y)=\varphi(x)\cdot\sigma(y)$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy=\int_\gamma^\delta dy\int_a^\beta \varphi(x)\sigma(y)\,dx=\int_\gamma^\delta \sigma(y)\,dy\int_a^\beta \varphi(x)\,dx=\left\{\int_a^\beta \varphi(x)\,dx\right\}\cdot\left\{\int_\gamma^\delta \sigma(y)\,dy\right\}$$

II. Τό χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι καμπυλόγραμμον σχῆμα.

Θά ὑπολογίσωμεν ἤδη τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἐπί ἑνός χωρίου D, τοῦ ὁποίου τό περίγραμμα εἶναι καμπυλόγραμμον σχῆμα.

Κατ' ἀρχάς περιοριζόμεθα εἰς τήν ἁπλῆν περίπτωσιν ὅπου τό περίγραμμα τοῦ D φράσσεται ὑπό δύο συνεχῶν καμπύλων μέ ἐξισώσεις $y=\varphi_1(x)$ καί $y=\varphi_2(x)$, ὅπου $\varphi_1(x)\leq\varphi_2(x)$ καί ὑπό τῶν παραλλήλων πρός τόν ἄξονα οy εὐθειῶν $x=a$ καί $x=\beta$ (βλ. Σχ. 2). Ἐπί πλέον ὑποθέτομεν ὅτι πᾶσα εὐθεία παράλληλος πρός τόν ἄξονα οy τέμνει τό ἐν λόγῳ περίγραμμα εἰς δυο τό πολύ σημεῖα. Σχετικῶς ἰσχύει τό κάτωθι Θεώρημα:



Σx. 2

Θεώρημα VII-7-2. Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι ὡρισμένη καί ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ ἀνωτέρω ὁρισθέντος χωρίου D καί ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $J(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ ὑπάρχει διά κάθε $x\in[a,\beta]$. Τότε ἰσχύουν τά κάτωθι:

α) Τό ὁλοκλήρωμα $\int_a^\beta dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$, δηλ. τό $\int_a^\beta\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$ ὑπάρχει.

β) Ἐπί πλέον ἔχομεν: $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^\beta dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$.

Ἀπόδειξις: Θέτομεν $\gamma=\min\varphi_1(x)$ καί $\delta=\max\varphi_2(x)$ καί ἐν συνεχείᾳ ἐγκλωβίζομεν τό χωρίον D ἐντός τοῦ ὀρθογωνίου P, τό ὁποῖον ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως: $P=\{(x,y): a\leq x\leq\beta$ καί $\gamma\leq y\leq\delta\}$ βλ. Σx. 2. Θεωροῦμεν ἤδη τήν συνάρτησιν $F(x,y)$, ἥτις ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{δια κάθε } (x,y)\in D\\ 0 & \text{» » } (x,y)\in P\setminus D.\end{cases}$$

Ἡ συνάρτησις $F(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ P, διότι πληροῖ τάς ὑποθέσεις τοῦ προηγουμένου Θεωρήματος. Πράγματι, ἐπειδή αὕτη συμπίπτει μέ τήν $f(x,y)$ ἐπί τοῦ D εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ D. Εἶναι ἡ $F(x,y)$ ἐκ ταυτότητος ἴση πρός τό μηδέν ἐπί τοῦ $P \setminus D$, συνεπῶς ὁλοκληρώσιμος καί ἐπί τοῦ $P \setminus D$. Συμφώνως δέ πρός τήν ἰδιότητα VI, §5 καί ἐπειδή τό σύνορον τοῦ D εἶναι μηδενικοῦ ἐμβαδοῦ ἡ $F(x,y)$ θά εἶναι ὁλοκληρώσιμος καί ἐπί τοῦ $D \cup \{P \setminus D\} = P$.

Προφανῶς ἔχομεν:

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

καί

$$\iint_{P\setminus D} F(x,y)\,dx\,dy = 0 \qquad (2)$$

Ὅθεν, κατά τήν ἰδιότητα VI, §5 καί λόγῳ τῶν (1) καί (2), ἔχομεν:

$$\iint_P F(x,y)\,dx\,dy = \iint_D F(x,y)\,dx\,dy + \iint_{P\setminus D} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + 0 \qquad (3)$$

Πρός τούτοις διά κάθε $x \in [a,b]$ τό ὁλοκλήρωμα:

$$J(x) = \int_\gamma^\delta F(x,y)\,dy = \int_\gamma^{\varphi_1(x)} F(x,y)\,dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{\delta} F(x,y)\,dy =$$

$$= 0 + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy + 0 = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (4)$$

Τό τελευταῖον ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει λόγῳ τῆς ὑποθέσεως. Ὅθεν τό $J(x) = \int_\gamma^\delta F(x,y)\,dy$ ὑπάρχει.

Κατ' ἀκολουθίαν θά ἔχωμεν:

$$\iint_P F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_\gamma^\delta F(x,y)\,dy \qquad (5)$$

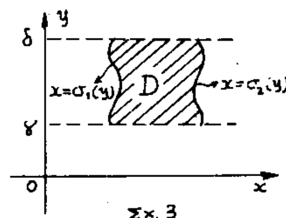
Λόγῳ τῶν (3) καί (4), ἡ (5) δίδει:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (6)$$

<u>**Παρατηρήσεις**</u>: 1η/. Ἐάν τό περίγραμμα τοῦ χωρίου D δίδεται ὑπό τῶν κα-

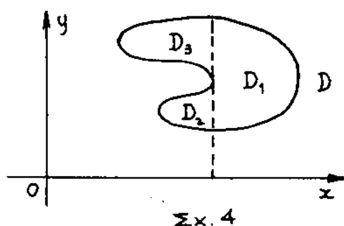
καμπύλων $x=\sigma_1(y)$ καί $x=\sigma_2(y)$ καί τῶν εὐθειῶν $y=\gamma$ καί $y=\delta$ (βλ. Σχ. 3) καί ὑπό τήν ὑπόθεσιν ὅτι ὑπάρχει τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\sigma_1(y)}^{\sigma_2(y)} f(x,y)dx$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdx = \int_\gamma^\delta dy \int_{\sigma_1(y)}^{\sigma_2(y)} f(x,y)\,dx$$



Σχ. 3

2ᵃ/. Ἐάν ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι τοιοῦτος, ὥστε αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι πρός τόν ἄξονα oy ἤ ox καί διερχόμεναι ἀπό τά ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ χωρίου ἔχουν μέ τό σύνορόν του πλείονα τῶν δύο κοινά σημεῖα, τό χωρίον ἐν προκειμένῳ θά καλῆται ***μή κανονικόν***, ἐν ἀντιθέσει πρός τά μέχρι τοῦδε ἐξετασθέντα, τά ὁποῖα καλοῦνται ***κανονικά*** (βλ. σχ. 4). Τότε χωρίζομεν τό χωρίον εἰς τοιαῦτα μέρη, ὥστε νά πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος, δηλ. τό σύνορον ἑκάστου τῶν τμημάτων τούτων νά τέμνεται εἰς δύο τό πολύ σημεῖα ὑπό τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν. Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν χωριστά ἐφ' ἑκάστου τῶν τμημάτων τοῦ ἀρχικοῦ χωρίου τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα τῆς δοθείσης συναρτήσεως. Τό ἄθροισμα τῶν εὑρεθέντων ὁλοκληρωμάτων μᾶς δίδει τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως ἐπί τοῦ ἀρχικοῦ χωρίου. Κατωτέρω θά δώσωμεν καί σχετικόν παράδειγμα. (βλ. παράδειγμα 6ον).



Σχ. 4

<u>Παράδειγμα 1ον</u>/ Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$, ὅπου ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι τό ὀρθογώνιον τό ὁριζόμενον οὕτω: $D=\{(x,y): 0\le x\le 1$ καί $0\le y\le \frac{3}{2}\}$.

<u>Λύσις:</u> Εἶναι $\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy = \int_0^{3/2}\left[\int_0^1 (4-x^2-y^2)dx\right]dy =$

$$= \int_0^{3/2}\left[4x-\frac{x^3}{3}-y^2x\right]_0^1 dy = \int_0^{3/2}\left(4-y^2-\frac{1}{3}\right)dy = \left(4y-\frac{y^3}{3}-\frac{1}{3}\,y\right)\Big|_0^{3/2} = \frac{35}{8}.$$

2ον/. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D xy^2\,dx\,dy$, ὅπου ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως $D=\{(x,y): 0\le x\le 1$ καί $0\le y\le 2\}$.

<u>Λύσις</u>: Ἐπειδή ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι τῆς μορφῆς $f(x,y)=\varphi(x)\cdot\sigma(y)$, διά τοῦτο τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα γράφεται:

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy=\left(\int_0^1 x\,dx\right)\cdot\left(\int_0^2 y^2\,dy\right)=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

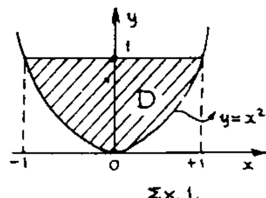
3ον/. Νά ὑπολογισθῇ τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy$, ὅπου ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως περιορίζεται ὑπό τῶν γραμμῶν: $y=x^2$ καί $y=1$.

<u>Λύσις</u>: Ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως δίδεται ἀπό τό κάτωθι Σχ. 1.

Θά ἔχωμεν:

$$\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{+1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y)\,dy=\int_{-1}^{+1}\left(x^2y+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\int_{-1}^{+1}\left(x^2+\frac{1}{2}-x^4-\frac{1}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x-\frac{x^5}{5}-\frac{1}{10}x^5\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{16}{15}$$



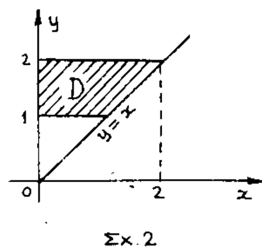
Σχ. 1.

4ον/. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$, ὅπου ὁ τόπος D ὁρίζεται ὑπό τῶν γραμμῶν $y=1$, $y=2$ καί $y=x$.

<u>Λύσις</u>: Ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως δίδεται ἀπό τό ἔναντι Σχ. 2. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\iint_D x^2y^2\,dx\,dy=\int_1^2 dy\int_0^y x^2y^2\,dx=\int_1^2\left[\frac{1}{3}x^3y^2\right]_0^y dy$$

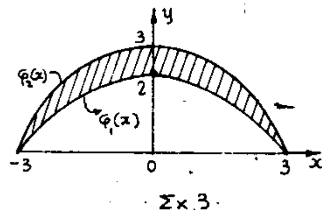
$$=\frac{1}{3}\int_1^2 y^5\,dy=\frac{7}{2}.$$



Σχ. 2

5ον/. Νά ὑπολογισθῇ τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iint_D x^2y\,dx\,dy$, ὅπου ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 9$ καί $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\ge 1,\ y\ge 0\}$.

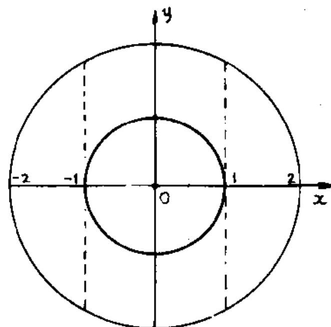
<u>Λύσις</u>: Ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως δεικνύεται εἰς τό ἔναντι Σχ. 3. Εἶναι δέ $\varphi_1(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ καί $\varphi_2(x)=\sqrt{9-x^2}$



Σχ. 3.

Ὅθεν, $\iint_D x^2 y\,dx\,dy = \int_{-3}^{3} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} x^2 y\,dy = \int_{-3}^{3} dx \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \int_{-3}^{3} \frac{5x^2(9-x^2)}{18}\,dx = 18.$

6ον/. Νά ὁλοκληρωθῇ ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ἐπί τοῦ δακτυλίου D πού περιορίζεται μεταξύ τῶν περιφερειῶν $x^2+y^2=1$ καί $x^2+y^2=4$.



Σx. 4

Λύσις: Ἐπειδή τό χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως δέν εἶναι κανονικόν, τό χωρίζομεν, ὡς δεικνύει τό ἔναντι Σx.4, εἰς τέσσαρα κανονικά χωρία καί ἐν συνεχείᾳ ὁλοκληρώνομεν.

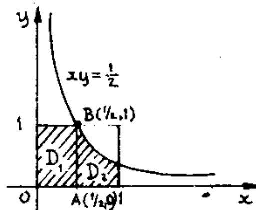
Εἶναι $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy +$

$+ \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{+1} dx \int_{+\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$

7ον/. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $I = \iint_D x\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy$, ὅπου τό χωρίον D περικλείεται ὑπό τῆς ὑπερβολῆς $x\cdot y = \frac{1}{2}$ τῶν ἀξόνων Ox, Oy καί τῶν εὐθειῶν $x=1$ καί $y=1$.

Λύσις: Τό χωρίον D εἰκονίζεται εἰς τό κάτωθι Σx 5.

Ἡ εὐθεῖα $y=1$ τέμνει τήν ὑπερβολήν εἰς τό σημεῖον $B(1/2, 1)$. Διά τοῦ σημείου B φέρομεν παράλληλον πρός τόν Oy, ἥτις τέμνει τόν Ox εἰς τό σημεῖον $A(1/2, 0)$. Οὕτω τό χωρίον D ἐχωρίσθη εἰς δύο κανονικά χωρία D_1 καί D_2, ἐφ' ἑκάστου τῶν ὁποίων ὑπολογίζομεν τό ὁλοκλήρωμα.



Σx.5

Εἶναι $\iint_{D_1} x\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy = \int_0^{1/2} dx \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dy = \int_0^{1/2} x\sqrt{1-x^2}\,dx \int_0^1 dy$

$= \int_0^{1/2} x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$

καί $\iint_{D_2} x\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy = \int_{1/2}^{1} dx \int_0^{1/2x} x\sqrt{1-x^2}\,dy = \int_{1/2}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx \int_0^{\frac{1}{2x}} dy =$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left(x(1-x^2)^{1/2} + \text{τοξημ}x\right)\Big|_{1/2}^{1} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}.$

Ὅθεν, $I = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{12}.$

§8. ΣΗΜΕΙΑΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

• Μία καμπύλη $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$ καλεῖται *λεία*, ἐάν αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$ καί $f(t)$ ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους $\varphi'(t)$, $f'(t)$ αἱ ὁποῖαι δέν μηδενίζονται συγχρόνως. Μία συνεχής καμπύλη ἀποτελουμένη ἀπό ἕνα πεπερασμένον ἀριθμόν λείων καμπύλων καλεῖται ***τμηματικῶς λεία***.

Θεωροῦμεν τό ἐπίπεδον oxy καί ἕνα κλειστόν καί φραγμένον χωρίον D, τοῦ ὁποίου τό σύνορον εἶναι ἡ λεία καμπύλη L. Ὁμοίως θεωροῦμεν εἰς τό ἐπίπεδον Ouv τό κλειστόν καί φραγμένον χωρίον D^*, τοῦ ὁποίου τό σύνορον ἔστω ὅτι εἶναι ἡ λεία καμπύλη L^*.

Ἔστω ὅτι ὁ σημειακός μετασχηματισμός τοῦ D^* ἐπί τοῦ D ὁριζόμενος ὑπό τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

$$x=\varphi(u,v),\ y=\sigma(u,v),\ (u,v)\in D^* \qquad (1)$$

Τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ ὑποθέτομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $\varphi(u,v)$, $\sigma(u,v)$ εἶναι συνεχεῖς διά κάθε $(u,v)\in D^*$ καί ἔχουν μερικάς παραγώγους, ὡς πρός u καί v πρώτης τάξεως συνεχεῖς καί ἐπί πλέον ὅτι ἡ Ἰακωβιανή:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\sigma}{\partial u} & \frac{\partial\sigma}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{διά κάθε } (u,v)\in D^*$$

Καί ἐάν μέν ἡ ὁρίζουσα εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός ὁ μετασχηματισμός καλεῖται ***εὐθύς***, ἐάν δέ εἶναι μικροτέρα καλεῖται ***ἀντίρροπος***.

Πληρουμένων τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων (ὅτε εἰς δύο διαφορετικά σημεῖα τοῦ D^* ἀντιστοιχοῦν δύο διαφορετικά σημεῖα τοῦ D) συνεπάγεται ὅτι ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός τούτου, ἔστω δέ ὅτι οὗτος εἶναι ὁ ὁριζόμενος ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

$$u=\varphi_1(x,y),\ v=\sigma_1(x,y) \text{ διά κάθε } (x,y)\in D \qquad (2)$$

Ἡ Ἰακωβιανή τοῦ ἀντιστρόφου εἶναι:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial y}\end{vmatrix}, \text{ ἥτις εἶναι } \neq 0 \text{ διά κάθε } (x,y)\in D.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι: $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=1$

Ἁπλᾶ παραδείγματα μετασχηματισμῶν εἶναι τά κάτωθι:

α) <u>Ἡ παράλληλος μεταφορά</u>: $x=u+h,\ y=v+k$.

β) <u>Ἡ Στροφή</u>: $x=u\,\text{συν}\theta-v\,\text{ημ}\theta,\ y=u\,\text{ημ}\theta+v\,\text{συν}\theta$.

γ). <u>Ὁ Γραμμικός μετασχηματισμός</u>: $x=\alpha u+\beta v,\ y=\gamma u+\delta v$, μέ $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

● Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται μία λεία καμπύλη (ἤ ἀποτελουμένη ἀπό πεπερασμένον πλῆθος λείων τόξων) Γ^* ἐπί τοῦ πεδίου D^*, ἤτοι ἡ καμπύλη:

$$u=u(t),\ v=v(t),\ \text{διά}\ a\le t\le \beta$$

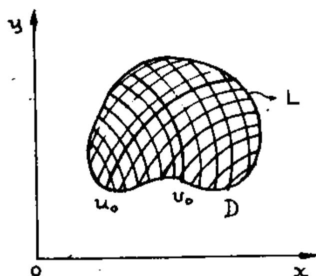
ὁ μετασχηματισμός (1) μετασχηματίζει ταύτην εἰς καμπύλην $x=\varphi(u(t),v(t))=x(t)$, $y=\sigma(u(t),v(t))=y(t)$, ἥτις εἶναι λεία ἤ τμηματικῶς λεία, διότι αἱ παράγωγοι:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\\ \frac{dy(t)}{dt}&=\frac{\partial\sigma}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\end{aligned}\right|$$

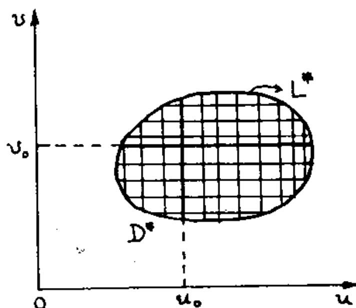
ὑπάρχουν, εἶναι συνεχεῖς μή μηδενιζόμεναι συγχρόνως.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

<u>Τό σύνορον</u> L^* <u>τοῦ</u> D^* <u>μετασχηματίζεται μέσω τῶν</u> (1) <u>εἰς τό σύνορον</u> L <u>τοῦ</u> D.



Σχ. 1 (α)



Σχ. 1 (β)

Ἐάν θεωρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν $u=u_0$ εἰς τό πεδίον D^* αὕτη μετασχηματίζεται, μέσω τῶν (1), εἰς τήν λείαν καμπύλην τοῦ oxy, ἥτις ἔχει τήν ἀναλυτικήν παράστασιν

$$x=\varphi(u_0,v),\ y=\sigma(u_0,v)\qquad (3)$$

ὅπου τό v θεωρεῖται παράμετρος (βλ. Σχ. 1(α) καί 1(β)).

'Εάν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν $v = v_0$ εἰς τό D^* αὕτη μετασχηματίζεται, μέσῳ τῶν (1), εἰς τὴν λείαν καμπύλην τοῦ oxy, ἥτις ἔχει τὴν ἀναλυτικὴν παράστασιν:

$$x = \varphi(u, v_0), \; y = \sigma(u, v_0) \qquad (4)$$

ὅπου τό u θεωρεῖται παράμετρος (βλ. Σχ. 1(α) καί 1(β)).

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ὁ μετασχηματισμός (1) εἶναι γραμμικός ἤ παράλληλος μεταφορά, αἱ καμπύλαι αἱ ἔχουσαι ἐξισώσεις τάς (3) ἤ (4) εἶναι ὁμοίως εὐθεῖαι γραμμαί.

Αἱ καμπύλαι αἱ διδόμεναι ὑπό τῶν ἐξισώσεων (3) καί (4) αἱ κείμεναι εἰς τό χωρίον D καί αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ἀπεικονίσεις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν πρός τούς ἄξονας ou, ov (καί κειμένων ἐντός τοῦ D^*), ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) καλοῦνται ***συντεταγμέναι γραμμαί*** (u-γραμμαί, v-γραμμαί).

Ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω αἱ ἀπεικονίσεις:

$$x = \varphi(u, v), \; y = \sigma(u, v)$$

εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ὑπάρχει μία καμπύλη διδομένη ὑπό τῶν ἐξισώσεων (3) διερχομένη διά τοῦ σημείου (x, y) τοῦ D, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν σταθεράν τιμὴν τοῦ u καί μία καμπύλη διδομένη ὑπό τῶν ἐξισώσεων (4), ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν σταθεράν τιμὴν του v. Ὅθεν, αἱ ποσότητες u καί v δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῶν ἀντικούντων εἰς τό χωρίον D (δηλ. μέ ἕκαστον ζεῦγος u καί v προσδιορίζεται πλήρως ἕνα σημεῖον τοῦ D). Αἱ συντεταγμέναι καμπύλαι αἱ διδόμεναι ὑπό τῶν (3) καί (4), αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τάς Καρτεσιανάς συντεταγμένας ἑνός σημείου τοῦ D^*, εἶναι, ἐν γένει, καμπυλόγραμμοι, αἱ δε ποσότητες u καί v καλοῦνται ***καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι*** τῶν σημείων τοῦ χωρίου D.

Οὕτω αἱ μεταβληταί u καί v δύνανται νά θεωρηθοῦν ὑπό τὴν διπλῆν ἔννοιαν: ἀφ' ἑνός ὅτι εἶναι αἱ Καρτεσιαναί συντεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ χωρίου D^* καί ἀφ' ἑτέρου ὡς αἱ καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ χωρίου D. (Βλ. Σχ 1_α καί 1_β)

Συνεπῶς πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\Phi(u, v) = 0$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς μία ἐξίσωσις προσδιορίζουσα μία καμπύλην (C) κειμένην εἰς το χωρίον D^* καί ἐπί-

σης ὡς μία ἐξίσωσις (εἰς καμπυλογράμμους συντεταγμένας) μιᾶς γραμμῆς (γ) τοῦ D, ἥτις εἶναι ἡ εἰκών τῆς (C) ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ (1).

Πολικαί συντεταγμέναι:

Ὡς γνωστόν ἡ σχέσις ἥτις ὑφίσταται μεταξύ τῶν καρτεσιανῶν καί πολικῶν συντεταγμένων εἶναι ἡ κάτωθι:

$$x = \rho \,\sigma\upsilon\nu\theta, \; y = \rho \,\eta\mu\theta \text{ μέ } \rho \geq 0 \text{ καί } 0 \leq \theta < 2\pi \qquad (1),$$

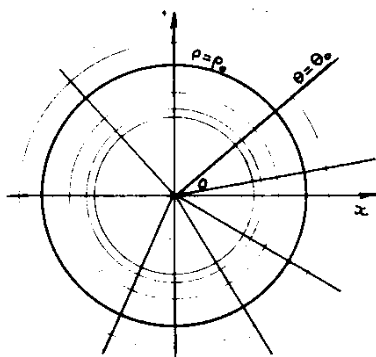
ὅπου ὁ πόλος συμπίπτει μέ τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

Ἡ Ἰακωβιανή ὁρίζουσα τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἶναι:

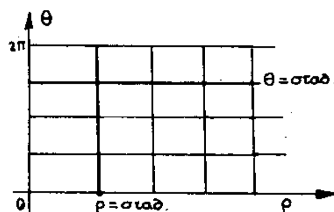
$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \\ -\rho\eta\mu\theta & \rho\sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} = \rho \geq 0$$

Αἱ συντεταγμέναι γραμμαί τοῦ πολικοῦ συστήματος διά θ=σταθ. καί ρ μεταβλητόν εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διά τῆς ἀρχῆς O. Ἐνῶ διά ρ=σταθ. καί θ μεταβλητόν εἶναι ὁμόκεντροι περιφέρειαι (βλ. Σχ. 2).

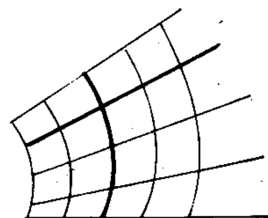
Ἡ ἀπεικόνισις (1) μετασχηματίζει τήν ἡμι-λωρίδα $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ εἰς ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον (βλ. Σχ. 3_α καί 3_β). Αἱ ἀνωτέρω ἀπεικονίσεις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι ἐκτός τοῦ σημείου $x=0, y=0$.



Σχ. 2



Σχ. 3_α



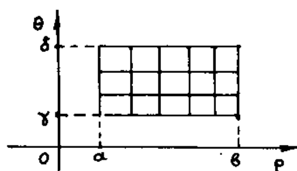
Σχ. 3_β

Παράδειγμα: Ἔστω ἕνα ὀρθογώνιον χωρίον εἰς τό ρ, θ - ἐπίπεδον, τό ὁποῖον ὁρί-

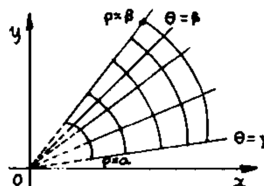
ζεται ὑπό τῶν σχέσεων:

$$0<\alpha\leq\rho\leq\beta,\quad 0\leq\gamma\leq\theta\leq\delta<2\pi.$$

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός $x=\rho$ συνθ, $y=\rho$ ημθ μετασχηματίζει τό ἀνωτέρω ὀρθογώνιον εἰς ἕνα δακτυλιοειδῆ τομέαν τοῦ ἐπιπέδου οxy (βλ. Σχ. 4_α καί 4_β).



Σχ. 4α



Σχ. 4_β

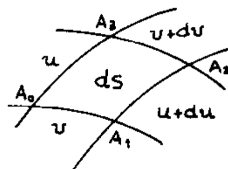
§9. ΑΛΛΑΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΕΙΣ ΕΝΑ ΔΙΠΛΟΥΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ἤδη θά θέσωμεν τό γενικόν πρόβλημα τῆς ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν εἰς ἕνα διπλοῦν ὁλοκλήρωμα.

Θεώρημα VII-9-1. Ἔστω $x=\varphi(u,v)$, $y=\sigma(u,v)$ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις μέ συνεχεῖς μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως τοῦ χωρίου D^* τοῦ ἐπιπέδου ouv εἰς τό χωρίον D τοῦ ἐπιπέδου οxy. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ Ἰακωβιανή $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0$, τότε ἐμβ. $D=S=\iint\limits_{D}dxdy=\iint\limits_{D^*}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$ (1)

Τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος θά δώσωμεν βραδύτερον μίαν αὐστηροτέραν ἀπόδειξιν στηριζομένη εἰς τόν τύπον τοῦ Green.

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν εἰς τό ἐπίπεδον οxy δύο ζεύγη συντεταγμένων γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν τό μέν πρῶτον ζεῦγος εἰς τάς τιμάς u, $u+du$ τοῦ u, τό δέ δεύτερον ζεῦγος εἰς τάς τιμάς v, $v+dv$ τοῦ v. Αἱ γραμμαί αὗται τέμνουν τό χωρίον D κατά ἕνα ἀπειροστόν στοιχειῶδες χωρίον τό $A_0A_1A_2A_3$ (βλ. Σχ. 1). Αὐτό τό στοιχειῶδες



Σχ. 1

χωρίον εἶναι ἕνα καμπυλόγραμμον παραλληλόγραμμον τό ὁποῖον δύναται νά θεωρηθῆ κατά προσέγγισιν ὡς ἕνα κοινό παραλληλόγραμμον. Αἱ κορυφαί τοῦ

ἐν λόγῳ παραλληλογράμμου ὡς πρὸς τὸ σύστημα οxy ἔχουν συντεταγμένας:

$A_0\,(\varphi(u,v),\sigma(u,v))$, $A_1\,(\varphi(u+du,v),\sigma(u+du,v))$

$A_2\,(\varphi(u+du,v+dv),\sigma(u+du,v+dv))$, $A_3\,(\varphi(u,v+dv),\sigma(u,v+dv))$.

Εἶναι δέ:

$$\varphi(u+du,v)=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot du+\cdots=x+\frac{\partial x}{\partial u}\,du+\cdots$$

$$\sigma(u+du,v)=\sigma(u,v)+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\cdot du+\cdots=y+\frac{\partial y}{\partial u}\,du+\cdots$$

$$\varphi(u+du,v+dv)=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv+\cdots=x+\frac{\partial x}{\partial u}\,du+\frac{\partial x}{\partial v}\,dv+\cdots$$

$$\sigma(u+du,v+dv)=\cdots=y+\frac{\partial y}{\partial u}\,du+\frac{\partial y}{\partial v}\,dv+\cdots$$

$$\varphi(u,v+dv)=\cdots=x+\frac{\partial x}{\partial v}\,dv+\cdots$$

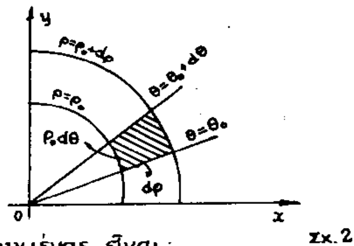
$$\sigma(u,v+dv)=\cdots=y+\frac{\partial y}{\partial v}\,dv+\cdots$$

Τό ἐμβαδόν dS λοιπόν τοῦ στοιχειώδους αὐτοῦ παραλληλογράμμου θά εἶναι ὡς γνωστόν ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας προσεγγιστικῶς ἡ ἀπόλυτος τιμή τῆς κάτωθι ὁριζούσης:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x+\frac{\partial x}{\partial u}\,du & y+\frac{\partial y}{\partial u}\,du & 1\\ x+\frac{\partial x}{\partial v}\,dv & y+\frac{\partial y}{\partial v}\,dv & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

Εἶναι λοιπόν: $S=\iint_D dx\,dy \overset{(1)}{=} \iint_{D^*} dS=\iint_{D^*}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv.$

<u>Παρατηρήσεις</u> 1η/. Ἐάν θεωρήσωμεν τάς πολικάς συντεταγμένας $x=\rho\,\text{συν}\theta$, $y=\rho\,\text{ημ}\theta$, $\rho\geq 0$ καί $0\leq\theta<2\pi$, αἱ συντεταγμέναι γραμμαί $\rho=\rho_0$, $\rho=\rho_0+d\rho$, $\theta=\theta_0$, $\theta=\theta_0+d\theta$ τέμνουν τό ἐπίπεδον οxy κατά ἕνα ἀπειροστόν «ὀρθογώνιον» τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί εἶναι $d\rho$ καί $\rho_0\,d\theta$ (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2

Ὡς γνωστόν εἶναι: $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho>0$

Ὅθεν, τό ἐμβαδόν S τοῦ χωρίου D εἰς πολικάς συντεταγμένας εἶναι:

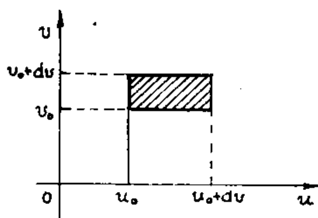
$S=\iint_D dx\,dy=\iint_{D^*}\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right|d\rho\,d\theta=\iint_{D^*}\rho\,d\rho\,d\theta$ (1), ὅπου D^* εἶναι τό πεδίον μεταβολῆς τῶν ρ καί θ.

Ἔστω ὅτι τὸ χωρίον D^* φράσσεται ὑπὸ τῶν ἀκτίνων $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$ καὶ τῆς καμπύλης $\rho=\rho(\theta)$. Ὅθεν ὁ τύπος (1) γράφεται:

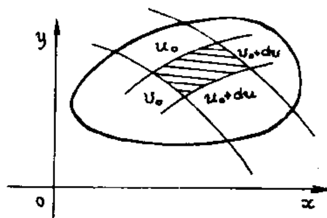
$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho\, d\rho = \frac{1}{2}\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\, d\theta$$

ἤτοι: ὁ γνωστὸς τύπος ὅστις δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

2ον. Ὁ τύπος $ds=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du dv$ γεωμετρικῶς ἑρμηνεύεται ὡς ἀκολούθως: Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἀπειροστὸν ὀρθογώνιον ἐπὶ τοῦ συστήματος Ouv μὲ πλευρὰς τὰς εὐθείας $u=u_0$, $u=u_0+du$, $v=v_0$, $v=v_0+dv$ (βλ. Σχ. 3_α) τοῦτο μετασχηματί-



Σχ. 3α



Σχ. 3β

ζεται ὑπὸ τῶν τύπων $x=\varphi(u,v)$, $y=\sigma(u,v)$ εἰς ἕνα καμπυλόγραμμον παραλληλόγραμμον (βλ. Σχ. 3_β) ἔχον ἐμβαδόν: $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du dv$.

- Ἀλλαγὴ τῶν μεταβλητῶν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

ὅπου τὸ χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως D εἶναι φραγμένον ὑπὸ μιᾶς λείας καμπύλης L καὶ ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι συνεχὴς παντοῦ ἐπὶ τοῦ χωρίου D ἢ ἡ $f(x,y)$ εἶναι φραγμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ D ἐκτὸς ἑνὸς συνόλου ἔχοντος ἐμβαδὸν μηδενικόν.

Ἔστω $x=\varphi(u,v)$, $y=\sigma(u,v)$ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις μεταξὺ τῶν χωρίων D καὶ D^* καὶ ἔστω ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις ἱκανοποιεῖ τὰς συνθήκας τοῦ θεωρήματος VII – 9 – 1, ἵνα ἰσχύῃ ὁ τύπος (1) αὐτοῦ.

Ἐκφράζομεν τὸ χωρίον D εἰς καμπυλογράμμους συντεταγμένας. Πρὸς τούτοις

χωρίζομεν τό χωρίον D^* εἰς τμήματα D_ρ^* (ὑπο-χωρία) δι' ἑνός συστήματος τμηματικῶς λείων καμπύλων. Αἱ ἀντίστοιχοι τμηματικῶς λεῖαι καμπύλαι χωρίζουν τό χωρίον D εἰς τμήματα D_ρ μέ ἀντίστοιχα ἐμβαδά ΔS_ρ. Ἐκλέγομεν ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον (x_ρ, y_ρ) εἰς ἕκαστον τμῆμα D_ρ καί σχηματίζομεν τό ἄθροισμα τοῦ Riemann:

$$\sum_{\rho=1}^{n} f(x_\rho, y_\rho)\,\Delta S_\rho \qquad (2)$$

ἀντιστοιχοῦν εἰς τό ὁλοκλήρωμα (1).

Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον (1) τοῦ θεωρήματος VII – 9-1, δι' ἕκαστον ὑπο-χωρίον D_ρ τοῦ D καί ἔχομεν:

$$\Delta S_\rho = \iint_{D_\rho^*} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv \qquad (3)$$

Ἄς συμβολίσωμεν διά $J(u,v)$ τήν ὁρίζουσαν $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, οὕτω ἡ (3) γράφεται:

$$\Delta S_\rho = \iint_{D_\rho^*} |J(u,v)|\,du\,dv \qquad (4)$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς §5, Ἰδιότης VIII ἔχομεν:

$$\iint_{D_\rho^*} |J(u,v)|\,du\,dv = |J(u_\rho^*, v_\rho^*)|\,\Delta\sigma_\rho \qquad (5)$$

ὅπου $\Delta\sigma_\rho$ εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ ὑπό-χωρίου D_ρ^*.

Ἐκ τῶν (4) καί (5) λαμβάνομεν:

$$\Delta S_\rho = |J(u_\rho^*\, v_\rho^*)|\,\Delta\sigma_\rho \qquad (6)$$

Ἡ ἔκφρασις (2), λόγῳ τῆς (6), γράφεται:

$$\sum_{\rho=1}^{n} f(x_\rho, y_\rho)\,|J(u_\rho^*, v_\rho^*)|\,\Delta\sigma_\rho \qquad (7)$$

Τό σημεῖον (x_ρ, y_ρ) ἐξελέγει ἐντός τοῦ D_ρ αὐθαιρέτως, συνεπῶς δυνάμεθα νά θέσωμεν:

$$x_\rho = \varphi(u_\rho^*, v_\rho^*) \quad \text{καί} \quad y_\rho = \sigma(u_\rho^*, v_\rho^*)$$

δηλ. ἐλάβομεν ὡς (x_ρ, y_ρ) τό σημεῖον τοῦ D_ρ ἀντιστοιχοῦν εἰς τό σημεῖον (u_ρ^*, v_ρ^*) τοῦ D_ρ^*. Συνεπῶς τό ἄθροισμα (7) γράφεται:

$$\sum_{\rho=1}^{n} f\big(\varphi(u_\rho^*, v_\rho^*), \sigma(u_\rho^*, v_\rho^*)\big)\,|J(u_\rho^*, v_\rho^*)|\,\Delta\sigma_\rho \qquad (8)$$

Τό ἄθροισμα (8) δέν εἶναι τίποτ' ἄλλο εἰμή τό ἄθροισμα τοῦ Riemann τοῦ ὁλοκληρώματος:

$$\iint_{D^*} f(\varphi(u,v), \sigma(u,v)) \left| J(u,v) \right| du dv \qquad (9)$$

Ἐκ τῶν (2) καί (8) λαμβάνομεν:

$$\sum_{\rho=1}^{n} f(x_\rho, y_\rho)\Delta S_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} f(\varphi(u_\rho^*, v_\rho^*), \sigma(u_\rho^*, v_\rho^*)) \cdot \left| J(u_\rho^*, v_\rho^*) \right| \Delta\sigma_\rho \qquad (10)$$

Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν ὅτι, ἡ μεγίστη τῶν διαμέτρων $\delta(D_\rho^*)$ τῶν στοιχείων τῆς διαμερίσεως ἐπί τοῦ χωρίου D^* τείνει πρός τό μηδέν, τότε καί πᾶσαι αἱ διάμετροι $\delta(D_\rho)$ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ χωρίου D ἐπίσης τείνουν πρός τό μηδέν.

Λαμβάνοντες τά ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (10) τοῦ $n\uparrow\infty$ καί μέ $\max_{1\leq\rho\leq n} \delta(D_\rho^*) \to 0$, τότε θά λάβωμεν τήν ἰσότητα τῶν ἀντιστοίχων ὁλοκληρωμάτων, ἤτοι:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\varphi(u,v), \sigma(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τό θεώρημα:

Θεώρημα VII-9-2. Ἔστω τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D f(x,y)dxdy$, ὅπου τό χωρίον D ἔχει σύνορον μίαν τμηματικῶς λείαν καμπύλη. Ἔστω $x=\varphi(u,v)$, $y=\sigma(u,v)$, $(u,v)\in D^*$ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις μεταξύ τῶν χωρίων D καί D^* καί ὅτι αἱ συναρτήσεις $x=\varphi(u,v)$, $y=\sigma(u,v)$ ἔχουν μερικάς παραγώγους α' τάξεως συνεχεῖς μέ Ἰακωβιανή $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$, τότε: $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\varphi(u,v), \sigma(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv.$

Παρατήρησις: Ὁ τύπος τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἰς τήν περίπτωσιν τῶν πολικῶν συντεταγμένων $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$, $\rho>0$ $0\leq\theta<2\pi$ γίνεται:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\sigma\upsilon\nu\theta, \rho\eta\mu\theta)\rho d\rho d\theta, \quad \text{διότι} \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| = \rho .$$

Παραδείγματα 1ον Νά ὑπολογισθῇ τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα: $\iint_D (y-x)dxdy$, ὅπου D

εἶναι τό χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τό περικλειόμενον ὑπό τῶν εὐθειῶν:

$$y=x+1\ ,\quad y=x-3,\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\ ,\quad y=-\frac{1}{3}x+5.$$

<u>Λύσις:</u> Ὁ ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμός τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος παρουσιάζει ἀρκετάς πράξεις, ἀλλά διά μιᾶς καταλλήλου ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν δυνάμεθα νά τό ἀναγάγωμεν εἰς ἕν ἄλλο ὁλοκλήρωμα, τοῦ ὁποίου τό χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἕν ὀρθογώνιον.

Πρός τοῦτο θέτομεν:

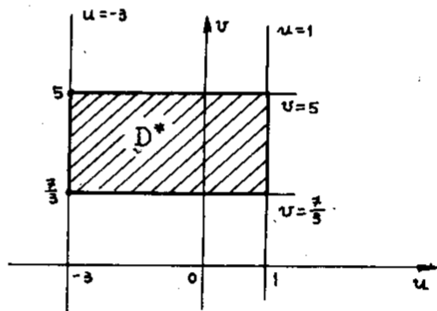
$$u=y-x \quad \text{καί} \quad v=y+\frac{1}{3}x. \qquad (1)$$

Διά ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (1) λαμβάνομεν:

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v \quad \text{καί} \quad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v \qquad (2)$$

$$\text{Εἶναι δέ}\quad J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4}\neq 0.$$

Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό σύνορον τοῦ χωρίου D^*. Πρός τοῦτο αἱ εὐθεῖαι $y=x+1$ καί $y=x-3$ μετασχηματίζονται διά τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) εἰς τάς εὐθείας $u=1$ καί $u=-3$ τοῦ Ouv (βλ. Σχ.1). Ὁμοίως αἱ εὐθεῖαι $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ καί $y=-\frac{1}{3}x+5$ ἔχουν ὡς εἰκόνας τάς εὐθείας $v=\frac{7}{3}$, $v=5$.



Σχ. 1

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι τό ἀρχικόν χωρίον D ἔχει μετασχηματισθῆ εἰς ἕνα ὀρθογώνιον χωρίον D^* εἰς τό ὁποῖον ἡ ὁλοκλήρωσις εἶναι εὔκολος.

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\iint_D (y-x)\,dx\,dy=\iint_{D^*}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\cdot |J|\,du\,dv$$

$$=\iint_{D^*} u\cdot\frac{3}{4}\cdot du\,dv=\frac{3}{4}\int_{7/3}^{5}dv\left(\int_{-3}^{1}u\,du\right)=\frac{3}{4}\int_{-3}^{1}\frac{8}{3}u\,du=-8.$$

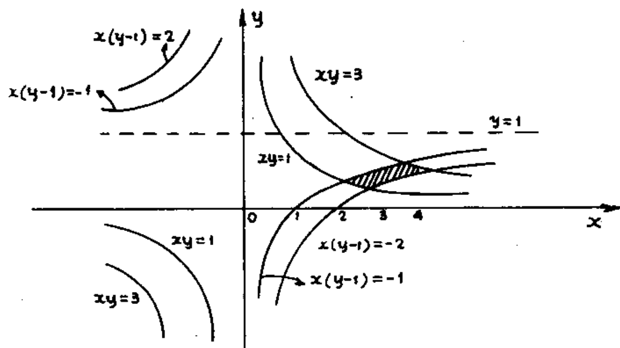
2ον/ Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D x\,dx\,dy$, ὅπου τό χωρίον D περικλείεται ὑπό τῶν καμπύλων $x(1-y)=1$, $x(1-y)=2$, $xy=1$ καί $xy=3$.

<u>**Λύσις:**</u> Θέτομεν $u=x(1-y)$ καί $v=xy$ (1) Ἐκ τῶν (1) λαμβάνομεν:

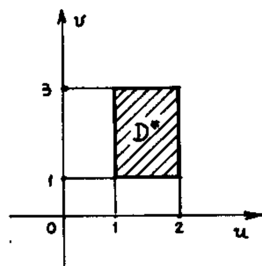
$$x=u+v,\ y=\frac{v}{u+v} \qquad (2)$$

Εἶναι δέ $J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{u+v}$.

Τό χωρίον D τό ὁριζόμενον ὑπό τῶν ἀνωτέρω καμπύλων δίδεται ὑπό τοῦ Σχ. 2(α). Τοῦτο δέ μετασχηματίζεται ὑπό τῶν (2) εἰς τό ὀρθογώνιον χωρίον D^* τό περιοριζόμενον ὑπό τῶν εὐθειῶν $u=1$, $u=2$, $v=1$, $v=3$ (βλ. Σχ. 2(β)).



Σχ. 2(α)



Σχ. 2(β)

Ἔχομεν λοιπόν: $\iint_D x\,dx\,dy=\iint_{D^*}(u+v)\cdot|J|\,du\,dv=$

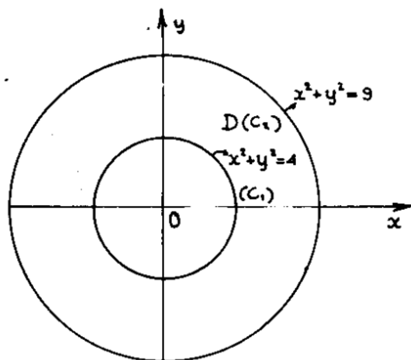
$$=\iint_{D^*}(u+v)\cdot\frac{1}{u+v}\,du.dv=\int_1^2 du\int_1^3 dv=2.$$

3ον/ Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, ὅπου τό χωρίον D περικλείεται ὑπό τῶν περιφερειῶν: $x^2+y^2=4$ καί $x^2+y^2=9$.

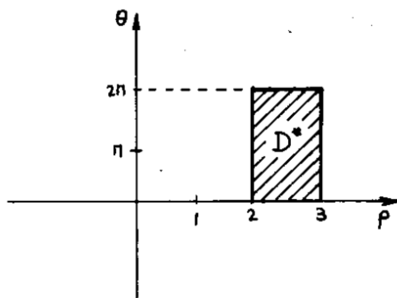
<u>**Λύσις:**</u> Ἐκτελοῦμεν ἀλλαγήν τῶν μεταβλητῶν διά τῆς εἰσαγωγῆς πολικῶν συντεταγμένων. Πρός τοῦτο θέτομεν:

$$x=\rho\,\text{συν}\theta,\ y=\rho\,\eta\mu\theta,\ \rho>0\quad 0\le\theta<2\pi.$$

Εἶναι δέ ὡς γνωστόν, $\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| = \rho > 0$. Τό χωρίον D (βλ. Σχ. 3_α) μετασχηματίζεται εἰς τό χωρίον D^* (βλ. Σχ. 3_β).



Σχ. 3_α



Σχ. 3_β

Πράγματι, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τάς ἐξισώσεις τῶν περιφερειῶν (C_1) καί (C_2) τῶν πολικῶν συντεταγμένων λαμβάνομεν $\rho^2 = 4$, ἐξ ἧς $\rho = 2$ καί $\rho^2 = 9$, ἐξ ἧς $\rho = 3$. Τό δέ θ μεταβάλλεται ἀπό 0 ἕως 2π. Ὅθεν, ὁ κυκλικός δακτύλιος D μετασχηματίζεται εἰς τό ὀρθογώνιον D^* τοῦ Σχήματος 3_β.

Ὅθεν ἔχομεν: $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D^*} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho d\theta$

$$= \iint\limits_{D^*} \rho \cdot \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 \rho^2 d\rho = 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^3 = 2\pi\,\frac{19}{3} = \frac{38\pi}{3}.$$

4ον/ Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα τοῦ Poisson: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. [1)]

<u>Λύσις</u>: Ο ὑπολογισμός τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος θά γίνη μέ τήν βοήθειαν τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων, καθότι δέν δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν διά στοιχειωδῶν συναρτήσεων τό ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως e^{-x^2}.

---

1) *Τό ὁλοκλήρωμα τοῦ Poisson παίζει σπουδαιότατον ρόλον εἰς τήν θεωρίαν τῶ πιθανοτήτων καί τήν Στατιστικήν.*

Πρός τούτοις θέτομεν:

$$I_R = \iint_{K_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \quad (1)$$ ὅπου K_R εἶναι ὁ κύκλος $x^2+y^2 \leq R^2$.

Μέ τήν βοήθειαν τῶν πολικῶν συντεταγμένων τό I_R μετασχηματίζεται εἰς τό:

$$I_R = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right\}d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-R^2}\right)d\theta = \pi\left(1-e^{-R^2}\right) \qquad (2)$$

Τό τετράγωνον $T_R = \{(x,y): -R \leq x \leq R \text{ καί } -R \leq y \leq R\}$ περιέχει τόν κύκλον $\{(x,y): 0 \leq \rho \leq R\}$ καί περιέχεται εἰς τόν κύκλον $\{(x,y): 0 \leq \rho \leq 2R\}$.

Ἐξ ἄλλου ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις $e^{-x^2-y^2}$ εἶναι > 0.

Ὅθεν, λόγῳ τῆς (2), θά ἔχωμεν:

$$\pi\left(1-e^{-R^2}\right) = I_R \leq \int_{-R}^{+R}\left\{\int_{-R}^{+R} e^{-x^2-y^2}dy\right\}dx \leq I_{2R} = \pi\left(1-e^{-4R^2}\right)$$

Εἶναι ὅμως: $\displaystyle\int_{-R}^{+R}\left\{\int_{-R}^{+R} e^{-x^2-y^2}dy\right\}dx = \int_{-R}^{+R} e^{-x^2}\left\{\int_{-R}^{+R} e^{-y^2}dy\right\}dx = \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2}dx\right)^2$

Ἔχομεν λοιπόν: $\displaystyle\pi\left(1-e^{-R^2}\right) \leq \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \pi\left(1-e^{-4R^2}\right) \qquad (3)$

Ὑποθέτομεν ὅτι τό $R \longrightarrow +\infty$, τότε ἐκ τῆς διπλῆς ἀνισότητος (3) προκύπτει ὅτι:

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi, \text{ διότι } \lim_{R\to\infty} e^{-R^2} = 0.$$

Ἄρα: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

§10. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΔΙΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

I. Ὑπολογισμός ἐπιπέδων Ἐμβαδῶν. Ὡς γνωστόν, τό ἐμβαδόν S τοῦ ἐπιπέδου χωρίου D ἐπί τοῦ ἐπιπέδου oxy, τοῦ ὁποίου τό σύνορον εἶναι ἡ τμηματικῶς λεία καμπύλη L, δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$S = \iint_D dxdy \qquad (1)$$

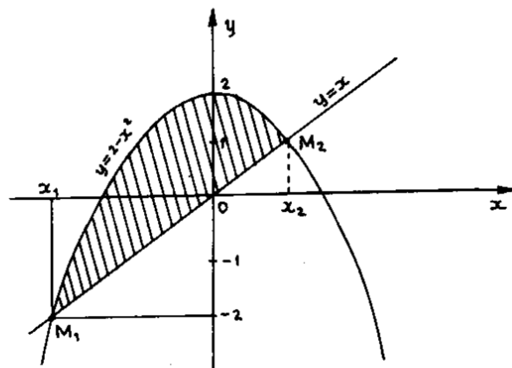
Ἐάν τό χωρίον D φράσσεται ὑπό τῶν καμπύλων $y=\varphi_1(x)$ καί $y=\varphi_2(x)$, ὅπου $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ διά κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ καί τῶν εὐθειῶν $x=\alpha$ καί $x=\beta$ καί ἐπί πλέον τό σύνορόν του τέμνεται ὑπό πάσης εὐθείας παραλλήλου πρός τόν

ἄξονα oy εἰς δύο τὸ πολύ σημεῖα, τότε ὁ τύπος (1) καθίσταται (βλ. § 6, II).

$$S=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\right)dx=\int_a^b\left[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right]dx.$$

Παράδειγμα: Νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῶν καμπύλων: $y=2-x^2$, $y=x$.

Λύσις: Προσδιορίζομεν τά σημεῖα τομῆς τῶν δοθεισῶν καμπύλων (βλ. Σχ. 1). Πρός τοῦτοις θέτομεν $x=2-x^2$, ἐξ ἧς $x_1=-2$ καί $x_2=1$. Ὅθεν τά σημεῖα τομῆς εἶναι $M_1(-2,-2)$ καί $M_2(1,1)$.



Σχ. 1

Τό ζητούμενον ἐμβαδόν θά εἶναι λοιπόν:

$$S=\int_{-2}^{1}\left(\int_{x}^{2-x^2}dy\right)dx=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{6}$$

*

II. Ὑπολογισμός ὄγκων: Εἰς τήν § 5 εἴδομεν ὅτι ὁ ὄγκος V ἑνός στερεοῦ τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό ἑνός τμήματος ἐπιφανείας E μέ ἐξίσωσιν $z=f(x,y)$, ὅπου $f(x,y)\geq 0$, τοῦ ἐπιπέδου oxy, τήν προβολήν D αὐτοῦ τοῦ τμήματος ἐπί τοῦ oxy καί ἀπό τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν πού προβάλλει τό περίγραμμα τοῦ τμήματος E εἰς τό σύνορον τοῦ D, δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad (1)$$

᾿Εάν ἤδη τό στερεόν, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τόν ὄγκον, περιορίζεται ἄνω ὑπό τῆς ἐπιφανείας $z=\phi_2(x,y)\geq 0$ καί κάτω ὑπό τῆς ἐπιφανείας $z=\phi_1(x,y)\geq 0$ καί αἱ προβολαί αὐτῶν τῶν δύο ἐπιφανειῶν ἐπί τοῦ oxy εἶναι τό αὐτό χωρίον D, τότε ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ θά ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τῶν ὄγκων τῶν δύο « κυλινδρικῶν » στερεῶν.

῞Οθεν: $V=\iint_D \phi_2(x,y)\,dxdy-\iint_D \phi_1(x,y)\,dxdy=\iint_D\left[\phi_2(x,y)-\phi_1(x,y)\right]dxdy$.

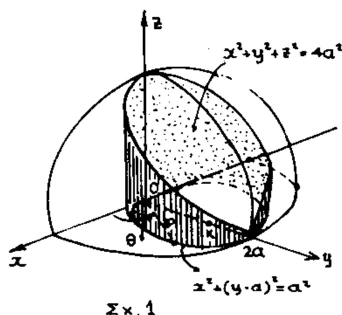
῾Ο ἀνωτέρω τύπος εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, ἰσχύει καί ὅταν αἱ συναρτήσεις $\phi_2(x,y)$ καί $\phi_1(x,y)$ εἶναι συνεχεῖς ἱκανοποιοῦσαι τήν σχέσιν $\phi_2(x,y)\geq\phi_1(x,y)$.

Παρατήρησις: ᾿Εάν ἡ $f(x,y)$ ἀλλάσῃ σημεῖον ἐπί τοῦ D, τότε χωρίζομεν τό D εἰς δύο χωρία D_1 καί D_2 εἰς τρόπον, ὥστε $f(x,y)\geq 0$ ἐπί τοῦ D_1 καί $f(x,y)\leq 0$ ἐπί τοῦ D_2. ᾿Εν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα $J_1=\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$, ὅπου $f(x,y)\geq 0$ καί τό ὁποῖον παριστᾷ τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ ὑπεράνω τοῦ oxy.

῾Ομοίως τό $J_2=\left|\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy\right|$ παριστᾷ τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ τό ὁποῖον εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ oxy.

῞Οθεν, τό J_1+J_2 παριστᾷ τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ πού περικλείεται ὑπό τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας.

Παράδειγμα: Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος V τοῦ στερεοῦ τοῦ περιλαμβανομένου μεταξύ τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=4a^2$ καί τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2-2ay=0$.



Σχ. 1

Λύσις: Δυνάμεθα νά λάβωμεν ὡς χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως τήν βάσιν τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2-2ay=0$, δηλ. τόν κύκλον κέντρου $(0,a)$ καί ἀκτῖνος a. ῾Η δέ ἐξίσωσις τοῦ ἐν λόγῳ κύκλου γράφεται ὑπό τήν μορφήν: $x^2+(y-a)^2=a^2$ (βλ. Σχ. 1).

῾Υπολογίζομεν τό τέταρτον τοῦ ζητουμένου ὄγκου V (τό ἥμισυ τούτου παρίσταται

εἰς τό Σχ. 1). Θά λάβωμεν λοιπόν ὡς χωρίον ὁλοκληρώσεως τό ἡμικύκλιον τό ὁριζόμενον ἀπό τάς ἐξισώσεις:

$$x=\varphi_1(y)=0,\ x=\varphi_2(y)=\sqrt{2ay-y^2}$$
$$y=0 \quad \text{καί} \quad y=2a.$$

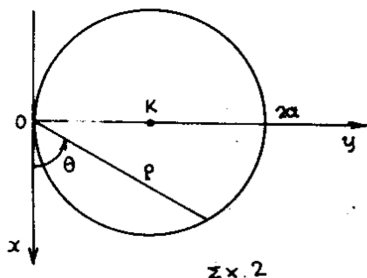
Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἄνω μέρους τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι:

$$z=f(x,y)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,.$$

Ὅθεν, τό τέταρτον τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ εἶναι:

$$\frac{1}{4}V=\int_0^{2a}\left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\right)dy.$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος χρησιμοποιοῦμεν πολικάς συντεταγμένας: $x=\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\,\eta\mu\theta$, $\rho\geq 0$, $0\leq\theta<2\pi$.



Σχ. 2

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐν λόγῳ ἡμιπεριφερείας εὑρίσκεται ὡς ἀκολούθως:

Εἶναι $x^2+y^2=\rho^2$ καί $y=\rho\,\eta\mu\theta$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τήν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας εὑρίσκομεν $\rho=2a\,\eta\mu\theta$. Ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν τά χωρία μεταβολῆς τῶν ρ καί θ. Ὡς ἐμφαίνεται καί ἐκ τοῦ Σχ. 2 τό $0\leq\rho\leq 2a$ καί $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἰς πολικάς συντεταγμένας γίνεται:

$$\sqrt{4a^2-x^2-y^2}=\sqrt{4a^2-\rho^2}.$$

Εἶναι δέ:

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right|=\rho\geq 0\,.$$

Συνεπῶς ἔχομεν:

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\eta\mu\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{(4a^2-\rho^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{2a\eta\mu\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(4a^2-4a^2\eta\mu^2\theta)^{3/2}-(4a^2)^{3/2}\right]d\theta=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sigma\upsilon\nu^3\theta)d\theta=\frac{4}{9}a^3(3\pi-4).$$

II. Ὑπολογισμός ἐμβαδοῦ ἐπιφανείας.

Ἄς θεωρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἰς Καρτεσιανάς συντεταγμένας εἶναι $z=f(x,y)$, ὅπου ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι συνεχής καί ἔχει μερικάς παραγώγους α῾ τάξεως συνεχεῖς. Θεωροῦμεν ἕνα τμῆμα S τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας περικλειόμενον ὑπό μιᾶς κλειστῆς καμπύλης γραμμῆς Γ, τῆς ὁποίας ἡ προβολή εἰς τό ἐπίπεδον oxy εἶναι ἡ λεία καμπύλη L. Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι τό σύνορον τοῦ χωρίου D τό ὁποῖον θεωρεῖται ὡς ἡ ὀρθή προβολή τοῦ θεωρηθέντος τμήματος τῆς ἐπιφανείας ἐπί τοῦ ἐπιπέδου Oxy.

Διαμερίζομεν τό χωρίον D διά μιᾶς τυχούσης διαμερίσεως $\mathcal{D}$ εἰς n-τό πλῆθος ὑπό-χωρία $D_1, D_2, \ldots, D_n$ μέ ἀντίστοιχα ἐμβαδά $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Ἔστω $P_\rho\ (\xi_\rho, \eta_\rho)$ ἕν τυχόν σημεῖον ἀνῆκον εἰς τό πεδίον D_ρ, $1 \le \rho \le n$. Τοῦτο δύναται νά θεωρηθῇ ὅτι εἶναι ἡ προβολή τοῦ σημείου $M_\rho(\xi_\rho, \eta_\rho, f(\xi_\rho,\eta_\rho) = z_\rho)$ τῆς ἐπιφανείας (βλ. Σχ. 1).

Ὡς γνωστόν, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τό σημεῖον M_ρ εἶναι:

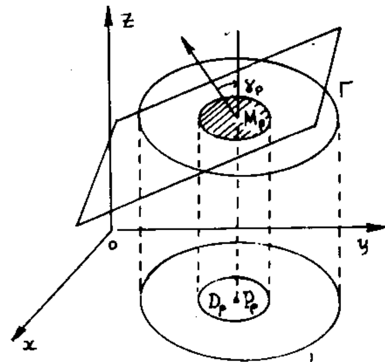
$$z - z_\rho = f'_x(\xi_\rho,\eta_\rho)(x-\xi_\rho) + f'_y(\xi_\rho,\eta_\rho)(y-\eta_\rho) \quad (1)$$

Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν τό ἐμβαδόν $\Delta\sigma_\rho$ ἐκείνου τοῦ τμήματος σ_ρ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τό ὁποῖον ἔχει προβολήν ἐπί τοῦ Oxy τό χωρίον D_ρ, $1 \le \rho \le n$.

Θεωροῦμεν τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀντιστοίχων ἐμβαδῶν $\Delta\sigma_\rho$, ἤτοι:

$$\sum_{\rho=1}^{n} \Delta\sigma_\rho$$

Τό ὅριον τοῦ ἀνωτέρω ἀθροίσματος τοῦ $n \uparrow \infty$ καί μέ $\max\limits_{1\le\rho\le n} \delta(\sigma_\rho) \to 0$ καλεῖται ἐξ ὁρισμοῦ ***ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας*** καί ἄς συμβολίσωμεν τοῦτο μέ:



Σχ. 1

$$\sigma \underset{\delta\rho}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le\rho\le n}\delta(\sigma_\rho)\to 0}} \sum_{\rho=1}^{n} \Delta\sigma_\rho \quad (2)$$

Ἐν συνεχείᾳ ἄς καλέσωμεν γ_ρ τήν ὀξεῖαν γωνίαν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου

τῆς ἐπιφανείας εἰς τό M_ρ μετά τοῦ ἐπιπέδου oxy· αὐτη δέ ἰσοῦται μέ τήν ὀξεῖαν γωνίαν τήν ὁποίαν σχηματίζει τό κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν διάνυσμα εἰς τό σημεῖον M_ρ μέ τόν ἄξονα OZ.

Ὡς γνωστόν ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας τό κάθετον διάνυσμα ἔχει προβολάς $(-f'_x(\xi_\rho,\eta_\rho), -f'_y(\xi_\rho,\eta_\rho), +1)$, συνεπῶς ἡ γωνία γ_ρ πού σχηματίζει τοῦτο μέ τόν ἄξονα OZ εἶναι:

$$\text{συν}\,\gamma_\rho = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x(\xi_\rho,\eta_\rho)+f'^2_y(\xi_\rho,\eta_\rho)}} \qquad (3)$$

Ἐξ ἄλλου $\Delta S_\rho = \Delta\sigma_\rho \cdot \text{συν}\,\gamma_\rho$ ἤ

$$\Delta\sigma_\rho = \frac{\Delta S_\rho}{\text{συν}\,\gamma_\rho} = \sqrt{1+f'^2_x(\xi_\rho,\eta_\rho)+f'^2_y(\xi_\rho,\eta_\rho)}\cdot\Delta S_\rho \qquad (4)$$

Θεωροῦμεν τό ἄθροισμα:

$$\sum_{\rho=1}^{n}\Delta\sigma_\rho = \sum_{\rho=1}^{n}\sqrt{1+f'^2_x(\xi_\rho,\eta_\rho)+f'^2_y(\xi_\rho,\eta_\rho)}\cdot\Delta S_\rho \qquad (5)$$

Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν μίαν ἀκολουθίαν διαμερίσεων ἐπί τοῦ χωρίου D τοιαύτην, ὥστε τοῦ $n\uparrow\infty$ τό $\max\limits_{1\le\rho\le n}\delta(D_\rho)\to 0$, τότε τό δεξιόν μέλος τῆς ἰσότητος (5) θά τείνῃ πρός τόν ἀριθμόν $\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$. Ἐξ ἄλλου καί τό $\max\limits_{1\le\rho\le n}\delta(\sigma_\rho)\to 0$, ἤτοι, λόγῳ τῆς (2), τό ἀριστερόν μέλος τῆς (5) θά τείνῃ πρός τό ἐμβαδόν σ τῆς ἐπιφανείας.

Ὅθεν,

$$\boxed{\sigma = \iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.}$$

<u>Παρατήρησις</u>: Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια ἔχῃ ὡς ἐξίσωσιν τήν $y=f_1(x,z)$ ἤ $x=f_2(y,z)$, τότε θά ἔχωμεν ἀναλόγους τύπους.

Παράδειγμα: Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας.

Λύσις: Ὡς γνωστόν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὅταν τό κέντρον αὐτῆς συμπίπτῃ μέ τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων εἶναι: $x^2+y^2+z^2=R^2$, ἔνθα R ἡ ἀκτίς αὐτῆς. Ὑπολογίζομεν τό ἐμβαδόν τοῦ ἄνω ἡμισφαιρίου. Ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶναι:

$$z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Εἶναι δέ: $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

Ὅθεν: $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Τό ἡμισφαίριον τοῦτο προβάλλεται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου oxy εἰς τόν κύκλον πού πληροῖ τήν συνθήκην:

$$x^2+y^2\leq R^2$$

Συμφώνως πρός τά ἐκτεθέντα ἀνωτέρω, τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαιρίου θά εἶναι:

$$\frac{1}{2}\sigma=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy\right)dx \qquad (1)$$

Διά νά ὑπολογίσωμεν αὐτό τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα χρησιμοποιοῦμεν πολικάς συντεταγμένας. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συνόρου τοῦ χωρίου τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι $\rho=R$ καί ἐπί πλέον $\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right|=\rho$, ὅτε ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2}\sigma=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\right)d\theta=R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R d\theta=R\cdot\int_0^{2\pi}R\,d\theta=2\pi R^2.$$

§ 11. ΣΥΝΟΛΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ γνῶσις τῆς συναρτήσεως εἶναι τό θεμέλιον τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἕως ἐδῶ ἐγνωρίσαμεν συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἐκ μιᾶς, δύο ἤ καί περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Δίδοντες μίαν γεωμετρικήν θεώρησιν τῶν

μέχρι τοῦδε γνωστῶν συναρτήσεων δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι τοιαῦται συναρτήσεις εἶναι μεταβληταί ποσότητες ἐξαρτώμεναι ἀπό ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας (συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς) ἤ ἀπό ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν) κ.τ.λ. Ταύτας δέ εἰς τό ἑξῆς τάς καλοῦμεν ***σημειοσυναρτήσεις.***

Ἡ Μαθηματική Ἀνάλυσις καί αἱ φυσικαί ἐφαρμογαί της θεωροῦν καί ἄλλους τύπους συναρτήσεων αἱ τιμαί τῶν ὁποίων δέν ἐξαρτῶνται ἀπό ἕνα σημεῖον τοῦ χώρου, ἀλλά ἐξαρτῶνται ἑκάστοτε ἀπό ὡρισμένον σύνολον πού λαμβάνεται εἰς τόν χῶρον.

Θεωροῦμεν γενικῶς ἕνα σύνολον Ω καί μίαν κλάσιν $\mathcal{A}$ ἐξ ὑποσυνόλων αὐτοῦ τοιαύτην, ὥστε ἡ ἕνωσις δύο τυχόντων συνόλων τοῦ Ω νά ἀνήκη εἰς τήν κλάσιν $\mathcal{A}$.

Ὑπό τόν ὅρον **συνολοσυνάρτησιν** ἐννοοῦμεν μίαν πραγματικήν συνάρτησιν F ὡρισμένην ἐπί τῆς κλάσεως $\mathcal{A}$, ἤτοι: $\mathcal{A} \ni A \xrightarrow{F} F(A) \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα τοιούτων συνολοσυναρτήσεων εἶναι τά κάτωθι: α). Τό ἐμβαδόν $F(G)=S$ ἑνός χωρίου G τό ὁποῖον ὡρίσθη κατά τόν γνωστόν τρόπον.

β) Ἡ μᾶζα ἑνός σώματος, ἥτις εἶναι κατανεμημένη ἐπί τοῦ ἐπιπέδου oxy, δηλ. εἰς ἕκαστον χωρίον G τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦμεν ἕναν ὡρισμένον ἀριθμόν $\mu(G)$ τήν μᾶζαν αὐτοῦ.

γ) Τό ποσόν τῆς θερμότητος πού εἶναι κατανεμημένον ἐπί τῆς ἐπιφανείας μιᾶς ἐπιπέδου πλακός.

Ὁρισμός VII – 11-1. Μία συνολοσυνάρτησις F ὡρισμένη ἐπί τῆς κλάσεως $\mathcal{A}$ θά λέγωμεν ὅτι εἶναι πεπερασμένως προσθετική, ἐάν οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ξένων συνόλων A_1 καί A_2 τῆς κλάσεως $\mathcal{A}$ ἔχωμεν:

$$F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) + F(A_2).$$

Ἕνα χαρακτηριστικόν παράδειγμα πεπερασμένης προσθετικῆς συνολοσυναρτήσεως δύναται νά κατασκευασθῆ μέσω τῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἔστω $f(x,y)$ μία συνάρτησις ὡρισμένη καί συνεχής ἐπί τοῦ ἐπιπέδου. Ὁρίζομεν μίαν συνολοσυνάρτησιν F ἐπί τῆς κλάσεως $\mathcal{A}$ τῶν ὑποσυνόλων τοῦ ἐπιπέδου ὑπό τοῦ τύπου:

$$F(G) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

Πράγματι ἡ πεπερασμένη προσθετικότης τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως ἐξάγεται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.

Ἤδη εἰσάγομεν μίαν νέαν ἔννοιαν συγκλίσεως.

<u>Ὁρισμός VII - 11-2.</u> *Ἔστω F μία αὐθαίρετος συνολοσυνάρτησις ὡρισμένη τοὐλάχιστον διά τήν κλάσιν* $\mathcal{A}$ *ὅλων τῶν κλειστῶν χωρίων A τοῦ ἐπιπέδου. Θά λέγωμεν ὅτι αὕτη τείνει πρός τόν ἀριθμόν* ℓ *καθώς τό σύνολον A τείνει πρός τό σημεῖον* P_0 *τοῦ ἐπιπέδου καί γράφομεν:* $\lim\limits_{A\downarrow P_0} F(A)=\ell$, *ἐάν καί μόνον ἐάν, διά κάθε* $\varepsilon>0$ *ὑπάρχη ἀριθμός* $n(\varepsilon)>0$ *τοιοῦτος, ὥστε ὅταν τό A εἶναι ἕνα σύνολον περιέχον τό* P_0 *μέ διάμετρον* $\delta(A)<n(\varepsilon)$ *καί* $A\in\mathcal{A}$ *νά ἔχωμεν:* $|F(A)-\ell|<\varepsilon$.

Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν θά λέγωμεν ὅτι ἡ οἰκογένεια τῶν συνόλων A «φράσσεται ἐκ τῶν κάτω» ἀπό τό σημεῖον P_0.

Παριστῶντες μέ τό F(S) τήν συνολοσυνάρτησιν ἥτις δίδει τό ἐμβαδόν ἑνός χωρίου S, τότε θά ἔχωμεν: $\lim\limits_{S\downarrow P_0} F(S)=0$.

Ἐάν τό $\lim\limits_{A\downarrow P_0} F(A)$ ὑπάρχη διά κάθε $P_0\in D$, τότε αὕτη ὁρίζει μίαν σημειοσυνάρτησιν g ἐπί τοῦ D τοιαύτην, ὥστε:

$$g(P)=\lim_{A\downarrow P} F(A) \text{ διά κάθε } P\in D.$$

<u>Ὁρισμός VII - 11-3.</u> *Θά λέγωμεν ὅτι, ἡ συνολοσυνάρτησις* F(A) *τείνει ὁμαλῶς πρός τήν σημειοσυνάρτησιν* g(P) *καθώς τό* $A\downarrow P$ *καί γράφομεν:* $\lim\limits_{A\downarrow P} F(A)=g(P)$ *ὁμαλῶς διά κάθε* $P\in D$, *ἐάν, καί μόνον ἐάν, διά κάθε* $\varepsilon>0$ *ὑπάρχη* $n(\varepsilon)>0$ *τοιοῦτον, ὥστε:* $|F(A)-g(P)|<\varepsilon$ *οἱουδήποτε ὄντος τοῦ* $P\in D$ *καί A εἶναι ἕνα σύνολον εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει τό P μέ* $\delta(A)<n(\varepsilon)$.

Μέ τήν βοήθειαν τῆς ἐννοίας τοῦ ὁρίου μιᾶς συνολοσυναρτήσεως εἰσάγομεν μίαν δύο-διαστάσεων παράγωγον διά τήν συνολοσυνάρτησιν F, ἥτις ὁρίζεται ἐπί τῆς κλάσεως $\mathcal{A}$. Ἀνάλογοι ὁρισμοί δύνανται νά εἰσαχθοῦν διά παραγώγους ἀνωτέρας διαστάσεως.

Ἔστω F(A) μία προσθετική συνολοσυνάρτησις ὡρισμένη εἰς τά τετραγωνίσιμα ὑποσύνολα τοῦ χωρίου D καί ἔστω ἕν σημεῖον $P_0\in A$. Ἄς παραστήσω-

μεν διά $S(A)$ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου A. Θά λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμός ℓ εἶναι τό ὅριον τοῦ λόγου $\frac{F(A)}{S(A)}$ καθώς τό χωρίον A «τείνει» πρός τό σημεῖον $P_0 \in D$, ἐάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη $n(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε $\left|\frac{F(A)}{S(A)} - \ell\right| < \varepsilon$ διά κάθε χωρίον A εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει τό P_0 μέ $\delta(A) < n(\varepsilon)$.

Αὐτό τό ὅριον θά συμβολίζωμεν διά τοῦ συμβόλου $\lim_{A \downarrow P_0} \frac{F(A)}{S(A)} = \ell$ ἤ $\left.\frac{dF}{dS}\right|_{P=P_0}$ καί καλεῖται ***παράγωγος τῆς προσθετικῆς συνολοσυναρτήσεως*** $F(A)$ ***ὡς πρός τό ἐμβαδόν***.

Ἡ παράγωγος δέν εἶναι συνολοσυνάρτησις, ἀλλά μία συνήθης συνάρτησις, δηλ. μία μεταβλητή ποσότης ἐξαρτωμένη ἀπό ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.

Πᾶσαι αἱ συνολοσυναρτήσεις δέν ἔχουν παραγώγους.

Θά λέγωμεν δέ ὅτι, ἡ F εἶναι ὁμαλῶς διαφορίσιμος ὡς πρός τό ἐμβαδόν, ἐάν ἡ σύγκλισις τοῦ $\frac{F(A)}{S(A)}$ τοῦ $A \downarrow P$ εἶναι ὁμαλή.

Θεώρημα VII-11-1. Ἔστω D εἶναι ἕνα ἀνοικτόν σύνολον τοῦ ὁποίου τό σύνορον ἔχει μηδενικόν ἐμβαδόν καί $f(P)$, $P=(x,y)$ μία σημειοσυνάρτησις, ἥτις εἶναι συνεχής καί φραγμένη ἐπί τοῦ D καί μηδενική ἐκτός τοῦ D. Ὁρίζομεν μίαν συνολοσυνάρτησιν F ἐπί τῆς κλάσεως $\mathcal{A}$ ὑπό τοῦ τύπου:

$$F(G) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy, \quad G \in \mathcal{A}$$

Τότε ἡ F εἶναι ὁμαλῶς διαφορίσιμος εἰς κάθε κλειστόν ὀρθογώνιον κείμενον ἐντός τοῦ D καί ἐπί πλέον ἰσχύει: $\left.\frac{dF(G)}{dS(G)}\right|_{P=P_0} = f(P_0)$.

Ἀπόδειξις: Ἔστω R εἶναι ἕνα κλειστόν ὀρθογώνιον κείμενον ἐντός τοῦ D. Ἐπειδή τό D εἶναι ἀνοικτόν δυνάμεθα νά ἐπεκτείνομεν τό R εἰς τρόπον ὥστε νά ἐπιτύχωμεν ἕνα ὀρθογώνιον R_1 τό ὁποῖον περιέχει τό R καί ἐπίσης κείμενον ἐντός τοῦ D. Ἡ f εἶναι συνεχής εἰς τό R_1 συνεπῶς καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ. Δοθέντος λοιπόν ἑνός $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἕν $n(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ οἱωνδήποτε ὄντων τῶν P καί Q κειμένων εἰς τό R_1 καί μέ $\|P-Q\| < n(\varepsilon)$. Ἐπειδή τό R κεῖται ἐσωτερικῶς τοῦ R_1 δυνάμεθα νά ἐλαττώσωμεν τό $n(\varepsilon)$ ἐάν τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον,

εἰς τρόπον ὥστε $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ $P\in R$ καί μέ $\|P-Q\|<n(\varepsilon)$. Ἔστω G ἕνα σύνολον τῆς κλάσεως $\mathcal{A}$ τό ὁποῖον περιέχει τό σημεῖον $P_0\in R$ καί τοῦ ὁποίου $\delta(G)<n(\varepsilon)$. Ἔστω $M=\sup_{Q\in G} f(Q)$ καί $m=\inf_{Q\in G} f(Q)$. Τότε $|M-f(P_0)|<\varepsilon$ καί $|m-f(P_0)|<\varepsilon$.

Ἐπειδή $F(G)=\iint_G f(x,y)\,dxdy$, ἡ $F(G)$ κεῖται μεταξύ τῶν τιμῶν $m\cdot S(G)$ καί $M\cdot S(G)$, ὅπου $S(G)$ παριστᾶ τό ἐμβαδόν τοῦ G. Συνεπῶς ἔχομεν:

$$\left|\frac{F(G)}{S(G)}-f(P_0)\right|<\varepsilon.$$

Ἡ τελευταία σχέσις ἰσχύει διά κάθε σύνολον G περιέχον τό σημεῖον P_0 μέ $\delta(G)<n(\varepsilon)$ καί διά κάθε $P_0\in R$. Ἄρα ἡ F εἶναι ὁμαλῶς διαφορίσιμος ἐντός τοῦ R ὡς πρός τό ἐμβαδόν καί μέ παράγωγον τήν συνάρτησιν f.

§12. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΔΙΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

I. Ἐπιφανειακή πυκνότης. Θεωροῦμεν μίαν ἐπίπεδον πλάκα G κειμένη εἰς τό ἐπίπεδον oxy. Ἔστω ὅτι τό χωρίον G εἶναι τετραγωνίσιμον καί $S(G)$ τό ἐμβαδόν του. Ἄς καλέσωμεν δέ $\mu(G)$ τήν μᾶζαν, ἥτις εἶναι κατανεμημένη ἐπ' αὐτῆς τῆς πλακός. Ὁ λόγος $\frac{\mu(G)}{S(G)}$ καλεῖται ***μέση ἐπιφανειακή πυκνότης*** τῆς μάζης κατανεμημένης εἰς τό πεδίον G.

Ὑποθέτομεν ἤδη ὅτι, ἐλαττοῦται συνεχῶς τό μέγεθος τοῦ πεδίου G «περιορίζοντες» αὐτό εἰς ἕνα σταθερόν σημεῖον P_0. Ἐάν κατ' αὐτήν τήν διαδικασίαν ὁ ἀνωτέρω λόγος τείνῃ πρός ἕναν ἀριθμόν, ἔστω $\delta(P_0)$, αὐτό τό ὅριον καλεῖται ***ἐπιφανειακή πυκνότης τῆς μάζης κατανεμημένης εἰς τό σημεῖον*** P_0.

Ὅθεν: ἐξ ὁρισμοῦ $\delta(P_0)=\lim_{G\downarrow P_0}\frac{\mu(G)}{S(G)}$.

II. Ὑπολογισμός τῆς μάζης. Θεωροῦμεν μίαν ἐπίπεδον ὑλικήν πλάκα G κειμένη εἰς τό ἐπίπεδον oxy καί τῆς ὁποίας ἡ κατανομή τῆς μάζης ἐπ' αὐτῆς ἔχει ἐπιφανειακήν πυκνότητα $\delta(P)=\delta(x,y)$.

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς μάζης τῆς πλακός δοθέντος ὅτι ἡ $\delta(x,y)$ εἶναι συνεχής συνάρτησις τῶν x καί y ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Χωρίζομεν τό πεδίον G

εἰς n τό πλῆθος μέρη G_ρ κατά ἕνα αὐθαίρετον τρόπον καί εἰς κάθε τμῆμα G_ρ λαμβάνομεν καί ἀπό ἕνα τυχόν σημεῖον (ξ_ρ, η_ρ). Ἡ μᾶζα τοῦ στοιχείου G_ρ τοῦ ὁποίου τό ἐμβαδόν ἔστω ΔS_ρ εἶναι προσεγγιστικῶς $\delta(\xi_\rho, \eta_\rho) . \Delta S_\rho$. Ἡ δέ ὁλική μᾶζα $\mu(G)$ τῆς πλακός θά εἶναι κατά προσέγγισιν τό ἄθροισμα $\sum_{\rho=1}^{n} \delta(\xi_\rho, \eta_\rho) \Delta S_\rho$ (1) λαμβανόμενον τοῦτο ἐφ' ὅλων τῶν στοιχείων τῆς διαμερίσεως. Ἤδη ὑποθέτομεν ὅτι ἡ μεγίστη τῶν διαμέτρων τῆς διαμερίσεως καθώς τό $n \uparrow \infty$ τείνει πρός τό μηδέν τότε τό ἄθροισμα (1) θά τείνη πρός τό ὁλοκλήρωμα $\iint_G \delta(x,y)\,dx\,dy$, τό ὁποῖον θά δίδη συγχρόνως τήν ὁλικήν μᾶζαν τήν κατανεμημένην ἐπί τῆς ἐπιφανείας G.

Ὅθεν, $$\mu(G) = \iint_G \delta(x,y)\,dx\,dy$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, $\left.\dfrac{d\mu}{dS}\right|_{P=P_0} = \delta(P_0)$, ὅπου $P_0 = (x_0, y_0)$.

III. Προσδιορισμός τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου βάρους μιᾶς ἐπιπέδου πλακός.

Ζητοῦμεν νά προσδιορίσωμεν τάς συντεταγμένας τοῦ κέντρου βάρους (κ.β.) μιᾶς ἐπιπέδου ὑλικῆς πλακός G κειμένης εἰς τό ἐπίπεδον οxy καί ἐχούσης ἐπιφανειακήν πυκνότητα $\delta(x,y)$, ἥτις εἶναι συνεχής συνάρτησις τῶν x καί y. Πρός τοῦτο χωρίζομεν τήν πλάκα G εἰς n τό πλῆθος τμήματα G_ρ διά μιᾶς τυχούσης διαμερίσεως καί ἐφ' ἑκάστου τμήματος G_ρ λαμβάνομεν καί ἀπό ἕνα τυχόν σημεῖον (ξ_ρ, η_ρ). Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν προσεγγιστικῶς τήν μᾶζαν ἑκάστου τούτων τῶν G_ρ, ἥτις ὡς γνωστόν εἶναι $\delta(\xi_\rho,\eta_\rho) \cdot \Delta S_\rho$, ὅπου ΔS_ρ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου G_ρ. Ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω μαζῶν δύναται νά θεωρηθῆ ὅτι συγκεντροῦται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω τό (ξ_ρ, η_ρ). Τότε δυνάμεθα νά γράψωμεν τόν γνωστόν ἐκ τῆς Μηχανικῆς τύπον, ὅστις δίδει τάς συντεταγμένας (x_κ, y_κ) τοῦ κ.β. τοῦ ἀνωτέρω συστήματος τῶν n-ὑλικῶν σημείων, ἤτοι:

$$x_\kappa = \frac{\sum_{\rho=1}^{n} \xi_\rho \cdot \delta(\xi_\rho,\eta_\rho)\Delta S_\rho}{\sum_{\rho=1}^{n} \delta(\xi_\rho,\eta_\rho)\cdot\Delta S_\rho} \quad \text{καί} \quad y_\kappa = \frac{\sum_{\rho=1}^{n} \eta_\rho \cdot \delta(\xi_\rho,\eta_\rho)\Delta S_\rho}{\sum_{\rho=1}^{n} \delta(\xi_\rho,\eta_\rho)\Delta S_\rho} \qquad (1)$$

Οἱ τύποι (1) δίδουν προσεγγιστικῶς τάς συντεταγμένας τοῦ κ.β. τῆς ἐπιπέδου ὑλικῆς πλακός. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διαμέρισις γίνεται συνεχῶς λεπτοτέρα καί ἡ μεγίστη τῶν διαμέτρων τῶν G_ρ τείνει πρός τό μηδέν καθώς τό $n \uparrow \infty$.

Τότε έκ τῶν (1) λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} x_\kappa \cdot \iint_G \delta(x,y)\,dx\,dy &= \iint_G x\,\delta(x,y)\,dx\,dy \\ y_\kappa \cdot \iint_G \delta(x,y)\,dx\,dy &= \iint_G y\,\delta(x,y)\,dx\,dy \end{aligned}\right\} \quad \text{ἤ}$$

$$x_\kappa = \frac{\iint_G x\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_G \delta(x,y)\,dx\,dy}, \quad y_\kappa = \frac{\iint_G y\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_G \delta(x,y)\,dx\,dy} \qquad (2)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $\delta(x,y) = \text{σταθ.}$ οἱ ἀνωτέρω τύποι (2) γίνονται:

$$x_\kappa = \frac{\iint_G x\,dx\,dy}{\iint_G dx\,dy}, \quad y_\kappa = \frac{\iint_G y\,dx\,dy}{\iint_G dx\,dy} \qquad (3)$$

IV. Ροπή ἀδρανείας ἐπιπέδου πλακός.

Εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς Μηχανικῆς ὅτι ἡ ροπή ἀδρανείας ἑνός ὑλικοῦ σημείου Μ ἀπέχοντος ἀπόστασιν r ἀπό μίαν εὐθεῖαν ἤ ἕνα σημεῖον εἶναι $m\cdot r^2$, ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ἔστω ἡ ἐπίπεδος ὑλική πλάκα G ἔχουσα μίαν ἐπιφανειακήν πυκνότητα $\delta(x,y)$. Χωρίζομεν τό πεδίον G διά μιᾶς διαμερίσεως εἰς τμήματα G_ρ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἕνα ἐμβαδόν ΔS_ρ καί ἐφ' ἑκάστου τούτων λαμβάνομεν ἕν τυχόν σημεῖον (ξ_ρ, η_ρ) καί εἰς τό ὁποῖον θεωροῦμεν συγκεντρωμένην τήν μᾶζαν τοῦ G_ρ. Αὐτη ἡ μᾶζα προσεγγιστικῶς εἶναι $\delta(\xi_\rho,\eta_\rho)\,\Delta S_\rho$ καί ἡ ροπή ἀδρανείας ταύτης ὡς πρός τόν ἄξονα oy εἶναι $\xi_\rho^2\cdot\delta(\xi_\rho,\eta_\rho)\,\Delta S_\rho$.

Συνεπῶς τοῦ ἀνωτέρω ὑλικοῦ συστήματος ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρός τόν oy προσεγγιστικῶς εἶναι: $\sum_{\rho=1}^{n} \xi_\rho^2\cdot\delta(\xi_\rho,\eta_\rho)\,\Delta S_\rho$ (1)

Ἐάν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦ $n \uparrow \infty$ ἡ μεγίστη διάμετρος τῆς διαμερίσε-

ως τείνει πρός τό μηδέν, τότε τό ἄθροισμα (1) τείνει πρός τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα: $\iint\limits_G x^2\,\delta(x,y)\,dxdy$.

Ὅθεν, ἄν καλέσωμεν I_y τήν ροπήν ἀδρανείας τῆς ἀνωτέρω πλακός ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν y, τότε θά ἔχωμεν: $I_y = \iint\limits_G x^2\,\delta(x,y)\,dxdy$.

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν: $I_x = \iint\limits_G y^2\,\delta(x,y)\,dxdy$.

Ἡ δέ ροπή ἀδρανείας I_o ὡς πρός τήν ἀρχήν O (<u>Πολική ροπή ἀδρανείας</u>) εἶναι: $I_o = \iint\limits_G (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dxdy = I_x + I_y$.

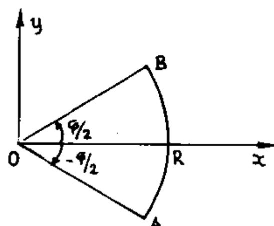
<u>Ἐφαρμογαί</u> 1η/ Νά εὑρεθῆ τό κ.β. κυκλικοῦ τομέως ἀκτῖνος R καί γωνίας φ τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἶναι $\delta(x,y)=C$.

<u>Λύσις</u>: Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τήν διχοτόμον τῆς ἐπικέντρου γωνίας (βλ. Σχ. 1), θά ἔχωμεν:

$$m = c\cdot\iint\limits_D dxdy \quad \text{καί} \quad x_k = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\,dxdy$$

Ἕνεκα τῆς συμμετρίας εἶναι $y_k = 0$.

Διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ἀνωτέρω ὁλοκληρωμάτων χρησιμοποιοῦμεν πολικάς συντεταγμένας ὅτε:



Σχ. 1

$$m = c\iint\limits_{D^*}\rho\,d\rho\,d\theta = c\cdot\int_{-\varphi/2}^{\varphi/2}d\theta\int_0^R\rho\,d\rho = c\cdot\varphi\cdot\frac{R^2}{2}\,.$$

$$\text{καί}\quad x_k = \frac{2}{C\cdot\varphi\cdot R^2}\iint\limits_{D^*}\rho\,\text{συν}\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{2}{C\cdot\varphi\cdot R^2}\cdot\int_{-\varphi/2}^{\varphi/2}\text{συν}\theta\,d\theta\int_0^R\rho^2\,d\rho = \frac{4R}{3C\cdot\varphi}\,\text{ημ}\frac{\varphi}{2}\,.$$

2α/. Νά εὑρεθῆ ἡ πολική ροπή ἀδρανείας τοῦ χωρίου τοῦ κειμένου εἰς τό ἐπίπεδον oxy καί φρασσομένου ὑπό τῶν καμπύλων $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$, $xy=2$, $xy=4$, ἔχοντος δέ πυκνότητα $\delta=1$.

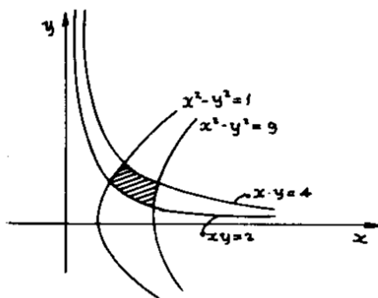
<u>Λύσις</u>: Ὡς γνωστόν ἡ πολική ροπή ἀδρανείας θά παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$I_o = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy \qquad (1).$$

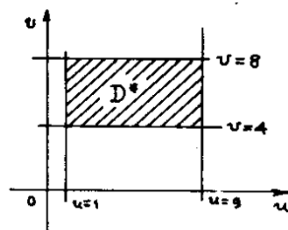
Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος (1) ἐκτελοῦμεν τόν μετασχηματισμόν:

$$x^2-y^2=u \quad \text{καί} \quad 2xy=v \qquad (2)$$

ὅτε τό χωρίον D μετασχηματίζεται εἰς τό ὀρθογώνιον χωρίον D^* (βλ. Σχ. 1_α καί Σχ. 1_β).



Σχ. 1(α)



Σχ. 1(β)

Ἔχομεν: $I_0 = \iint\limits_{D^*} (x^2+y^2)\cdot\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv \qquad (3)$

Ἐκ τῶν τύπων (2) δι' ὑψώσεως αὐτῶν εἰς τό τετράγωνον καί προσθέσεως συνάγομεν ὅτι: $x^2+y^2=\sqrt{u^2+v^2}$.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν: $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=1$.

Εἶναι δέ: $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2+4y^2=4\sqrt{u^2+v^2}$.

Συνεπῶς: $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{4\cdot\sqrt{u^2+v^2}}$. Ὁ (3) γίνεται:

$$I_0=\iint\limits_{D^*}\sqrt{u^2+v^2}\cdot\frac{du\,dv}{4\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{1}{4}\int_{u=1}^{9}du\cdot\int_{v=4}^{8}dv=8.$$

§ 13. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΝ

Εἰς τό πρῶτον Τόμον σελ. 658 ἐδώσαμεν τόν ὁρισμόν τῆς ὁμαλῆς συγκλίσεως τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος $\varphi(\lambda)=\int_a^\infty f(x,\lambda)\,dx$ (1) ὡς πρός τήν παράμε-

τρον λ, ἤτοι: τό ὁλοκλήρωμα (1) συγκλίνει ὁμαλῶς διά τά $\lambda \in I$ (I: ἕνα διάστημα τῆς $\mathbb{R}$) ἐάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἕν $\delta(\varepsilon)$ ἐξαρτώμενον μόνον ἐκ τοῦ ε καί οὐχί ἐκ τοῦ λ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν: $\left|\varphi(\lambda) - \int_a^u f(x,\lambda)dx\right| = \left|\int_u^\infty f(x,\lambda)dx\right| < \varepsilon$ διά κάθε $u > \delta(\varepsilon)$ καί $\lambda \in I$ (ἐξυπακούεται $u \geq a$).

Παραπέμπομεν τόν ἀναγνώστην εἰς τόν πρῶτον Τόμον σελ. 658-659 διά τά κριτήρια συγκλίσεως τοῦ Cauchy καί τοῦ Weierstrass.

Θεώρημα VII-13-1. Ἔστω τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα:

$\varphi(\lambda) = \int_a^\infty f(x,\lambda)dx$, ὅπου ἡ $f(x,\lambda)$ συνεχής συνάρτησις ὡς πρός λ καί τό ὁποῖον συγκλίνει ὁμαλῶς διά κάθε $\lambda \in I$. Τότε ἡ $\varphi(\lambda)$ εἶναι συνεχής συνάρτησις. Ἤτοι: $\lim_{\lambda \to \lambda_0} \varphi(\lambda) = \int_a^\infty \lim_{\lambda \to \lambda_0} f(x,\lambda)dx = \int_a^\infty f(x,\lambda_0)dx = \varphi(\lambda_0)$.

Ἀπόδειξις: Σχηματίζομεν τήν διαφοράν:

$$\varphi(\lambda+h) - \varphi(\lambda) = \int_a^\infty [f(x,\lambda+h) - f(x,\lambda)]dx$$

$$= \int_a^u [f(x,\lambda+h) - f(x,\lambda)]dx + \int_u^\infty f(x,\lambda+h)dx - \int_u^\infty f(x,\lambda)dx$$

καί $$|\varphi(\lambda+h) - \varphi(\lambda)| \leq \int_a^u |f(x,\lambda+h) - f(x,\lambda)|dx + \left|\int_u^\infty f(x,\lambda+h)dx\right| + \left|\int_u^\infty f(x,\lambda)dx\right|. \quad (1)$$

Λόγῳ τῆς ὁμαλῆς συγκλίσεως τοῦ ὁλοκληρώματος διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἕν $\delta(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε ὅταν $u > \delta(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν:

$$\left|\int_u^\infty f(x,\lambda)dx\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

ὁμοίως θά εἶναι: $$\left|\int_u^\infty f(x,\lambda+h)dx\right| < \varepsilon \qquad (3)$$

Τό u εἶναι μία σταθερά τιμή ἀνεξάρτητος τοῦ h, ὅθεν δυνάμεθα νά ἐκλέξωμεν τό h ἀρκετά μικρό ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\int_a^u |f(x,\lambda+h) - f(x,\lambda)|dx < \varepsilon \quad (4)$$

Ἡ (1), λόγῳ τῶν (2), (3) καί (4), καθίσταται:

$$|\varphi(\lambda+h) - \varphi(\lambda)| < 3\varepsilon.$$

Ἡ τελευταία σχέσις ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως $\varphi(\lambda)$ διά $\lambda \in I$.

Θεώρημα VII-13-2. Μέ τάς ὑποθέσεις τῆς προηγουμένης προτάσεως καί ἐάν $\gamma, \delta \in I$, τότε θά ἔχωμεν:

1ον/
$$\int_\gamma^\delta \varphi(\lambda)d\lambda = \int_a^\infty dx \int_\gamma^\delta f(x,\lambda)d\lambda \qquad (1)$$

2ον/ Ἐάν ὑπάρχῃ ἡ $\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}$ καί εἶναι μία συνάρτησις συνεχής ὡς πρός x καί λ διά κάθε $x>a$ καί διά κάθε $\lambda \in I$ καί ἐάν τό ὁλοκλήρωμα:

$$\varphi_1(\lambda) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}dx \qquad (2)$$

ὑπάρχῃ καί συγκλίνῃ ὁμαλῶς διά $\lambda \in I$, τό δέ ὁλοκλήρωμα:

$$\int_a^\infty f(x,\lambda_0)\,dx \qquad (3)$$

ὑπάρχει διά μίαν τιμήν $\lambda_0 \in I$, τότε τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα (3) ὁρίζει διά κάθε $\lambda \in I$ μίαν συνάρτησιν $\varphi(\lambda)$ τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος $\varphi'(\lambda)=\varphi_1(\lambda)$, ἤτοι:

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\,dx \quad \text{(τύπος τοῦ Leibnitz)}.$$

Ἀπόδειξις: 1ον/ Ἔχομεν:

$$\int_\gamma^\delta \varphi(\lambda)d\lambda = \int_\gamma^\delta d\lambda \int_a^\infty f(x,\lambda)dx = \int_\gamma^\delta d\lambda \left[\int_a^u f(x,\lambda)dx + \int_u^\infty f(x,\lambda)\,dx \right]$$

$$= \int_\gamma^\delta d\lambda \int_a^u f(x,\lambda)\,dx + \int_\gamma^\delta d\lambda \int_u^\infty f(x,\lambda)\,dx .$$

Εἰς τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα τῆς τελευταίας ἰσότητος τό ὁποῖον εἶναι μή γενικευμένον δυνάμεθα νά κάμνωμεν ἐναλλαγήν τῶν ὁρίων τοῦ ὁλοκληρώματος, ἤτοι:

$$\int_a^u dx \int_\gamma^\delta f(x,\lambda)\,d\lambda.$$

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν τώρα ὅτι τοῦ $u \uparrow \infty$ τό $\int_\gamma^\delta d\lambda \int_u^\infty f(x,\lambda)\,dx$ τείνει πρός τό μηδέν.

Πράγματι, δοθέντος τοῦ $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἓν $\delta(\varepsilon) > 0$ ἀνεξάρτητον τοῦ λ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\left| \int_u^\infty f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon, \text{ διά } u > \delta(\varepsilon)$$

Ὅθεν, $$\left| \int_\gamma^\delta d\lambda \int_u^\infty f(x,\lambda)\,dx \right| \leq \int_\gamma^\delta d\lambda \left| \int_u^\infty f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon \cdot (\delta - \gamma).$$

Ὅθεν, $$\int_\gamma^\delta \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_a^\infty dx \int_\gamma^\delta f(x,\lambda)\,d\lambda .$$

2ον/ Θεωροῦμεν τό ὁλοκλήρωμα:

$$\varphi_1(\lambda) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\,dx$$

τό ὁποῖον ὑπάρχει ἐξ ὑποθέσεως καί συγκλίνει ὁμαλῶς ὡς πρός λ. Συμφώνως λοιπόν πρός τό 1ον/ μέρος τοῦ Θεωρήματος ἔχομεν:

$$\int_{\lambda_0}^\xi \varphi_1(\lambda)\,d\lambda = \int_a^\infty dx \int_{\lambda_0}^\xi \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\,d\lambda = \int_a^\infty \left[f(x,\xi) - f(x,\lambda_0)\right]dx.$$

Ἐξ ὑποθέσεως ὑπάρχει τό $\int_a^\infty f(x,\lambda_0)\,dx$, συνεπῶς ὑπάρχει καί τό $\int_a^\infty f(x,\xi)\,dx$ διά κάθε ξ τό ὁποῖον ἀνήκει εἰς ἕνα κατάλληλον ὑποδιάστημα τοῦ I (διατί;) Ἔχομεν λοιπόν ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως:

$$\int_{\lambda_0}^\xi \varphi_1(\lambda)\,d\lambda = \int_a^\infty f(x,\xi)\,dx - \int_a^\infty f(x,\lambda_0)\,dx.$$

Ἡ συνάρτησις $\varphi_1(\lambda)$ εἶναι συνεχής, τό πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος εἶναι μία συνάρτησις παραγωγίσιμος ὡς πρός ξ καί τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος εἶναι $\varphi_1(\xi)$.

Παραγωγίζοντες λοιπόν τήν ἀνωτέρω ἰσότητα ὡς πρός ξ λαμβάνομεν:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_a^\infty f(x,\xi)\,dx \qquad \text{ἤ}$$

ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως $\varphi_1(\xi) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial \xi}\,dx$, ἔχομεν τελικῶς: $\frac{\partial}{\partial \xi}\int_a^\infty f(x,\xi)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial \xi}\,dx.$

Θεώρημα VII-13-3 Ἐάν αἱ συναρτήσεις $f(x,\lambda)$ καί $\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ εἶναι συνεχεῖς ἐπί τοῦ χωρίου $J=[a,b]\times[\gamma,\delta]$ καί αἱ συναρτήσεις $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ εἶναι ὡρισμέναι καί ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους ἐπί τοῦ διαστήματος $[\gamma,\delta]$, τότε ἡ συνάρτησις $\varphi(\lambda)=\int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx$ εἶναι παραγωγίσιμος ἐπί τοῦ $[\gamma,\delta]$ καί ἰσχύει ὁ τύπος:

$$\boxed{\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx=\int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)}\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}\,dx+v'(\lambda)\cdot f(v(\lambda),\lambda)-u'(\lambda)\cdot f(u(\lambda),\lambda)}$$

Ἀπόδειξις Ἐάν $u(\lambda)=a$, $v(\lambda)=b$, $u(\lambda_0)=a_0$ καί $v(\lambda_0)=b_0$, ὅπου λ_0 τυχόν σημεῖον τοῦ $[\gamma,\delta]$, ἔχομεν:

$$\varphi(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)\,dx=\int_{a_0}^{b_0} f(x,\lambda)\,dx+\int_{b_0}^{b} f(x,\lambda)\,dx-\int_{a_0}^{a} f(x,\lambda)\,dx \qquad (1)$$

καί

$$\varphi(\lambda_0)=\int_{a_0}^{b_0} f(x,\lambda_0)\,dx \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=\int_{a_0}^{b_0}\frac{f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\,dx+\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\int_{b_0}^{b} f(x,\lambda)\,dx-\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\int_{a_0}^{a} f(x,\lambda)\,dx \qquad (3)$$

Ἐξετάζομεν ἤδη ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (3).

i) Ἡ $\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ ὡς συνεχής συνάρτησις ἐπί τοῦ συμπαγοῦς χωρίου J εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, ἄρα:

Διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός $\eta(\varepsilon)>0$ (ἐξαρτώμενος μόνον ἐκ τοῦ ε) τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε $\lambda\in[\gamma,\delta]$ μέ $|\lambda-\lambda_0|<\eta(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν:

$$\left|\frac{f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-\frac{\partial f(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}\right|<\varepsilon \qquad (4)$$

Ἀλλά κατά τό θεώρημα μέσης τιμῆς (βλ. Τόμος Α, θεώρ. XI-3-2β) ἰσχύει:

$$f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)=(\lambda-\lambda_0)\cdot f'_\lambda(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0)) \quad (5),\quad 0<\theta<1.$$

Ἐκ τῶν (4) καί (5) λαμβάνομεν:

$$\left|\frac{f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-\frac{\partial f(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}\right|=\left|\frac{\partial f(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))}{\partial\lambda}-\frac{\partial f(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}\right|<\varepsilon$$

Ὅθεν τό πηλίκον:

$\frac{f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\longrightarrow\frac{\partial f(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}$ ὁμαλῶς ὅταν $\lambda\to\lambda_0$, ὁπότε, κατά τό θεώ-

ρημα VII-13-1 ἔχομεν: (Θεωρ. III 10-1

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_{a_0}^{b_0}\frac{f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\,dx=\int_{a_0}^{b_0}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\,dx=\int_{a_0}^{b_0}\frac{\partial f(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}\,dx \qquad (6)$$

ii) Τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς τοῦ ὁλοκληρ. Λογισμοῦ. (Τόμος Α', σελὶς 505), γράφεται:

$$\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\int_{b_0}^{b} f(x,\lambda)\,dx=\frac{\upsilon(\lambda)-\upsilon(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\cdot f(\upsilon(\lambda_0)+\theta(\upsilon(\lambda)-\upsilon(\lambda_0)),\lambda_0)$$

καὶ ὅθεν:
$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\int_{b_0}^{b} f(x,\lambda)\,dx=\upsilon'(\lambda_0)\cdot f(\upsilon(\lambda_0),\lambda_0) \qquad (7)$$

καθόσον ἡ υ εἶναι παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ $[\gamma,\delta]$ καὶ ἡ f συνεχὴς ἐπὶ τοῦ J.

iii) Ὁμοίως διὰ τὸ τρίτον ὁλοκλήρωμα ἰσχύει.

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)}\int_{a_0}^{a} f(x,\lambda)\,dx=u'(\lambda_0)\,f(u(\lambda_0),\lambda_0) \qquad (8)$$

Ἐκ τῶν (3), (6), (7) καὶ (8) ἕπεται ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ κάθε $\lambda_0\in[\gamma,\delta]$.

<u>Παρατήρησις</u>. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τύπος τοῦ Leibniz, πού ἀντιστοιχεῖ σὲ ὁλοκλήρωμα μὲ ἄκρα σταθερά εἶναι μερικὴ περίπτωσις αὐτοῦ.

<u>Θεώρημα VII-13-4</u>. <u>Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις</u> $f(x,y)$ <u>εἶναι συνεχὴς διὰ</u> $a\le x<+\infty$ <u>καὶ</u> $\gamma\le y<+\infty$ <u>καὶ ὅτι τὰ ὁλοκληρώματα</u>:

$$\int_{\gamma}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{καὶ} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x,y)\,dx \qquad (1)$$

<u>συγκλίνουν ὁμαλῶς ἐπὶ ἑκάστου πεπερασμένου διαστήματος</u> $a\le x\le A$ <u>καὶ</u> $\gamma\le y\le\Gamma$ <u>ἀντιστοίχως</u>. <u>Ἐὰν ἐπὶ πλέον ἕνα τουλάχιστον τῶν ὁλοκληρωμάτων</u>:

$$\int_{a}^{+\infty}dx\int_{\gamma}^{+\infty}|f(x,y)|\,dy \quad \text{καὶ} \quad \int_{\gamma}^{+\infty}dy\int_{a}^{+\infty}|f(x,y)|\,dx \qquad (2)$$

<u>συγκλίνῃ, τότε καὶ τὰ ὁλοκληρώματα</u>:

$$\int_{a}^{+\infty}dx\int_{\gamma}^{+\infty}f(x,y)\,dy, \quad \int_{\gamma}^{+\infty}dy\int_{a}^{+\infty}f(x,y)\,dx \qquad (3)$$

<u>ὁμοίως συγκλίνουν καὶ εἶναι ἴσα μεταξύ των</u>, δηλ. <u>ἰσχύει ὁ τύπος</u>:

$$\int_{a}^{+\infty}dx\int_{\gamma}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_{\gamma}^{+\infty}dy\int_{a}^{+\infty}f(x,y)\,dx$$

__Ἀπόδειξις__: Ὑποθέτομεν ὅτι τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα τῶν (2) συγκλίνει. Ἐπειδή $f(x,y) \leq |f(x,y)| \Longrightarrow \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx \leq \int_a^{\infty} |f(x,y)|\,dx \Longrightarrow \int_\gamma^\delta dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \leq \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ (λόγῳ τοῦ Κριτηρίου συγκρίσεως). Ὅθεν, καί τό δεύτερον τῶν ὁλοκληρωμάτων (3) συγκλίνει. Ἀρκεῖ ἤδη ν' ἀποδείξωμεν ὅτι:

(φραγμένο)

$$\lim_{\ell \to +\infty} \int_a^\ell dx \int_\gamma^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \qquad (4)$$

Ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως τό ὁλοκλήρωμα $\int_\gamma^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει ὁμαλῶς, τότε συμφώνως πρός τό Θεώρημα VII-13-2 (ἐν προκειμένῳ τήν θέσιν τοῦ λ κατέχει τό x) θά ἔχωμεν:

$$\int_a^\ell dx \int_\gamma^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^\ell f(x,y)\,dx \qquad (5)$$

διά κάθε πεπερασμένον $\ell > a$.

Ἤδη ἄς ὑπολογίσωμεν τήν διαφοράν μεταξύ τῆς μεταβλητῆς ποσότητος $\int_a^\ell dx \int_\gamma^{+\infty} f(x,y)\,dy$ καί τῆς σταθερᾶς ποσότητος $\int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν χώραν εἰς τήν σχέσιν (4). Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν σχέσιν (5), θά ἔχωμεν:

$$\left| \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^\ell dx \int_\gamma^{+\infty} f(x,y)\,dy \right| = \left| \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^\ell f(x,y)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_\gamma^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int_\gamma^{\gamma_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)\,dx + \int_{\gamma_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)\,dx \right|$$

$$\leq \left| \int_\gamma^{\gamma_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| + \int_{\gamma_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} |f(x,y)|\,dx \leq \left| \int_\gamma^{\gamma_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| +$$

$$+ \int_{\gamma_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx \quad (6), \text{ διά κάθε } \gamma_1 > \gamma.$$

Ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως τό ὁλοκλήρωμα $\int_\gamma dy \int_a |f(x,y)|\,dx$ συγκλίνει, ἔπεται ὅτι διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\gamma_1 > \gamma$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\int_{\gamma_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7)$$

Ἤδη σταθεροποιοῦμεν μίαν τιμήν τοῦ $\gamma_1 > \gamma$ διά τήν ὁποίαν νά ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης (7) καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς ἐκλέγομεν μίαν ποσότητα $L(\varepsilon)$ τοιαύτην, ὥστε νά πληροῦται ἡ ἀνι-

ὥστε $\left| \int_\ell^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(\gamma_1-\gamma)}$ δι' ὅλα τά $\ell > L(\varepsilon)$ καί δι' ὅλα τά $y \in [\gamma, \gamma_1]$ (βλ. σχετικῶς ὁρισμόν σελ. 201-202, εὐτενέστερον δέ, Τόμον Α' σελ. 657-658).

Οὕτω θά ἔχωμεν:

$$\left| \int_\gamma^{\gamma_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon(\gamma_1-\gamma)}{2(\gamma_1-\gamma)} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (8)$$

δι' ὅλα τά $\ell > L(\varepsilon)$.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τάς σχέσεις (6), (7), (8) θά ἔχωμεν τελικῶς τήν ἀνισότητα:

$$\left| \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^{\ell} dx \int_\gamma^{+\infty} f(x,y)\,dy \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (9)$$

δι' ὅλα τά ℓ.

Ἐκ τῆς σχέσεως (9) λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_a^{\ell} dx \int_\gamma^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \quad \text{ἤ}$$

$$\int_a^{+\infty} dx \int_\gamma^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_\gamma^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx. \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Παρατήρησις: Πρέπει νά σημειωθῆ ἰδιαιτέρως ὅτι παρόμοια θεωρήματα ἰσχύουν ἐπίσης καί διά γενικευμένα ὁλοκληρώματα μή φραγμένων συναρτήσεων.

Ἐφαρμογή. 1η. Χρησιμοποιῶντας τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$, $(\lambda > 0)$, δείξατε ὅτι:

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\left(\frac{b}{a}\right)$, $(0<a<b)$ (ὁλοκλήρωμα τοῦ Frullani)

Λύσις: Ἔστω $f(x,\lambda) \equiv e^{-\lambda x}$. Αὐτή εἶναι συνεχής διά καθε $\lambda > 0$, τό δέ γενικευμένον ὁλοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς ὡς πρός $\lambda \in [\gamma, +\infty]$, $(\gamma > 0)$ καί ἰσοῦται μέ:

$\varphi(\lambda) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$. Ἡ $\varphi(\lambda)$ διά $\lambda > 0$, συμφώνως πρός τό θεώρημα VII-13-1, εἶναι συνεχής καί ἐάν $0<a\leq\lambda\leq b$ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1) τοῦ θεωρήματος VII-13-2 ἔχομεν:

$$\int_a^b \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_a^b \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx \right\} d\lambda = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_a^b e^{-\lambda x}\,d\lambda \right\} dx \qquad (1)$$

Ἀλλά: $\int_a^b \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_a^b \frac{1}{\lambda}\,d\lambda = \log b - \log a = \log\left(\frac{b}{a}\right)$ καί $\int_a^b e^{-\lambda x}d\lambda = -\frac{e^{-\lambda x}}{x}\Big|_a^b = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$, ὅθεν ἡ (1) δίδει:

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \int_a^b e^{-\lambda x}\,d\lambda \right\} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ἐφαρμογὴ 2α Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\eta\mu x}{x}\,dx$

Λύσις: Πρός τοῦτο θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν:

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\frac{\eta\mu x}{x}\,dx \qquad (1)$$

αὐτό τό ὁλοκλήρωμα συγκλίνει ὁμαλῶς ἐάν $\lambda \geq 0$, ἐνῶ τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\eta\mu x\,dx \qquad (2)$$

συγκλίνει ὁμαλῶς ἐάν $\lambda \geq \delta > 0$, ὅπου δ εἶναι ἕνας αὐθαίρετος μικρός θετικός ἀριθμός.

Τ'ἀνωτέρω θά τά ἀποδείξωμεν κατωτέρω.

Ἡ $\varphi(\lambda)$ διά $\lambda \geq 0$, συμφώνως πρός τό θεώρημα VII-13-1, εἶναι συνεχής καί ἐάν $\lambda \geq \delta$ θά ἔχωμεν:

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-\lambda x}\frac{\eta\mu x}{x}\right)dx \qquad \text{ἤ}$$

$$\varphi'(\lambda) = -\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\eta\mu x\,dx \qquad (3)$$

Τό τελευταῖον τοῦτο ὁλοκλήρωμα ὑπολογίζεται εὐκόλως ἐφαρμόζοντες τήν κατά παράγοντας ὁλοκλήρωσιν καί θά ἔχωμεν:

$$\varphi'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2} \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς (4) δι' ὁλοκληρώσεως λαμβάνομεν:

$$\varphi(\lambda) = \tau o\xi_o \sigma\varphi\lambda + C \qquad (5)$$

ὅπου C εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά.

Ἐξ ἄλλου ἐπειδή

$$\left|\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\frac{\eta\mu x}{x}\,dx\right| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} \qquad (6)$$

τό ὁποῖον ἰσχύει ἐάν $\lambda \geq \delta$, παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\varphi(\lambda) = 0$.

Ἐξ ἄλλου $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \tau o\xi_o\,\sigma\varphi\lambda = 0$.

Λαμβάνοντες λοιπόν τά ὅρια τῆς (5) διά $\lambda \to \infty$, συνάγομεν ὅτι θά πρέπει $c = 0$.

Συνεπῶς:

$$\varphi(\lambda) = \tau o\xi_o\,\sigma\varphi\lambda \qquad (7)$$

Λόγω τῆς συνεχείας τῆς $\varphi(\lambda)$ ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = \varphi(0) = \int_0^\infty \frac{\eta\mu x}{x}\, dx \qquad (8)$$

Ἐκ τῆς (7) λαμβάνομεν:

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \tau o\xi_o \sigma\varphi\lambda = \frac{\pi}{2} \qquad (9)$$

Ἐκ τῶν (8) καί (9) λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \qquad (10)$$

Ἤδη θ' ἀποδείξωμεν τήν ὁμαλήν σύγκλισιν τῶν ὁλοκληρωμάτων (1) καί (2). Πράγματι, διά τό ὁλοκλήρωμα (1) ἐάν u εἶναι ἕνας αὐθαίρετος θετικός ἀριθμός καί $\kappa\pi$ εἶναι τό ἐλάχιστον πολλαπλάσιον τοῦ π τό ὁποῖον ὑπερβαίνει τόν u, τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_u^\infty e^{-\lambda x} \frac{\eta\mu x}{x}\, dx = \int_u^{\kappa\pi} e^{-\lambda x} \frac{\eta\mu x}{x}\, dx + \sum_{n=\kappa}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\lambda x} \frac{\eta\mu x}{x}\, dx.$$

Τό τελευταῖον ἄθροισμα εἶναι μία ἐναλλάσσουσα σειρά τῆς ὁποίας οἱ ὅροι τείνουν ἀπολύτως πρός τό μηδέν. Ὅθεν, κατά τήν πρότασιν VIII-4-1 (κριτήριον τοῦ Leibniz) Τόμος I, σελ. 271 ἡ σειρά αὕτη συγκλίνει καί ἐπί πλέον ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἀθροίσματος εἶναι μικροτέρα ἀπό τόν πρῶτον ὅρον τῆς σειρᾶς (ὅστις θεωρεῖται θετικός). Ἔχομεν λοιπόν:

$$\left| \int_u^\infty e^{-\lambda x} \frac{\eta\mu x}{x}\, dx \right| < \int_u^{\kappa\pi} e^{-\lambda x} \frac{|\eta\mu x|}{x}\, dx + \int_{\kappa\pi}^{(\kappa+1)\pi} e^{-\lambda x} \frac{|\eta\mu x|}{x}\, dx$$

$$= \int_u^{(\kappa+1)\pi} e^{-\lambda x} \frac{|\eta\mu x|}{x}\, dx < \int_u^{(\kappa+1)\pi} \frac{dx}{u} < \frac{2\pi}{u} < \varepsilon.$$

(διότι $e^{-\lambda x} < 1, \frac{1}{x} < \frac{1}{u}$ καί $|\eta\mu x| \leq 1$).

Ὥστε ἐάν $u > \frac{2\pi}{\varepsilon} \equiv \delta(\varepsilon)$, τότε $\left| \int_u^\infty e^{-\lambda x} \frac{\eta\mu x}{x}\, dx \right| < \varepsilon$.

Ἐπί πλέον τό ὁλοκλήρωμα (1) διά $\lambda = 0$ ὑπάρχει, βλ. Τόμος I, σελ. 544. Ἐκ τῶν

ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι τό ὁλοκλήρωμα (1) συγκλίνει ὁμαλῶς διά καθε $\lambda \geq \alpha$

(Διά τήν ὁμαλήν σύγκλισιν τοῦ (1) παραπέμπομεν ἐπίσης εἰς τόν Τόμον A_1, σελ. 573- 574, ἀσκήσεις 4-5).

Ἡ ὁμαλή σύγκλισις τοῦ (2) συνάγεται ὡς ἀκολούθως: Επειδή εἶναι, $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\lambda x} = 0$, διά $\lambda \geq \delta > 0$ ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν: $e^{-\lambda x} < \frac{1}{x^2}$ διά x ἀρκούντως μεγάλο, ἤτοι διά κάθε $x > x_0$. Ἐάν λοιπόν λάβωμεν $M(x) = \frac{1}{x^2}$ καί γνωστοῦ ὄντως ὅτι τό $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει, ἕπεται κατά τό κριτήριον τοῦ Weierstrass (βλ. Τόμο A_1 σελ. 572, Θεώρ. XV-9-1) καί τό $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \eta\mu x dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς διά κάθε $\lambda \geq \delta > 0$.

§ 14. ΤΟ ΔΙΠΛΟΥΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ ΤΟΥ

Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν $f(x,y)$ ἡ ὁποία εἶναι φραγμένη καί ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ χωρίου $D \subset \mathbb{R}^2$.

Ἔστω ἕνα τυχόν σημεῖον $(a,\gamma) \in D$ καί θεωροῦμεν τό ὀρθογώνιον $T = [a,x] \times [\gamma, y]$ περιεχόμενον ἐντός τοῦ D.

Τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_T f(u,v)\,du\,dv$$

ἐξαρτᾶται ἑκάστοτε ἐκ τῶν x καί y, ἤτοι εἶναι συνάρτησις τῶν $x, y \in D$. Ἑπομένως δυνάμεθα νά θέσωμεν:

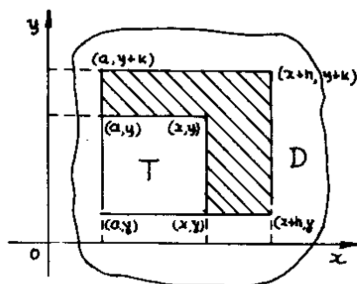
$$F(x,y) = \int_a^x \left\{ \int_\gamma^y f(u,v)\,dv \right\} du.$$

Ἡ συνάρτησις $F(x,y)$ παρουσιάζει ὡρισμένας ἰδιότητας συνεχείας καί διαφορισιμότητος τάς ὁποίας καί θά ἐξετάσωμεν.

<u>Πρότασις VII- 14-1</u>. <u>Ἐάν ἡ συνάρτησις</u> $f(x,y)$ <u>εἶναι φραγμένη καί ὁλοκληρώσιμος ἐν D, τότε ἡ συνάρτησις</u> $F(x,y) = \int_a^x du \int_\gamma^y f(u,v)\,dv$ <u>εἶναι συνεχής</u>.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἔστω τό σταθερόν σημεῖον (a,γ) τοῦ D καί τά σημεῖα (x,y) καί $(x+h, y+k)$ τοιαῦτα ὥστε τά ὀρθογώνια $[a,x] \times [\gamma,y]$ καί $[a,x+h] \times [\gamma,y+k]$

νά εὑρίσκωνται ἐντός τοῦ χωρίου D.
(βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) =$$

$$= \int_a^{x+h} du \int_\gamma^{y+k} f(u,v)\,dv - \int_a^x du \int_\gamma^y f(u,v)\,dv$$

$$= \int_a^x du \int_\gamma^{y+k} f(u,v)\,dv + \int_x^{x+h} du \int_\gamma^{y+k} f(u,v)\,dv - \int_a^x du \int_\gamma^y f(u,v)\,dv$$

$$= \int_a^x du \int_\gamma^y f(u,v)\,dv + \int_a^x du \int_y^{y+k} f(u,v)\,dv + \int_x^{x+h} du \int_\gamma^{y+k} f(u,v)\,dv - \int_a^x du \int_\gamma^y f(u,v)\,dv$$

$$= \int_a^x du \int_y^{y+k} f(u,v)\,dv + \int_x^{x+h} du \int_\gamma^{y+k} f(u,v)\,dv.$$

Ἐπειδή ἡ $f(u,v)$ εἶναι φραγμένη ἐν D θά εἶναι $|f(u,v)| \leq M$ διά κάθε $(u,v) \in D$.
Ὅθεν ἔχομεν:

$$|F(x+h, y+k) - F(x,y)| \leq \left|\int_a^x du \int_y^{y+k} M\,dv\right| + \left|\int_x^{x+h} du \int_\gamma^{y+k} M\,dv\right| = M\cdot|x-a|\cdot|k| + M\cdot|h|\cdot|y+k-\gamma|.$$

Τό τελευταῖον ἀποδεικνύει τήν συνέχειαν τῆς $F(x,y)$.

<u>Πρότασις VII-14-2</u>. Ἐάν <u>ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής ἐν D</u>, <u>τότε ἡ συνάρτησις</u> $F(x,y) = \int_a^x du \int_\gamma^y f(u,v)\,dv$ <u>ἔχει μερικάς παραγώγους ὡς πρός</u> x <u>καί</u> y <u>συνεχεῖς διδομένας ὑπό τῶν τύπων</u>:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_\gamma^y f(x,v)\,dv, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x f(u,y)\,du.$$

<u>Ἐπί πλέον ὑπάρχει καί ἡ</u> $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, <u>εἶναι συνεχής καί παρέχεται ὑπό τῆς σχέσεως</u> $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως ἡ $f(u,v)$ εἶναι συνεχής ἐν D, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις:

$$\phi(u,y) = \int_\gamma^y f(u,v)\,dv$$

εἶναι συνεχής διά κάθε $(u,y) \in D$. Συνεπῶς ἡ $\phi(u,y)$ θά εἶναι καί ὁλοκλη-

ρώσιμος ὡς πρός u. Ὅθεν,

$$\int_a^x \phi(u,y)\,du = \int_a^x du \int_\gamma^y f(u,v)\,dv \equiv F(x,y)$$

Εἶναι δέ: $\left(\int_a^x \phi(u,y)\,du\right)'_x = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \phi(x,y) = \int_\gamma^y f(x,v)\,dv.$

Ἐδείχθη ὅτι: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \int_\gamma^y f(x,v)\,dv.$

Ὁμοίως θέτομεν: $\psi(x,v) = \int_a^x f(u,v)\,du$ καί ὡς ἀνωτέρω, ἀποδεικνύομεν ὅτι:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \psi(x,y) = \int_a^x f(u,y)\,du$$

Τέλος διά νά ἀποδείξωμεν τήν ὕπαρξιν τῆς $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις:

$\phi(x,y) = \int_\gamma^y f(x,v)\,dv$ καί $\psi(x,y) = \int_a^x f(u,y)\,du$ ἔχουν μερικάς παραγώγους ὡς πρός y καί x ἀντιστοίχως. Ἔχομεν λοιπόν:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_\gamma^y f(x,v)\,dv\right) = f(x,y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^x f(u,y)\,du\right) = f(x,y)$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων συνάγομεν:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x,y).$$

Ἐφαρμογή: Νά εὑρεθῇ μία συνάρτησις $F(x,y)$ τοιαύτη, ὥστε $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$ (Διαφορική ἐξίσωσις μετά μερικῶν παραγώγων).

Λύσις: Κατά τ' ἀνωτέρω ἡ $F(x,y)$ θά παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$F(x,y) = \int_a^x du \int_\gamma^y f(u,v)\,dv + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

ὅπου $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ τυχοῦσαι συναρτήσεις παραγωγίσιμοι ὡς πρός x καί y ἀντιστοίχως.

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:

1. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy$ ὅπου D εἶναι τό χωρίον πού περικλείεται ὑπό τῶν παραβολῶν: $y=x^2$, $x=y^2$.

2. Νά ὑπολογισθῆ κατά δύο τρόπους τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, ὅπου D εἶναι τό χωρίον τό ὁποῖον περιορίζεται ἀπό τῆς εὐθεῖες $x=2$, $y=1$ καί τήν παραβολήν $y=x^2$.

3. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D x\,dx\,dy$, ὅπου τό χωρίον D φράσσεται ὑπό τῶν καμπύλων: $x=y^2$; $x=2y-y^2$, $x=2-y^2-2y$.

4. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D x\,dx\,dy$, ὅπου τό D φράσσεται ὑπό τῆς καμπύλης $x^3+x^2-y^2=0$ καί τῆς εὐθείας $x=1$.

5. Δείξατε ὅτι: $\int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right\}dx=\frac{1}{2}\neq\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right\}dy=\frac{-1}{2}$.

Δικαιολογίσατε διατί δέν δυνάμεθα εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν νά ἐναλλάξωμεν τά x καί y κατά τήν ὁλοκλήρωσιν.

6. Δείξατε ὅτι $\int_0^x\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\}dt=\int_0^x (x-u)\,F(u)\,du$.

7. Μέ τήν βοήθειαν τῶν πολικῶν συντεταγμένων νά ὑπολογισθοῦν τά ὁλοκληρώματα: α) $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$, β) $\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\,dx$

8. Διά τῆς εἰσαγωγῆς πολικῶν συντεταγμένων ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$, ὅπου D εἶναι τό τμῆμα τοῦ λημνίσκου $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$ μέ $x\geq 0$.

9. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, ὅπου $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 2x\}$.

10. Νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν τό περικλειόμενον ὑπό τῆς καμπύλης:

α) $\rho=a\eta\mu 2\theta$, β) $\rho^2=a^2\sigma\upsilon\nu 2\theta$ (Λημνίσκος).

11. Ὑπολογίσατε τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου τό ὁποῖον εὑρίσκεται ἐσωτερικῶς τοῦ κύκλου $\rho=4\eta\mu\theta$ καί ἐξωτερικῶς τοῦ λημνίσκου $\rho^2=8\sigma\upsilon\nu 2\theta$.

12. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2-2az=0$ πού κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

13. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ τμήματος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $y^2+z^2=a^2$ πού ἀποκόπτει ἀπ' αὐτήν ὁ κύλινδρος $x^2+y^2=a^2$.

14. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ τμήματος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2=a^2$ τό περιεχόμενον μεταξύ τῶν ἐπιπέδων $z=mx$ καί $z=0$

15. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς $z=x^2+y^2$ κείμενον ἄνωθεν τοῦ ἐπιπέδου oxy καί τεμνόμενον ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $z=2$.

16. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ τμήματος τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας : $z^2=\frac{x^2+y^2}{3}$, τό ὁποῖον κεῖται ἄνωθεν τοῦ ἐπιπέδου xoy καί εὑρίσκεται ἐντός τοῦ κυλίνδρου $y=\frac{x^2+y^2}{4}$.

17. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ, τό ὁποῖον περιορίζεται ἀπό τήν σφαῖραν : $x^2+y^2+z^2=a^2$ καί τόν κύλινδρον : $x^2+y^2=ax$.

18. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος V τόν ὁποῖον περικλείει τό ἐλλειψοειδές: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$.

19. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τετραέδρου τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $\frac{x}{a}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ καί τῶν τριῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.

20. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ πού περικλείεται ἀπό τάς δύο κυλινδρικάς ἐπιφανείας $x^2+y^2=a^2$ καί $x^2+z^2=a^2$.

21. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ πού περικλείεται ἀπό τό ἐπίπεδον $z=-1$ καί ἀπό τάς δύο κυλινδρικάς ἐπιφανείας $y-z=x^2-2$, $y+z=-x^2+6$.

22. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τό ὁποῖον ὁρίζεται ἀπό τάς ἐπιφανείας:

$$x^2+y^2=a^2,\quad z\{\sigma(x)+\sigma(y)\}=\beta\cdot\sigma(x)+\gamma\cdot\sigma(y),$$

ἔνθα: $a,\beta,\gamma>0$ καί $\sigma(x)>0$, εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς συναρτήσεως σ.

23. Νά εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κ.β. τοῦ ὁμογενοῦς ἡμικυκλίου μέ ἐξίσωσιν: $x^2+y^2=a^2$ καί $y\geq 0$.

24. Νά εὑρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ κ.β. τοῦ ὁμογενοῦς χωρίου τό ὁποῖον εὑρίσκεται ἐξωτερικῶς τοῦ κύκλου $\rho=1$ καί ἐσωτερικῶς τῆς καρδιοειδοῦς $\rho=1+\sigma\upsilon\nu\theta$.

25. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς ὁμογενοῦς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α) Ὡς πρός τόν ἄξονα οy, β) Ὡς πρός τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

26. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ ὁμογενοῦς ἐπιπέδου σχήματος τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῆς παραβολῆς $y^2=ax$ καί τῆς εὐθείας $x=a$ ὡς πρός τήν εὐθείαν $y=-a$.

27. Νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν τό ὁποῖον περικλείει ἡ ἔλλειψις $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

(Ὑπόδ: Ἐκτελέσατε τόν μετασχηματισμόν $x=a\cdot\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\beta\cdot\rho\eta\mu\theta$).

28. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D (x+y+y^2)\,dx\,dy$, ὅπου D εἶναι τό σύνολον τῶν σημείων (x,y) μέ $x^2+2y^2-2x-8y+5\leq 0$.

29. Ἔστω ὅτι D εἶναι τό χωρίον πού φράσσεται ὑπό τῶν $x+y=1, x=0, y=0$: Δείξατε ὅτι:

$$\iint_D \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\,dy=\frac{\eta\mu 1}{2}$$ (Ὑπόδ. Θέσατε $x-y=u,\ x+y=v$)

30. Δείξατε ὅτι διά τοῦ μετασχηματισμοῦ $x=\frac{v}{1+u},\ y=\frac{u\cdot v}{1+u}$ τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int_0^a\left\{\int_0^x f(x,y)\,dy\right\}dx=\int_0^1\int_0^{a(1+u)} f\left[\frac{v}{1+u},\frac{uv}{1+u}\right]\frac{v}{(1+u)^2}\,du\,dv.$$

31. Νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν τοῦ ἐπιπέδου χωρίου πού περικλείεται ὑπό τῶν καμπύλων: $xy=4$, $xy=8$, $xy^3=5$, $xy^3=15$.
('Υπόδ: θέσατε $xy=u$, $xy^3=v$).

32. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D xy\,dx\,dy$, ὅπου ὁ τόπος D ὁρίζεται ὑπό τῶν καμπύλων:

$$y^2=x,\ y^2=2x,\ x^2=y,\ x^2=2y$$

('Υπόδ: χρησιμοποιήσατε τόν μετασχηματισμόν $u=\frac{y^2}{x}$, $v=\frac{x^2}{y} \Longrightarrow u\cdot v=xy$ κ.τ.λ).

33. Νά ὑπολογισθῆ τό $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ὅπου τό χωρίον D εἶναι τό τετράγωνον: $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$.

34. Δείξατε ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\varphi(\lambda)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\frac{\eta\mu\beta x}{x}$ συγκλίνει ὁμαλῶς διά κάθε $0\leq\lambda<+\infty$ καί σταθερόν $\beta\neq 0$. Ἐν συνεχεία δείξατε ὅτι:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\eta\mu\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{ἐάν } \beta>0\\ 0 & \text{"} \quad \beta=0\\ \frac{-\pi}{2} & \text{"} \quad \beta<0\end{cases}.$$

35. Δείξατε ὅτι: $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\ \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\,dx=\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda}{2}\log(\lambda^2+1),\ \lambda>0$

36. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα: $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy$, ὅπου $D=\{(x,y): x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$.

37. Δείξατε ὅτι: $\frac{d}{d\lambda}\int_{\eta\mu\lambda}^{\sigma\upsilon\nu\lambda}\log(x+\lambda)\,dx=\log\frac{\sigma\upsilon\nu\lambda+\lambda}{\eta\mu\lambda+\lambda}-\left[\eta\mu\lambda\log(\sigma\upsilon\nu\lambda+\lambda)+\sigma\upsilon\nu\lambda\log(\eta\mu\lambda+\lambda)\right]$.

(38.) Ἔστω ὅτι ἡ $f(t)$ εἶναι συνεχής διά $0\leq t\leq 2\pi$ καί ἔστω

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\sigma\upsilon\nu(\theta-t)}\,dt \quad (1)$$

διά $r<1$, τά r καί θ εἶναι πολικαί συντεταγμέναι. Δείξατε ὅτι διά $r<1$ εἶναι $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$ δηλ. ἡ $u(r,\theta)$ εἶναι ἁρμονική συνάρτησις. Ὁ (1) καλεῖται τύπος τοῦ Poisson.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΤΡΙΠΛΑ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

§1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΡΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

I. Εἰσαγωγικαί γνώσεις: Οἱ ὁρισμοί ὅπου ἐδώσαμεν διά τόν χῶρον $\mathbb{R}^2$ τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων, τῆς ε-περιοχῆς, τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου ἑνός συνόλου, τοῦ συνόρου, τῆς διαμέτρου ἑνός συνόλου καθώς καί τῆς ἀποστάσεως δύο συνόλων μεταφέρονται ἄνευ δυσκολίας καί διά τά σύνολα τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$.

Ὁμοίως τό θεώρημα τῆς διαχωρισιμότητος καθώς καί τό θεώρημα τῶν Heine-Borel-Lebesgue ἰσχύουν καί διά τά κλειστά καί φραγμένα σύνολα τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$. Τέλος τό θεώρημα τῆς ὁμαλῆς συνεχείας παραμένει καί αὐτό ἰσχύον.

II. Γενικά περί ὄγκων τῶν χωρίων τοῦ $\mathbb{R}^3$. Ὅταν ὁρίσαμεν τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἐστηρίχθημεν εἰς τήν ἔννοιαν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπιπέδου σχήματος. Κατ'ἀναλογίαν ὁ ὁρισμός τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος στηρίζεται εἰς τήν ἔννοιαν τοῦ ὄγκου ἑνός στερεοῦ σώματος. Τήν ἔννοιαν τοῦ ὄγκου ἑνός πολυεδρικοῦ στερεοῦ τήν θεωροῦμεν γνωστήν ἀπό τήν στοιχειώδη Γεωμετρίαν.

Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα αὐθαίρετον χωρίον Φ τοῦ $\mathbb{R}^3$ καί πάντα τά πολυεδρικά σχήματα P τά ὁποῖα περιέχονται εἰς αὐτό. Οἱ ὄγκοι αὐτῶν τῶν πολυεδρικῶν στερεῶν προφανῶς φράσσονται ἐκ τῶν ἄνω ὑπό τοῦ ὄγκου ἑνός πολυεδρικοῦ στερεοῦ τό ὁποῖον περιέχει τό χωρίον Φ. Ὁμοίως ἐάν θεωρήσωμεν πάντα τά πολυεδρικά σχήματα Q τά ὁποῖα περιέχουν τό Φ οἱ ὄγκοι τούτων φράσσονται ἐκ τῶν κάτω ὑπό τοῦ ὄγκου ἑνός πολυεδρικοῦ στερεοῦ τό ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντός τοῦ Φ. Ὅθεν, οἱ ὄγκοι τῶν P ἔχουν ἕν ἀνώτερον πέρας καί οἱ ὄγκοι τῶν Q ἔχουν ἕνα κατώτερον πέρας. Οὕτω δυνάμεθα νά ἔχωμεν τούς ἀριθμούς:

$$V_* = V_*(\Phi) = \sup_{P\subset\Phi} (\text{ὄγκ.}P) \qquad (1\alpha)$$

$$V^* = V^*(\Phi) = \inf_{Q\supset\Phi} (\text{ὄγκ.}Q) \qquad (1\beta)$$

Προφανῶς $V_* \leq V^*$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $V_* = V^* = V$ τότε τὴν κοινὴν τιμὴν καλοῦμεν ***ὄγκον*** τοῦ χωρίου Φ, τὸ δὲ χωρίον Φ καλεῖται ***κυβίσιμον***.

Σχετικῶς ἰσχύει ἡ κάτωθι:

Πρότασις VIII-1-1. Ἕνα χωρίον Φ τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$ εἶναι κυβίσιμον ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχουν δύο πολυεδρικὰ στερεὰ $P \subset \Phi$ καὶ $Q \supset \Phi$ τοιαῦτα ὥστε: ὄγκ.Q − ὄγκ.P < ε.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἕνα σύνολον ἔχει ὄγκον μηδὲν ἐὰν αὐτὸ δύναται νὰ ἐγκλεισθῇ εἰς ἕνα πολυεδρικὸν στερεὸν αὐθαιρέτως μικροῦ ὄγκου.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἵνα ἕνα στερεὸν ἔχει ὄγκον πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σύνορόν του νὰ ἔχῃ μηδενικὸν ὄγκον.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἐὰν Φ_1, Φ_2 εἶναι δύο στερεὰ σχήματα ἔχοντα ὄγκους καὶ ἡ ἕνωσις αὐτῶν Φ ἔχει ὄγκον. Ἐὰν δὲ τὰ σχήματα δὲν ἔχουν κοινὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα, ὁ ὄγκος τοῦ Φ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν Φ_1 καὶ Φ_2.

Ὁμοίως, ἡ τομὴ δύο σχημάτων ἐχόντων ὄγκον εἶναι ἕνα σχῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον.

Παρατήρησις: Ὡς γνωστὸν ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ στερεὸν Φ τὸ ὁποῖον φράσσεται ὑπὸ μιᾶς καμπυλογράμμου κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, κάτω δὲ ὑπὸ ἑνὸς τετραγωνισίμου ἐπιπέδου χωρίου D τοῦ ἐπιπέδου oxy καὶ ἄνω ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας ἐχούσης ἐξίσωσιν τὴν $z = f(x,y)$, τότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \quad (x,y) \in D \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου ὁ ὄγκος τοῦ προαναφερθέντος στερεοῦ παρέχεται, ἐξ ὁρισμοῦ, ὑπὸ τῶν τύπων (1α) ἢ (1β).

Ἀποδεικνύεται ὅτι, διὰ μίαν εὐρεῖαν κλάσιν στερεῶν σχημάτων ὅπως διὰ σχήματα τὰ ὁποῖα φράσσονται ὑπὸ τμηματικῶς λείων[1] ἐπιφανειῶν, οἱ δύο τύ-

1) *Μία ἐπιφάνεια $z = f(x,y)$ θὰ καλῆται λεία ἐὰν ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι f_x, f_y εἶναι δὲ καὶ συνεχεῖς.*

ποι (1α) ἤ (1β) εἶναι ἰσοδύναμοι πρός τόν (2).

III. Ὁρισμός τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.

Ἔστω $f(x,y,z)$ μία φραγμένη συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕνα χωρίον V τό ὁποῖον ἔχει ὄγκον. Θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ τοῦ ἀνωτέρω χωρίου εἰς τά χωρία $V_1, V_2, \dots, V_n$ καί ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕκαστον τούτων ἔχει ὄγκον $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. Εἰς ἕκαστον τῶν χωρίων V_ρ, $1 \le \rho \le n$ λαμβάνομεν ἕν τυχόν σημεῖον $(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)$ καί ἀκολούθως σχηματίζομεν τό ἄθροισμα:

$$\tau_n = \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\,\Delta v_\rho \qquad (3)$$

Τό ἄθροισμα (3) καλεῖται *ἄθροισμα τοῦ Riemann* ὡς πρός τήν συνάρτησιν $f(x,y,z)$ καί τήν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ εἰς τό χωρίον V.

Ἐάν D παριστᾷ τήν μεγίστην τῶν διαμέτρων $\delta(V_\rho)$ τῶν χωρίων V_ρ τό D καλεῖται *λεπτότης τῆς διαμερίσεως*.

Ὁρισμός VIII-1-1. ***Ἕνας ἀριθμός T θά λέγωμεν ὅτι εἶναι τό ὅριον τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Riemann (3) καθώς τό $D \to 0$, ἐάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἕνας ἀριθμός $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ μέ $D < \delta(\varepsilon)$ καί διά κάθε ἐκλογή τῶν σημείων $(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho) \in V_\rho$ νά ἔχωμεν:***

$$\left| \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\,\Delta v_\rho - T \right| < \varepsilon .$$

Ἐάν ὑπάρχη ὁ ἀριθμός T οὗτος εἶναι τό ὅριον:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ D \to 0}} \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\,\Delta v_\rho$$

τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Riemann ***καί καλεῖται τριπλό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)$ ἐπί τοῦ χωρίου V καί συμβολίζεται οὕτω:***

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dv \quad \text{ἤ} \quad \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

ἤτοι ἐξ ὁρισμοῦ: $$\iiint_V f(x,y,z)\,dv \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n \to \infty \\ D \to 0}} \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\,\Delta v_\rho .$$

Ἐάν $f(x,y,z)=1$ διά κάθε $(x,y,z)\in V$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\iiint_V 1\cdot dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ D\to 0}} \sum_{\rho=1}^{n} \Delta V_\rho = \text{όγκ.}\, V$$

ὅθεν,

$$\boxed{\text{όγκ.}\, V = \iiint_V dxdydz} \qquad (4)$$

IV. Συνθῆκαι ὑπάρξεως τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.

Ἔστω $f(x,y,z)$ μία φραγμένη συνάρτησις ὡρισμένη ἐπί τοῦ κυβισίμου χωρίου V καί ἔστω Φ μία διαμέρισις αὐτοῦ. Ἄς συμβολίσωμεν διά τοῦ M_ρ καί m_ρ τό ἀνώτερον καί κατώτερον πέρας τῆς $f(x,y,z)$ ἐπί τῶν κυβισίμων χωρίων V_ρ πού προκύπτουν ἐκ τοῦ V διά τῆς διαμερίσεως Φ.

Διά τήν συνάρτησιν $f(x,y,z)$ σχηματίζομεν τά ἀθροίσματα:

$$T^*(\Phi) = \sum_{\rho=1}^{n} M_\rho \cdot \Delta\upsilon_\rho \qquad (5_\alpha)$$

$$T_*(\Phi) = \sum_{\rho=1}^{n} m_\rho\, \Delta\upsilon_\rho \qquad (5_\beta)$$

ὅπου $\Delta\upsilon_\rho$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου V_ρ.

Τά ἀθροίσματα (5_α) καί (5_β) καλοῦνται *ἄνω* καί *κάτω ἄθροισμα* τοῦ Darboux τῆς $f(x,y,z)$ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τήν διαμέρισιν Φ.

Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Darboux αἱ ἐξετασθεῖσαι εἰς τό Κεφάλαιον VII §3 μεταφέρονται καί ἐδῶ.

Ἡ κάτωθι ἱκανή καί ἀναγκαία ~~ἱκανή~~ συνθήκη διά τήν ὕπαρξιν ἑνός τριπλοῦ ὁλοκληρώματος ἀποδεικνύεται ἀκολουθοῦντες μίαν ἀνάλογον πορείαν μέ αὐτήν τοῦ θεωρήματος VII-3-1.

Θεώρημα VIII-1-1. Μία φραγμένη συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὡρισμένη ἐπί ἑνός κυβισίμου χωρίου V εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ V ἐάν, καί μόνον ἐάν, διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχῃ μία διαμέρισις Φ τοῦ V τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$T^*(\Phi) - T_*(\Phi) < \varepsilon.$$

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ κριτηρίου ἕπονται τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα VIII - 1-2. Κάθε συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ ἑνὸς κλειστοῦ καὶ φραγμένου χωρίου V εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπ' αὐτοῦ τοῦ χωρίου.

Θεώρημα VIII - 1-3. Ἐὰν μία συνάρτησις $f(x,y,z)$ εἶναι φραγμένη ἐπὶ ἑνὸς κλειστοῦ καὶ φραγμένου χωρίου V καὶ εἶναι συνεχὴς παντοῦ ἐπ' αὐτοῦ, δυνατὸν ἐκτὸς τῶν σημείων ἑνὸς συνόλου ἔχοντος μηδενικὸν ὄγκον, τότε ἡ $f(x,y,z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ V.

V. Ἰδιότητες τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.

Αἱ βασικαὶ ἰδιότητες τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι πλήρως ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἰδιότητας τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.

1ον/ Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1(x,y,z)$ καὶ $f_2(x,y,z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπὶ τοῦ χωρίου V, τότε καὶ ἡ συνάρτησις $c_1 f_1(x,y,z) + c_2 f_2(x,y,z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ V καὶ ἰσχύει:

$$\iiint_V [c_1 f_1 + c_2 f_2]\, dv = c_1 \iiint_V f_1\, dv + c_2 \iiint_V f_2\, dv.$$

2α/ Ἐὰν διὰ τὴν ὁλοκληρώσιμον συνάρτησιν $f(x,y,z)$ ἐπὶ τοῦ V ἰσχύῃ $f(x,y,z) \geq 0$, τότε θὰ εἶναι καί:

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dv \geq 0$$

2β/ Ἐὰν αἱ $f_1(x,y,z)$ καὶ $f_2(x,y,z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπὶ τοῦ V καὶ εἶναι $f_1(x,y,z) \leq f_2(x,y,z)$, τότε θὰ εἶναι:

$$\iiint_V f_1(x,y,z)\, dv \leq \iiint_V f_2(x,y,z)\, dv.$$

3ον/ Εἶναι: $\left| \iiint_V f(x,y,z)\, dv \right| \leq \iiint_V \left| f(x,y,z) \right| dv.$

4ον/ Ἐὰν εἶναι $\iiint_V f(x,y,z)\, dv = 0$ καὶ ἡ $f(x,y,z)$ εἶναι μὴ ἀρνητική, τότε θὰ εἶναι $f(x,y,z) = 0$ διὰ κάθε $(x,y,z) \in V$, ἐκτὸς ἑνὸς συνόλου μηδενικοῦ ὄγκου.

5ª/ Ἔστω V' εἶναι ἕν ἐσωτερικόν χωρίον τοῦ V. Ἐάν ἡ $f(x,y,z)$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ V καί ἐάν εἶναι $\iiint_{V'} f(x,y,z)\,dv=0$ διά κάθε χωρίον V', τότε ἡ $f(x,y,z)$ εἶναι μηδέν εἰς κάθε σημεῖον τοῦ V.

6ª/ Ἐάν V_1 καί V_2 εἶναι δύο χωρία τοιαῦτα ὥστε $V_1 \cap V_2 = \tilde{V}$ ὅπου τό $\tilde{V}$ ἔχει μηδενικόν ὄγκον καί ἔστω $V = V_1 \cup V_2$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dv = \iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dv + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dv.$$

7ª/ Ἐάν ἡ $f(x,y,z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ V καί ἔστω Ω ὁ ὄγκος αὐτοῦ καί M, m τό ἀνώτερον καί κατώτερον πέρας τῆς $f(x,y,z)$ ἐπί τοῦ V, τότε θά εἶναι

$$m \cdot \Omega \leq \iiint_V f(x,y,z)\,dv \leq M \cdot \Omega$$

8ª/ (Θεώρημα μέσης Τιμῆς) Ἔστω ἡ συνεχής συνάρτησις $f(x,y,z)$ ἐπί τοῦ κλειστοῦ καί φραγμένου χωρίου V τό ὁποῖον ὑποθέτομεν συνεκτικόν· τότε ὑπάρχει ἕν τουλάχιστον σημεῖον $(\xi, \eta, \zeta) \in V$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dv = \Omega \cdot f(\xi,\eta,\zeta)$$

ὅπου Ω ὁ ὄγκος τοῦ V.

§ 2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΡΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ὅπως εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος οὕτω καί ἐδῶ ἡ τεχνική ὑπολογισμοῦ ἑνός τριπλοῦ ὁλοκληρώματος ἀνάγεται εἰς διαδοχικάς ὁλοκληρώσεις μιᾶς μεταβλητῆς δηλ. ἡ ὁλοκλήρωσις εἰς ἕνα χωρίον V τοῦ $\mathbb{R}^3$ γίνεται διά διαδοχικῶν χωριστῶν ὁλοκληρώσεων ὡς πρός ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν μέ ὅρια ὁλοκληρώσεως ἐξαρτώμενα ἐκ τῶν ὑπολοίπων μεταβλητῶν. Πρός τούτοις διακρίνομεν τάς κάτωθι περιπτώσεις.

I. <u>Τό χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον</u>

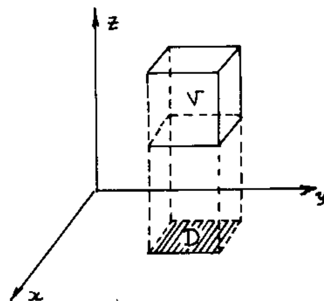
Θεωροῦμεν τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

ὅπου τό χωρίον V εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ὁριζόμενον ὑπό τῶν ἀνισοτήτων:

$$a \le x \le \beta,\ \gamma \le y \le \delta,\ \kappa \le z \le \lambda \ (\beta\lambda.\ \Sigma\chi.1).$$

ἡ δέ προβολή αὐτοῦ εἰς τό ἐπίπεδον oxy ἔστω ὅτι εἶναι τό ὀρθογώνιον D ὁριζόμενον ὑπό τῶν ἀνισοτήτων $a \le x \le \beta,\ \gamma \le y \le \delta$.



Σχ.1

Σχετικῶς ἰσχύει τό κάτωθι θεώρημα:

<u>Θεώρημα VIII-2-1.</u> <u>Ἐάν διά τήν συνάρτησιν $f(x,y,z)$ ὡρισμένην εἰς τό ὡς ἄνω χωρίον V τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα</u> $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ <u>ὑπάρχη καί ἐάν τό ὁλοκλήρωμα</u> $I(x,y)=\int_\kappa^\lambda f(x,y,z)\,dz$ <u>ὑπάρχη διά κάθε</u> $(x,y)\in D$, <u>τότε τό ὁλοκλήρωμα</u> $\iint_D dxdy\int_\kappa^\lambda f(x,y,z)\,dz$ <u>ὑπάρχει καί ἐπί πλέον ἰσχύει</u>:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy\int_\kappa^\lambda f(x,y,z)\,dz \qquad (1)$$

Ἡ ἀπόδειξις αὐτοῦ εἶναι ἀνάλογος μέ αὐτήν τοῦ Θεωρήματος VII-7-1 τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει τό ὁλοκλήρωμα $J(x)=\int_\gamma^\delta I(x,y)\,dy$ διά κάθε ὡρισμένον x τοῦ $a\le x\le\beta$, τότε ἐκ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D I(x,y)\,dxdy = \int_a^\beta dx\int_\gamma^\delta I(x,y)\,dy = \int_a^\beta dx\int_\gamma^\delta dy\int_\kappa^\lambda f(x,y,z)\,dz.$$

Ὅθεν,

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dv = \int_a^\beta dx\int_\gamma^\delta dy\int_\kappa^\lambda f(x,y,z)\,dz} \qquad (2)$$

Κάμνοντες ἀναλόγους ὑποθέσεις ἔχομεν:

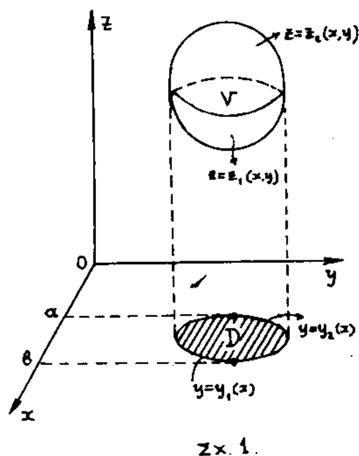
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dv = \int_\kappa^\lambda dz \int_\gamma^\delta dy \int_a^\beta f(x,y,z)\,dx \qquad (2_2)$$

ἤ

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dv = \int_a^\beta dx \int_\kappa^\lambda dz \int_\gamma^\delta f(x,y,z)\,dy \qquad (2_3)$$

II. Τό χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι καμπυλόγραμμον.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό χωρίον V τῆς ὁλοκληρώσεως φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν: $z=z_1(x,y)$ καί $z=z_2(x,y)$ καί ἔστω D ἡ προβολή τούτου εἰς τό ἐπίπεδον oxy (βλ. Σχ. 1). Σχετικῶς ἰσχύει τό ἀκόλουθον:



Σχ. 1.

Θεώρημα VIII-2-2. Ἐάν τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$ ὑπάρχη καί τό ὁλοκλήρωμα $I(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ ὑπάρχη διά κάθε σημεῖον $(x,y)\in D$, τότε καί τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ ὑπάρχει καί ἰσχύει:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dv = \iint_D dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

• Ἡ ἔκφρασις $I(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ εἶναι μία συνάρτησις δύο μεταβλητῶν. Ἐάν διά τήν συνάρτησιν $I(x,y)$ καί διά τό χωρίον D πληροῦνται αἱ συνθῆκαι τοῦ Θεωρήματος VII-7-2, τότε τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_D I(x,y)\,dxdy$$

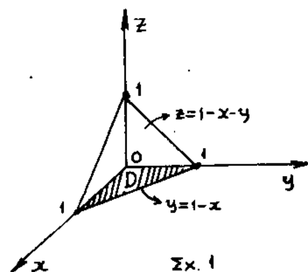
δύναται νά ὑπολογισθῆ διά διαδοχικῶν ὁλοκληρώσεων ἐκτελοῦντες π.χ. πρῶτα τήν ὁλοκλήρωσιν ὡς πρός y καί ἐν συνεχεία ὁλοκληροῦντες τό ἀποτέ-

λεσμα αὐτό ὡς πρός x. Οὕτω ἐάν τό χωρίον D ἔχη ἕνα σύνορον περικλειόμενον ὑπό τῶν καμπύλων $y=y_1(x)$ καί $y=y_2(x)$ μέ $y_1(x)\leq y_2(x)$ (βλ. Σχ.1) τότε ὁ τύπος τοῦ θεωρήματος γράφεται:

$$\iiint_V f(x,y,z)dv=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz \qquad (3)$$

Ὁ τελευταῖος τύπος ἀνάγει ἕνα τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα εἰς τρία διαδοχικά ἁπλά ὁλοκληρώματα μέ μεταβλητά ὅρια ὁλοκληρώσεως.

Ἐφαρμογή 1η/. Νά ὑπολογισθῆ τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iiint_V xyz\,dxdydz$ ἐπί τοῦ τοῦ χωρίου V, τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τῶν ἐπιπέδων $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.



Σχ. 1

Λύσις: Αὐτό τό χωρίον εἶναι κανονικόν καί περιορίζεται ἄνω ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $z=1-y-x$ καί κάτω ὑπό τοῦ $z=0$. Ἡ δέ προβολή αὐτοῦ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου oxy εἶναι τό χωρίον D, τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τῶν ἐξισώσεων $x=0$, $y=0$, $y=1-x$, (βλ. Σχ. 1).

Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\iiint_V xyz\,dxdydz=\iint_D dxdy\int_0^{1-x-y}xyz\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xyz\,dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{xyz^2}{2}\right]_0^{1-x-y}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xy(1-x-y)^2dy$$

$$=\frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4dx=\frac{1}{720}.$$

2η/. Νά ὑπολογισθῆ τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iiint_V z\,dxdydz$, ὅπου τό χωρίον V εἶναι τό ὄγδοον τῆς σφαίρας τό ὁριζόμενον ὑπό τῶν σχέσεων $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ καί $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

Λύσις: Συμφώνως πρός τόν τύπον (3) θά ἔχωμεν:

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz$$ καί διαδοχικῶς λαμβάνομεν:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\,(R^2-x^2-y^2)$$

καί $\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2-y^2)\,dy = \left[\frac{1}{2}\,(R^2-x^2)\,y - \frac{1}{6}\,y^3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{1}{3}\,(R^2-x^2)^{3/2}$.

Οὕτω παραμένει νά ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκλήρωμα $\frac{1}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^{3/2}\,dx$. Τοῦτο δέ διά τῆς ἀντικαταστάσεως $x = R$ συνφ γίνεται ἴσον πρός τό ὁλοκλήρωμα

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4\,\text{ημ}^4\varphi\,d\varphi = \frac{\pi R^4}{16}$$

Ὅθεν, τό δοθέν ὁλοκλήρωμα ἰσοῦται πρός $\frac{\pi R^4}{16}$.

§3. ΑΛΛΑΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΕΙΣ ΕΝΑ ΤΡΙΠΛΟΥΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ὅπως εἰς τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα οὕτω καί εἰς τό τριπλοῦν πολλάς φοράς εἶναι ἀναγκαῖον πρός διευκόλυνσιν τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτοῦ νά κάμνωμεν ἀλλαγήν τῶν μεταβλητῶν αὐτοῦ. Δέν θά ἐπιμείνωμεν εἰς τήν πλήρη ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας, καθ' ὅτι αὕτη εὑρίσκεται ἐν ἀναλογίᾳ πρός τήν ἀναπτυχθεῖσαν θεωρίαν εἰς τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα, ἀλλά θά ἀναφέρωμεν ἐν συντομίᾳ τινά περί τῶν συντεταγμένων ἐπιφανειῶν καί ἀκολούθως ἕνα βασικόν θεώρημα μετασχηματισμοῦ ἑνός τριπλοῦ ὁλοκληρώματος εἰς ἕν ἄλλο τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα.

Καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι: Θεωροῦμεν τά τρισορθογώνια συστήματα τῶν ἀξόνων $oxyz$ καί $ouvw$ καί ἔστωσαν τά χωρία V καί V^* ἀντιστοίχως ἐπ' αὐτῶν. Ἄς ὑποθέσωμεν μεταξύ τῶν σημείων τῶν δύο ἀνωτέρω χωρίων ὑφίσταται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἐκφραζομένη ὑπό τῶν σχέσεων:

$$x = \varphi(u,v,w),\ y = f(u,v,w),\ z = \sigma(u,v,w) \qquad (1) \quad (u,v,w) \in V^*$$

ἤ ὑπό τῶν ἀντιστρόφων τῶν συναρτήσεων (1), ἤτοι:

$$u = \tilde{\varphi}(x,y,z),\ v = \tilde{f}(x,y,z),\ w = \tilde{\sigma}(x,y,z) \qquad (2) \quad (x,y,z) \in V.$$

Δεχόμεθα ὅτι αἱ φ, f, σ ἔχουν μερικάς παραγώγους ὡς πρός

u, v, w α'ς τάξεως συνεχεῖς μέ Ἰακωβιανήν $\frac{D(\varphi,f,\sigma)}{D(u,v,w)} \neq 0$.
Προφανῶς ἔχομεν:

$$\frac{D(\varphi,f,\sigma)}{D(u,v,w)} \cdot \frac{D(\tilde{\varphi},\tilde{f},\tilde{\sigma})}{D(x,y,z)} = 1$$

Ἡ ἀπεικόνισις (1) μετασχηματίζει τό χωρίον V^* εἰς τό χωρίον V, συνεπῶς ἕνα σημεῖον $(u,v,w)\in V^*$ προσδιορίζει πλήρως τό ἀντίστοιχον σημεῖον $(x,y,z)\in V$. Μέ ἄλλους λόγους αἱ ποσότητες (u,v,w) δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς αἱ συντεταγμέναι (διάφοροι τῶν Καρτεσιανῶν τοιούτων) τῶν σημείων τοῦ χωρίου V, δι' ὅ καί καλοῦνται *καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι*.

Ἐάν π.χ. δώσωμεν εἰς τό u μίαν σταθεράν τιμήν u_0 δηλ. μέ ἄλλους λόγους θεωρήσωμεν εἰς τό σύστημα $Ouvw$ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρός τό Ovw, τότε αἱ ὑπό τῶν τύπων (1) καθορίζεται μέ αὐτό τό u_0 μία ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις εἶναι:

$$x=\varphi(u_0,v,w),\ y=f(u_0,v,w),\ z=\sigma(u_0,v,w) \qquad (3)$$

Δίδοντες εἰς τό u_0 πάσας τάς δυνατάς τιμάς δημιουργοῦμεν οὕτω μίαν μονοπαραμετρικήν οἰκογένειαν ἐπιφανειῶν. Κατ' ἀναλογίαν μέ v=σταθ. ἤ w=σταθ. δημιουργοῦμεν δύο οἰκογενείας ἐπιφανειῶν κειμένων εἰς τό χωρίον V. Αἱ τρεῖς ἀνωτέρω οἰκογένειαι σχηματίζουν τό σύνολον τό καλούμενον ***συντεταγμέναι ἐπιφάνειαι***. Οὕτω, κάθε σημεῖον τοῦ V θεωρεῖται ὡς ἡ τομή τριῶν ἐπιφανειῶν ἐκ τῆς οἰκογενείας τῶν συντεταγμένων ἐπιφανειῶν.

Κατωτέρω ἀναφέρομεν τό κάτωθι βασικόν:

Θεώρημα VIII-3-1. Ἔστω τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iiint_V F(x,y,z)\,dxdydz$ ἐπεκτεινόμενον ἐπί τοῦ χωρίου V, τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό μιᾶς τμηματικῶς λείας ἐπιφανείας. Ἔστω ὁ ἀμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός $x=\varphi(u,v,w)$, $y=f(u,v,w)$, $z=\sigma(u,v,w)$ ὅπου $(u,v,w)\in V^*$ καί ὅτι αἱ συναρτήσεις φ, f, σ ἔχουν μερικάς παραγώγους ὡς πρός u, v, w α'ς τάξεως συνεχεῖς μέ Ἰακωβιανήν $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0$, τότε ἰσχύει:

$$\iiint_V F(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V^*} F(\varphi(u,v,w), f(u,v,w), \sigma(u,v,w)) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\cdot dv\cdot dw$$

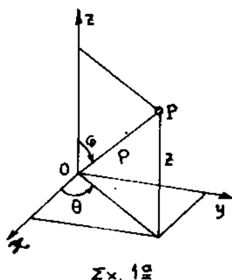
I. Περίπτωσις σφαιρικῶν συντεταγμένων

Ὁ τύπος τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν σφαιρικῶν συντεταγμένων (βλ. Σχ. 1) ἤτοι: $x=\rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi$, $y=\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi$, $z=\rho\,\text{συν}\varphi$ ὅπου $\rho>0$, $0\leq\theta<2\pi$, $0\leq\varphi<\pi$ γίνεται:

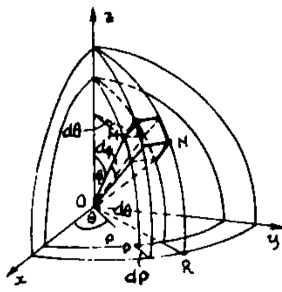
$$\iiint\limits_{V} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V^*} F(\rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ \rho\,\text{συν}\varphi)\cdot\rho^2\,\text{ημ}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \qquad (1)$$

διότι,
$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi & \rho\,\text{συν}\theta\,\text{συν}\varphi & -\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi\\ \text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi & \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\varphi & \rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi\\ \text{συν}\varphi & -\rho\,\text{ημ}\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\,\text{ημ}\varphi.$$

Θεωροῦμεν ἕνα στοιχειῶδες χωρίον ὄγκου $d\upsilon$ περιεχόμενον μεταξύ τριῶν ζευγῶν συντεταγμένων ἐπιφανειῶν ἀπείρως πλησίον ἡ μία τῆς ἄλλης ἤτοι: τό χωρίον νά φράσσεται ὑπό τῶν δύο σφαιρῶν μέ ἀκτῖνας ρ, $\rho+d\rho$ τῶν δύο κωνικῶν ἐπιφανειῶν σχηματιζόντων μέ τόν ἄξονα Oz γωνίαν φ καί $\varphi+d\varphi$ καί ὑπό τῶν δύο ἐπιπέδων σχηματιζόντων μετά τοῦ ἄξονος Ox γωνίαν θ καί $\theta+d\theta$. Προσεγγιστικῶς τό στοιχεῖον τοῦτο δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἕνα «ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον» τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη $d\rho$, $\rho d\varphi$, $\rho\,\text{ημ}\varphi\,d\theta$ (βλ. Σχ. 1). Ὅθεν ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι:
$d\upsilon=d\rho\cdot\rho d\varphi\cdot\rho\,\text{ημ}\varphi\,d\theta=\rho^2\,\text{ημ}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$



Σχ. 1α



Σχ. 1β

Ὡς ἐκ τούτου διά τόν ὑπολογισμόν, μέσω τῶν σφαιρικῶν συντεταγμένων, τοῦ ὄγκου ἑνός στερεοῦ περιοριζομένου ὑπό μιᾶς κλειστῆς ἐπιφανείας S, ἥτις τέμνεται εἰς δύο τό πολύ σημεῖα ὑπό πάσης εὐθείας διερχομένης διά τῆς ἀρχῆς

τῶν ἀξόνων καί ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $\rho=\sigma(\varphi,\theta)$, ἀρκεῖ νά λάβωμεν

$$dv = \rho^2 \eta\mu\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Ἐν συνεχείᾳ δἰ ὁλοκληρώσεως εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ προσδιορίζοντες καταλλήλως τά ὅρια ὁλοκληρώσεως τῶν θ, φ, ρ.

II. Περίπτωσις κυλινδρικῶν συντεταγμένων.

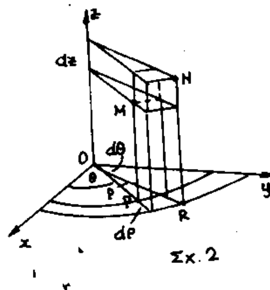
Ἐάν χρησιμοποιήσωμεν κυλινδρικάς συντεταγμένας ἤτοι:

$x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$, $z=z$, ὅπου $\rho>0$, $0\leq\theta<2\pi$, $z\in\mathbb{R}$ τότε θά εἶναι

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}=\rho$ καί ὁ τύπος τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος γίνεται:

$$\iiint\limits_{V} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V^*} F(\rho\sigma\upsilon\nu\theta, \rho\eta\mu\theta, z)\cdot\rho\, d\rho\, d\theta\, dz \qquad (2)$$

Ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν σφαιρικῶν συντεταγμένων θεωροῦμεν οὕτω καί ἐδῶ ἕνα στοιχειῶδες χωρίον ὄγκου dv περιεχόμενον μεταξύ τριῶν ζευγῶν συντεταγμένων ἐπιφανειῶν ἀπείρως πλησίον ἡ μία τῆς ἄλλης ἤτοι: Τό χωρίον νά φράσσεται ὑπό τῶν δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν μέ ἀκτῖνας ρ καί $\rho+d\rho$, τῶν δύο ὁριζοντίων ἐπιπέδων ἀντιστοιχούντων εἰς τάς τιμάς z καί $z+dz$ τῆς συντεταγμένης z καί ὑπό τῶν δύο ἡμιεπιπέδων διερχομένων διά τοῦ ἄξονος τῶν z καί σχηματιζόντων μετά τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν θ καί $\theta+d\theta$ (βλ. Σχ. 2). Οὕτω ἔχομεν δημιουργήσει ὡς στοιχειῶδες χωρίον ἕνα στοιχειῶδες «πρῖσμα» τοῦ ὁποίου τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εἶναι $\rho d\theta d\rho$ καί τό ὕψος του εἶναι dz. Συνεπῶς ὁ στοιχειώδης ὄγκος αὐτοῦ εἶναι: $dv=\rho\cdot d\theta\, d\rho\, dz$.



Σx. 2

Ἐφαρμογαί 1η/. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τοῦ φρασσομένου ἄνω ὑπό τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$ καί κάτω ὑπό τοῦ κώνου $z^2\eta\mu^2 a=(x^2+y^2)\sigma\upsilon\nu^2 a$, ὅπου a εἶναι μία σταθερά γωνία τοιαύτη ὥστε $0\leq a\leq\pi$.

Λύσις: ὁ ζητούμενος ὄγκος ὡς γνωστόν εἶναι:

$$\Omega = 4\iiint_V dx\,dy\,dz \qquad (1)$$

ὅπου τό χωρίον V εὑρίσκεται μεταξύ τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Ox, Oy, Oz.

Πρός ὑπολογισμόν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος χρησιμοποιοῦμεν σφαιρικάς συντεταγμένας, ἀρκεῖ πρός τούτοις νά προσδιορίσωμεν τά ὅρια μεταβολῆς τῶν ρ, θ, φ.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας εἶναι $\rho = R$ ἡ δέ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐάν ἀντικαταστήσωμεν $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi$, $y = \rho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi$, $z = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$, γίνεται μετά τάς πράξεις

$$\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi\eta\mu^2 a = \rho^2\eta\mu^2\varphi\sigma\upsilon\nu^2 a \quad \text{ἤ}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \pm\varepsilon\varphi a \quad \text{ἤ} \quad \varphi = a \quad \text{ἤ} \quad \varphi = \pi - a$$

Ἀρκεῖ νά θεωρήσωμεν τήν μίαν γωνίαν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τήν $\varphi = a$. Ἐκτελοῦντες λοιπόν τόν μετασχηματισμόν τό ὁλοκλήρωμα (1) γίνεται:

$$\Omega = 4\int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \int_{\varphi=0}^{a} \eta\mu\varphi\, d\varphi \int_{\rho=0}^{R} \rho^2 d\rho = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sigma\upsilon\nu a)\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}\,(1-\sigma\upsilon\nu a).$$

2ο/ Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τοῦ κειμένου ἄνω τοῦ ἐπιπέδου oxy καί φρασσομένου ὑπό τοῦ παραβολοειδοῦς $z = x^2 + y^2$ καί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $x^2 + y^2 = a^2$.

Λύσις: Ὡς γνωστόν ὁ ὄγκος τοῦ ἐν λόγῳ χωρίου θά εἶναι:

$$\Omega = \iiint_V dx\,dy\,dz \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) διά χρησιμοποιήσεως κυλινδρικῶν συντεταγμένων δηλ. $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \rho\eta\mu\theta$, $z = z$ γίνεται:

$$\Omega = \iiint_{V^*} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz \qquad (2)$$

Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό χωρίον V^* μεταβολῆς τῶν ρ, θ, z. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ παραβολοειδοῦς εἰς κυλινδρικάς συντεταγμένας εἶναι: $z = \rho^2$ καί τοῦ κυλίνδρου εἶναι $\rho = a$.

Ἐάν ἡ γωνία $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, τότε ὁ περικλειόμενος εἰς αὐτό τό διάστημα μεταβολῆς τῆς θ ὄγκος εἶναι τό ¼ τοῦ ζητουμένου. Θά ἔχωμεν λοιπόν λόγῳ τῆς (2).

$$\frac{1}{4}\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho d\rho \int_0^{\rho^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{a^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ὅθεν, $\Omega = \frac{\pi a^4}{2}$.

§4. ΤΟ ΤΡΙΠΛΟΥΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΩΣ ΜΙΑ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΟΛΟΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ

Κατ' ἀναλογίαν πρός τάς συνολοσυναρτήσεις τάς ὁρισθείσας διά τά ἐπίπεδα σχήματα δυνάμεθα νά εἰσαγάγωμεν τήν ἔννοιαν τῆς συνολοσυναρτήσεως ὡρισμένης εἰς τά ὑποσύνολα (ἐν γένει στερεά σώματα) τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$. Ἕνα χαρακτηριστικόν παράδειγμα μιᾶς τοιαύτης συνολοσυναρτήσεως ὡρισμένης διά κάθε στερεόν σῶμα εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ τοῦ σώματος. Ὁμοίως ἐάν θεωρήσωμεν ἕν ὑλικόν στερεόν τό ὁποῖον κατέχει ἕναν ὁρισμένον ὄγκον, εἰς αὐτό δυνάμεθα νά ἀντιστοιχίσωμεν τήν περιεχομένην μᾶζαν του καί οὕτω ἐπιτυγχάνομεν μίαν συνολοσυνάρτησιν ὡρισμένη εἰς τό πεδίον αὐτοῦ τοῦ χώρου.

Ὁ ὄγκος καί ἡ μᾶζα ἔχουν τήν ἰδιότητα τῆς προσθετικότητος, ἥτις διατυποῦται μέ τόν ἴδιον τρόπον ὅπως εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ἤτοι: Ἐάν $F(V)$ εἶναι μία συνολοσυνάρτησις αὕτη θά καλῆται προσθετική, ἐάν διά κάθε ζεῦγος χωρίων V_1 καί V_2 μή ἐχόντων κοινά ἐσωτερικά σημεῖα καί ἐπί τῶν ὁποίων ἡ $F(V)$ εἶναι ὡρισμένη, ἡ τιμή $F(V_1 \cup V_2)$ εἶναι ἐπίσης ὡρισμένη καί ἰσχύει :

$$F(V_1 \cup V_2) = F(V_1) + F(V_2).$$

Ἐάν ἡ $f(x,y,z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ χωρίου V, τότε τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς μία προσθετική συνολοσυνάρτησις $F(V)$ ὡρισμένη ἑκάστοτε ἐπί τοῦ χωρίου τῆς ὁλοκληρώσεως V τῆς $f(x,y,z)$.

Ἡ γνῶσις τῆς παραγώγου μιᾶς προσθετικῆς συνολοσυναρτήσεως ὡς πρός τόν ὄγκον εἰσάγεται κατ' ἀναλογίαν ὅπως εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ χώρου τῶν δύο διαστάσεων.

Ὁρισμός VIII-4-1. Ἕνας ἀριθμός ℓ θά λέγωμεν ὅτι εἶναι τό ὅριον τοῦ πηλίκου $\frac{F(V)}{v}$ (ὅπου v εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου V καί $F(V)$ μία προσθετική συνολοσυνάρτησις) καθώς τό χωρίον V τείνει πρός τό σημεῖον M_0, ἐάν διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχη $\delta>0$ τοιοῦτον ὥστε νά ἔχωμεν: $\left|\frac{F(V)}{v}-\ell\right|<\varepsilon$, διά κάθε χωρίον V ἐξ ὁλοκλήρου περιεχόμενον εἰς μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος δ καί κέντρου M_0.

Τό ἀνωτέρω ὅριον ἐξ ὁρισμοῦ καλεῖται ***παράγωγος τῆς συνολοσυναρτήσεως*** $F(V)$ ***ὡς πρός τόν ὄγκον*** v ***εἰς τό σημεῖον*** M_0 καί συμβολίζεται οὕτω:

$$\lim_{V\downarrow M_0}\frac{F(V)}{v} \quad \text{ἤ} \quad \left.\frac{dF(V)}{dv}\right|_{M_0}$$

Ἐάν $F(V)$ παριστᾶ τήν μᾶζαν τήν περιεχομένην εἰς τό χωρίον V, τότε ἡ παράγωγος τῆς $F(V)$ ὡς πρός τόν ὄγκον εἰς τό σημεῖον $M(x,y,z)$ καλεῖται ἐξ ὁρισμοῦ πυκνότης τῆς μάζης εἰς τό σημεῖον M καί συμβολίζεται μέ $\delta(x,y,z)$.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς προκύπτει ὅτι:

$$\frac{d}{dv}\iiint_V f(x,y,z)\,dv = f(x,y,z).$$

§ 5. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

I. Ὑπολογισμός τῆς μάζης στερεοῦ ἐκ τῆς πυκνότητος αὐτοῦ.

Ἐάν ἡ κατανομή τῆς πυκνότητος ἐπί τοῦ χωρίου V εἶναι $\delta(x,y,z)$ τότε ἡ μᾶζα αὐτοῦ παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$m=\iiint_V \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (1)$$

II. Ροπή ἀδρανείας. Κατ' ἀναλογίαν πρός τά ἐκτεθέντα διά τήν ροπήν ἀδρανείας ἐπιπέδου ὑλικῆς πλακός ὡς πρός τούς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, οὕτω καί εἰς τήν περίπτωσιν ἑνός ὑλικοῦ στερεοῦ V τοῦ ὁποίου ἡ κατανομή τῆς πυκνότητος εἶναι $\delta(x,y,z)$ ἡ ροπή ἀδρανείας αὐτοῦ ὡς πρός τούς ἄξονας ox, oy, oz θά παρέχεται ἀντιστοίχως ὑπό τῶν τύπων:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \iiint_V (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ I_y &= \iiint_V (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ I_z &= \iiint_V (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Καί ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρός τήν ἀρχήν O θά εἶναι:

$$I_o=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\delta\,(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

III. <u>Συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους.</u>

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους ὑλικοῦ στερεοῦ V μέ κατανομήν πυκνότητος $\delta\,(x,y,z)$ παρέχονται ὑπό τῶν τύπων:

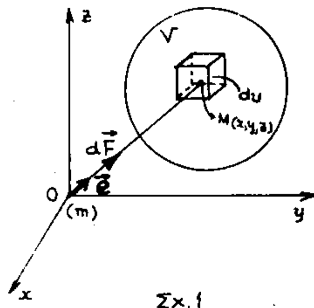
$$x_\kappa=\frac{\iiint_V x\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \delta\,(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},\quad y_\kappa=\frac{\iiint_V y\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \delta\,(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},\quad z_\kappa=\frac{\iiint_V z\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz} \qquad (3)$$

Ἐάν τό στερεόν εἶναι ὁμογενές, τότε ἔχομεν:

$$x_\kappa=\frac{\iiint_V x\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz},\quad y_\kappa=\frac{\iiint_V y\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz},\quad z_\kappa=\frac{\iiint_V z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz} \qquad (4)$$

IV. <u>Νευτώνειος ἕλξις</u>: Ἔστω ὑλικόν σημεῖον μάζης m, τό ὁποῖον λαμβάνεται εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἕνα στερεόν V μέ κατανομήν πυκνότητος μάζης $\delta\,(x,y,z)$ (βλ. Σχ.1). Τό στοιχειῶδες χωρίον ὄγκου $d\upsilon$ ἐκτεινόμενον πέριξ τοῦ σημείου $M\,(x,y,z)$ ἔχει μᾶζαν $\delta(x,y,z)d\upsilon$ καί ἀσκεῖ ἐπί τῆς ὑλικῆς μάζης m μίαν δύναμιν $d\vec{F}$ ἥτις παρέχεται ὑπό τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς Παγκοσμίου ἕλξεως ἤτοι:

$$d\vec{F}=k\,\frac{m\cdot\delta(x,y,z)\,d\upsilon}{r^2}\,\vec{e}\ \ (1),\quad \text{ὅπου } r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$



Σx.1

Ἔστωσαν dF_x, dF_y, dF_z τά μέτρα τῶν προβολῶν τῆς $d\vec{F}$ ἐπί τούς τρεῖς ἄξονας. Θά ἔχωμεν τότε:

$$dF_x = k \cdot \frac{m \cdot \delta(x,y,z)}{r^2} \cdot \frac{x}{r}\, dv = k \cdot \frac{m \cdot \delta(x,y,z)\, x\, dv}{r^3}$$

$$dF_y = \cdots\cdots = k \cdot \frac{m \cdot \delta(x,y,z)\, y\, dv}{r^3}$$

$$dF_z = \cdots\cdots = k \cdot \frac{m \cdot \delta(x,y,z)\, z\, dv}{r^3}$$

Ὅθεν τά μέτρα τῶν προβολῶν τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ πού ἀσκεῖται ὑφ' ὁλοκλήρου τοῦ στερεοῦ ἐπί τῆς μάζης m εἶναι:

$$F_x = km \iiint_V \frac{\delta(x,y,z)\, x\, dx\, dy\, dz}{r^3}, \quad F_y = km \iiint_V \frac{\delta(x,y,z)\, y\, dx\, dy\, dz}{r^3}, \quad F_z = km \iiint_V \frac{\delta(x,y,z)\, z\, dx\, dy\, dz}{r^3}$$

§6. ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

I. Ἕως τώρα ἐδώσαμεν τούς ὁρισμούς καί ἐξετάσαμεν τάς βασικάς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν, διπλῶν καί τριπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

Τήν ἀνωτέρω θεωρίαν δυνάμεθα νά τήν γενικεύσωμεν καί ὅταν ἔχωμεν μίαν συνάρτησιν $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n - μεταβλητῶν. Ὡς γνωστόν ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας τό ἐμβαδόν ἑνός παραλληλογράμμου ἤ ἑνός παραλληλεπιπέδου ἐκφράζεται ὑπό τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς ὁριζούσης τῆς ὁποίας τά στοιχεῖα εἶναι τά μέτρα τῶν προβολῶν τῶν διανυσμάτων εἰς τούς συντεταγμένους ἄξονας. Ἀναχωροῦντες ἐξ αὐτοῦ τοῦ ἀποτελέσματος ὁρίζομεν ὡς <u>ὄγκον ἑνός n-διαστάσεων παραλληλεπιπέδου</u> τήν ἀπόλυτον τιμήν τῆς ὁριζούσης μέ γραμμάς (ἤ στήλας) σχηματιζομένας ἀπό τάς συντεταγμένας τῶν διανυσμάτων, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τάς ἀκμάς τοῦ παραλληλεπιπέδου. Κατά συνέπειαν στηριζόμενοι εἰς αὐτόν τόν ὁρισμόν τοῦ ὄγκου δυνάμεθα εὐκόλως νά εἰσάγωμεν τήν ἔννοιαν τοῦ ὄγκου ἑνός πολυέδρου διά σχήματα τοῦ Εὐκλειδείου χώρου τῶν n-διαστάσεων καί κατ' ἀκολουθίαν νά ὁρίσωμεν τόν ὄγκον διά εὐρυτέρας κλάσεις σχημάτων κειμένων εἰς τόν Εὐκλείδειον χῶρον τῶν n-διαστάσεων.

II. Ἔστω ἤδη $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μία συνάρτησις n-ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ὡρισμένη καί φραγμένη εἰς ἕνα χωρίον G τοῦ Εὐκλειδείου χώρου τῶν n-διαστάσεων. Θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ ἐπί τοῦ G χωρίζοντες τοῦτο εἰς τά ὑποχωρία $G_1, G_2, \ldots, G_n$ καί τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι ἔστωσαν $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$. Ἔστω-

σαν ἐπί πλέον $\delta(G_1), \delta(G_2) \dots \delta(G_n)$ αἱ διάμετροι τούτων καί D ἡ μεγίστη ἐξ αὐτῶν.

Ἐφ' ἑκάστου χωρίου G_ρ, $1 \leq \rho \leq n$ λαμβάνομεν ἕνα τυχόν σημεῖον $M_\rho(\xi_1^{(\rho)}, \xi_2^{(\rho)}, \dots, \xi_n^{(\rho)})$ καί ἀκολούθως σχηματίζομεν τά ἀθροίσματα:

$$W_n = \sum_{\rho=1}^{n} f(\xi_1^{(\rho)}, \xi_2^{(\rho)}, \dots, \xi_n^{(\rho)}) \Delta\upsilon_\rho \qquad (1)$$

Ἐάν ὑπάρχη τό $\lim\limits_{\substack{D \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{\rho=1}^{n} f(\xi_1^{(\rho)}, \xi_2^{(\rho)}, \dots, \xi_n^{(\rho)}) \Delta\upsilon_\rho$ τοῦτο καλοῦμεν ***n-τάξεως πολλαπλοῦν ὁλοκλήρωμα*** καί τό συμβολίζομεν οὕτω:

$$I = \iint_G \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n .$$

Πρός ὑπολογισμόν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος θεωροῦμεν τό σύνολον τῶν σημείων $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ διά τά ὁποῖα ἡ συντεταγμένη x_n ἔχει μίαν σταθεράν τιμήν. Τό σημεῖον $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ διαγράφει εἰς τόν Εὐκλείδειον χῶρον τῶν $n-1$ διαστάσεων ἕνα χωρίον Q καί διαπιστοῦμεν εὐκόλως ὅτι, τό n-τάξεως πολλαπλοῦν ὁλοκλήρωμα I ἰσοῦται πρός τήν ἔκφρασιν: $I = \int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} \theta(x_n) dx_n$, (2) ὅπου $\theta(x_n)$ εἶναι τό $(n-1)$-τάξεως πολλαπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\iint_Q \cdots \int f(x_1, x_2, \dots x_{n-1})\, dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1},$$

ἐκτεινόμενον ἐπί τοῦ χωρίου Q καί $x_n^{(2)}, x_n^{(1)}$ (εἶναι τό ἀνώτερον καί κατώτερον πέρας τῆς x_n εἰς τό χωρίον G.)

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό χωρίον G εἶναι ἕνα παραλληλεπίπεδον ὁριζόμενον ὑπό τῶν ἀνισοτήτων:

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1,\ a_2 \leq x_2 \leq b_2,\ \dots,\ a_n \leq x_n \leq b_n$$

τό πολλαπλοῦν ὁλοκλήρωμα εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν γίνεται:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n \qquad (3)$$

Ὁ τύπος τῆς ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν ἐκτείνεται καί εἰς τά n-τάξεως πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα.

Ἔστω $x_\rho = \varphi_\rho\ (u_1, u_2, \ldots, u_n)\ ,\ \rho = 1, 2, \ldots, n$

οἱ τύποι τοῦ μετασχηματισμοῦ, διά τῶν ὁποίων δημιουργεῖται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν πεδίων G καί G′, ὅπου $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in G'$. Θά ἔχωμεν τότε:

$$\iint_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \iint_{G'} \cdots \int f(\varphi_1(u_1, \ldots u_n), \cdots \varphi_n(u_1, \cdots u_n)) \left| \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n \,.$$

III. Τά πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα εὑρίσκουν πλείστας ἐφαρμογάς κυρίως δέ εἰς τήν Φυσικήν.

<u>Ἐφαρμογαί 1η</u> Νά εὑρεθῆ ἡ Νευτώνειος δύναμις ἕλξεως μεταξύ δύο ὑλικῶν στερεῶν V_1, V_2 μέ ἀντιστοίχους κατανομάς πυκνότητος $\delta_1(x_1, y_1, z_1)$, $\delta_2(x_2, y_2, z_2)$.

<u>Λύσις</u>: Πρός τοῦτοις θεωροῦμεν ἐπί ἑκάστου τῶν στερεῶν V_1 καί V_2 ἀπό ἕνα στοιχειῶδες ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μέ ἀντιστοίχους ὄγκους $dv_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ καί $dv_2 = dx_2 dy_2 dz_2$.

Μεταξύ αὐτῶν τῶν στερεῶν ὑφίσταται μία στοιχειώδης Νευτώνειος δύναμις $d\vec{F}$ της ὁποίας τό μέτρον τῆς προβολῆς εἰς τόν ἄξονα τῶν x ἰσοῦται πρός:

$$dF_x = k \cdot \frac{\delta_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \delta_2(x_2, y_2, z_2)}{r^3} \cdot (x_1 - x_2)\, dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 \qquad (1)$$

$$\text{ὅπου} \quad r = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right]^{1/2}$$

Διά νά εὕρωμεν τήν ὁλικήν τιμήν τοῦ μέτρου τῆς προβολῆς ἀρκεῖ νά ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκλήρωμα:

$$F_x = k \iiint\iiint_{V_1 \times V_2} \frac{\delta_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \delta(x_2, y_2, z_2)\,(x_1 - x_2)}{r^3}\, dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 \qquad (2)$$

Αἱ ὑπόλοιποι προβολαί ὑπολογίζονται ἀναλόγως. Ἐδῶ τό σημεῖον (x_1, y_1, z_1) κινεῖται ἐπί τοῦ χώρου V_1 καί τό (x_2, y_2, z_2) κινεῖται ἐπί τοῦ V_2. Ἐντεῦθεν τό ὁλοκλήρωμα (2) λαμβάνεται ἐπί τοῦ πεδίου τοῦ χώρου τῶν 6-διαστάσεων τῶν μεταβλητῶν $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Αὐτό τό χωρίον καλεῖται *Καρτεσιανόν γινόμενον τῶν χωρίων* V_1 καί V_2 καί συμβολίζεται μέ $V_1 \times V_2$.

21/ Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα:

$$\iint\cdots\int dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

ἐπεκτεινόμενον εἰς τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ Εὐκλειδείου χώρου τῶν n-διαστάσεων, τά ὁποῖα πληροῦν τήν ἀνισότητα $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1$.

Λύσις: Ἄς καλέσωμεν W_n τόν ὄγκον τῆς σφαίρας ἀκτῖνος $R=1$ εἰς τόν χῶρον τῶν n-διαστάσεων. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος R εἰς τόν χῶρον τῶν n-διαστάσεων ἰσοῦται πρός $W_n \cdot R^n$. Πράγματι ὁ ὄγκος αὐτῆς παρέχεται ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος:

$$\Omega_n = \iint\cdots\int dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \qquad (1)$$

ἐπεκτεινόμενον εἰς τό χωρίον:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < R^2.$$

Ἐάν εἰς τό ὁλοκλήρωμα (1) ἐκτελέσωμεν τόν μετασχηματισμόν:

$$x_1 = R\cdot u_1,\ x_2 = R\cdot u_2, \cdots x_n = R u_n$$

τότε:

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 < 1.$$

Ἡ Ἰακωβιανή τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ ἰσοῦται πρός R^n. Ὅθεν τό ὁλοκλήρωμα (1) γίνεται:

$$\Omega_n = R^n \iint\cdots\int du_1\, du_2 \cdots du_n \quad \text{ἤ}$$

$$\Omega_n = R^n \cdot W_n . \qquad (2)$$

Διά νά ὑπολογίσωμεν τό W_n ὁλοκληρώνομεν ἐν πρώτοις ὡς πρός $x_3, x_4, \cdots x_n$ εἰς τό πεδίον ὁριζόμενον ὑπό τῆς ἀνισότητος:

$$x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_n^2 < 1 - x_1^2 - x_2^2 .$$

Τό ἀποτέλεσμα θά εἶναι μία συνάρτησις τῶν x_1, x_2 καί τό ὁποῖον ὁλοκληρώνομεν ἐν συνεχείᾳ ἐντός τοῦ κύκλου:

$$x_1^2 + x_2^2 < 1.$$

Τό ἀποτέλεσμα τῆς πρώτης ὁλοκληρώσεως εἶναι ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος $\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ εἰς τόν χῶρον τῶν (n-2)-διαστάσεων καί συμφώνως πρός τόν τύ-

πον (2) ὁ ὄγκος αὐτῆς τῆς σφαίρας θά πρέπει νά ἰσοῦται πρός

$$W_{n-2}\,(1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

Θά ἔχωμεν λοιπόν, μετά τήν δευτέραν ὁλοκλήρωσιν:

$$W_n = W_{n-2}\iint_G (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n-2}{2}}dx_1\,dx_2 \qquad (3)$$

ὅπου τό χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ὁ κύκλος $x_1^2+x_2^2<1$.

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος (3) χρησιμοποιοῦμεν πολικάς συντεταγμένας ἤτοι: $x_1=\rho\,\text{συν}\theta$, $x_2=\rho\,\text{ημ}\theta$, ὅτε ὁ τύπος (3) γίνεται:

$$\frac{W_n}{W_{n-2}} = \iint_D (1-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}}\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}}\rho\,d\rho = \frac{2\pi}{n}.$$

Ὅθεν, $$W_n = \frac{2\pi}{n}\cdot W_{n-2} \qquad (4)$$

Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι:

$W_1 = 2$, (μῆκος τοῦ τμήματος $-1, 1$)

$W_2 = \pi$, (ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 1)

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (4) ὅτι:

$$W_{2\rho}=\frac{\pi^\rho}{\rho!} \quad \text{καί} \quad W_{2\rho+1}=\frac{2^{2\rho+1}\cdot\rho!}{(2\rho+1)!}\;\pi^\rho$$

<u>Παράδειγμα</u>:

$$W_3=\frac{4}{3}\pi,\quad W_4=\frac{\pi^2}{2},\quad W_5=\frac{8}{15}\pi^2,\ \dots$$

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι, τοῦ $n\uparrow\infty$ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἀκτῖνος R εἰς τόν χῶρον τῶν n-διαστάσεων τείνει πρός τό μηδέν οἱουδήποτε ὄντος τοῦ R.

§ 7. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

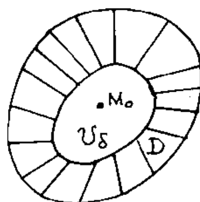
Ι. Διά συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς ἔχομεν θεωρήσει γενικευμένα ὁλοκληρώματα: i) Αὐτά εἰς τά ὁποῖα ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις γίνεται ἄπειρος εἰς ἕνα σημεῖον καί ii) Αὐτά εἰς τά ὁποῖα τό διάστημα τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἄπειρον. Ἐπί πλέον ἐθεωρήσαμεν καί ἕναν μικτόν τύπον τῶν δύο ἀνωτέρω περιπτώσεων.

Διπλᾶ καί τριπλᾶ ὁλοκληρώματα ἔχομεν θεωρήσει μόνον διά φραγμένας συναρτήσεις καί διά φραγμένα χωρία ὁλοκληρώσεως.

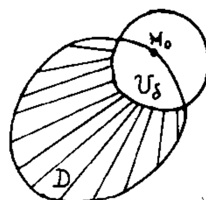
Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $f(M)=f(x,y)$ ὡρισμένη εἰς ἕνα φραγμένον χωρίον D τοῦ ἐπιπέδου oxy. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(M)$ δέν εἶναι φραγμένη εἰς κάθε περιοχὴν τοῦ σημείου $M_0(x_0,y_0)\in\bar{D}$ ($\bar{D}$: ἡ θήκη τοῦ χωρίου D) καί ἐπί πλέον διά κάθε χωρίον $D\setminus U_\delta$, ὅπου τό U_δ περιέχει τό σημεῖον M_0 εἰς τό ἐσωτερικόν του, ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι φραγμένη καί ὁλοκληρώσιμος ὑπό τὴν συνήθη ἔννοιαν. (βλ. Σχ. 1(α) καί 1(β)).

Ὁ δείκτης δ τοῦ U_δ παριστᾶ τὴν διάμετρον τοῦ χωρίου U_δ.

Θά λέγωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{U_n\}$ τῶν χωρίων τείνει πρός τό σημεῖον M_0 καί γράφωμεν $U_n\to\{M_0\}, n\uparrow\infty$, ἐάν διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχη $N(\varepsilon)$ τοιοῦτον ὥστε νά ἔχωμεν $\delta(U_n)<\varepsilon$ διά $n\geq N(\varepsilon)$.



Σχ. 1 (α)



Σχ. 1 (β)

Ἐάν $\delta\to 0$, τότε τό χωρίον U_δ τείνει νά περιορισθῇ εἰς τό σημεῖον M_0.

Ἄς θεωρήσωμεν τό ὁλοκλήρωμα $\iint\limits_{D\setminus U_\delta} f(x,y)\,dx\,dy$ ἤ συντόμως $\iint\limits_{D\setminus U_\delta} f(M)\,d\sigma$. Θά λέγωμεν ὅτι τοῦτο τείνει πρός ἕνα ὅριον ℓ καθώς τό $\delta\to 0$ καί τό ὁποῖον (ὅριον) εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου κατά τόν ὁποῖον τά χωρία U_δ τείνουν πρός τό σημεῖον M_0, ἐάν διά κάθε ἀκολουθίαν χωρίων $\{U_{\delta_n}\}, n\geq 1$ (1) ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει τό σημεῖον M_0 εἰς τό ἐσωτερικόν του καί τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην $\delta_n\to 0$ τοῦ $n\uparrow\infty$, ἡ ἀντίστοιχος ἀριθμητική ἀκολουθία $\left\{\iint\limits_{D\setminus U_{\delta_n}} f(M)\,d\sigma\right\}, n\geq 1$ συγκλίνει πρός ἕνα καί τό αὐτό ὅριον ℓ, τό ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλεγείσης ἀκολουθίας τῶν περιοχῶν $\{U_{\delta_n}\}, n\geq 1$.

Ἐν προκειμένῳ δέ γράφομεν:

$$\lim_{\delta\to 0}\iint\limits_{D\setminus U_\delta} f(M)\,d\sigma=\ell \qquad (2)$$

Καλοῦμεν, ἐξ ὁρισμοῦ, *γενικευμένον ὁλοκλήρωμα* τῆς $f(x,y)=f(M)$ ἐπί τοῦ χωρίου D καί τό συμβολίζομεν οὕτω: $\iint\limits_{D} f(M)\,d\sigma$ ἤ $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$, τό ὅριον:

$\lim\limits_{\delta\to 0}\iint\limits_{D\setminus U_\delta} f(M)\,d\sigma$, ἐάν αὐτό ὑπάρχῃ, εἶναι πεπερασμένον καί εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ

τρόπου κατά τό όποῖον τά U_δ τείνουν πρός τό σημεῖον M_0. Ἐν προκειμένῳ θά λέγωμεν ὅτι τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα *συγκλίνει*, ἐν ἐναντία δέ περιπτώσει ὅτι *ἀποκλίνει*.

Κατωτέρω ἀναφέρομεν δύο βασικά θεωρήματα ἀφορῶντα τήν σύγκλισιν ἑνός γενικευμένου ὁλοκληρώματος μιᾶς μή ἀρνητικῆς συναρτήσεως.

Θεώρημα VII-7-1 Ἔστω ἡ μή ἀρνητική συνάρτησις $f(x,y)=f(M)$ ἡ ὁποία δέν εἶναι φραγμένη εἰς κάθε περιοχή U_δ τοῦ $M_0\in\bar{D}$ ἐνῶ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ $D\setminus U_\delta$. Θεωροῦμεν μίαν μονότονον ἀκολουθίαν ὁμοκέντρων κύκλων μέ κέντρον τό M_0 τοῦ τύπου (1). Παριστῶμεν ἕναν κύκλον μέ κέντρον τό σημεῖον M_0 καί ἀκτῖνος δ διά K_δ καί οὕτω δυνάμεθα νά γράψωμεν αὐτήν τήν ἀκολουθίαν ὑπό τήν μορφήν:

$$K_{\delta_1'}\supset K_{\delta_2'}\supset\cdots\supset K_{\delta_n'}\supset\cdots\ (3),\ \text{ὅπου } \delta_n'\to 0 \text{ τοῦ } n\uparrow\infty .$$

Ὑπό τάς ἀνωτέρω ὑποθέσεις ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D f(M)\,d\sigma$ συγκλίνῃ εἶναι ἡ ἀριθμητική ἀκολουθία $\left\{\iint_{D\setminus K_{\delta_n'}} f(M)\,d\sigma\right\}, n\ge 1$ (4) νά εἶναι φραγμένη

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον). Τοῦτο ἕπεται ἄμεσα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος.

(Ἱκανόν) Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (4) εἶναι φραγμένη. Λόγῳ τῆς ἀκολουθίας (3) ἔχομεν:

$$D\setminus K_{\delta_1'}\subset D\setminus K_{\delta_2'}\subset\cdots\subset D\setminus K_{\delta_n'}\subset\cdots\qquad(5).$$

Ἐπειδή ἡ $f(M)$ εἶναι μή ἀρνητική καί ὁλοκληρώσιμος ἐπί τῶν συνόλων τῆς ἀκολουθίας $\{D\setminus K_{\delta_n'}\}, n\ge1$ συνάγεται, ὅτι ἡ ἀκολουθία $\left\{\iint_{D\setminus K_{\delta_n'}} f(M)\,d\sigma\right\}, n\ge1$ εἶναι μή φθίνουσα, εἶναι δέ ἐξ ὑποθέσεως καί φραγμένη, ἄρα συγκλίνει. Ἔστω δέ $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{D\setminus K_{\delta_n'}} f(M)\,d\sigma=\ell$, ὅτε $\iint_{D\setminus K_{\delta_n'}} f(M)\,d\sigma\le\ell$ διά κάθε n.

Ἔστω ἤδη ἕνα χωρίον U_{δ_n} περιεχόμενον μεταξύ τῶν κύκλων $K_{\delta_p'}$ καί $K_{\delta_q'}$, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες $\delta_p', \delta_q'\to 0$ καθώς τό $\delta_n\to0$. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$K_{\delta_p'}\supset U_{\delta_n}\supset K_{\delta_q'}\qquad(6)$$

Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν:

$$D\setminus K_{\delta_p'}\subset D\setminus U_{\delta_n}\subset D\setminus K_{\delta_q'}\quad(7)$$

Λόγῳ τῆς (7) ἔχομεν: $\iint\limits_{D\setminus K_{\delta'_p}} f(M)d\sigma \leq \iint\limits_{D\setminus U_{\delta_m}} f(M)d\sigma \leq \iint\limits_{D\setminus K_{\delta'_q}} f(M)d\sigma$ (8)

Εἶναι ὅμως: $\lim\limits_{\delta'_p\to 0} \iint\limits_{D\setminus K_{\delta'_p}} f(M)d\sigma = \lim\limits_{\delta'_q\to 0} \iint\limits_{D\setminus K_{\delta'_q}} f(M)d\sigma = \ell$. Ὅθεν, $\lim\limits_{\delta_m\to 0} \iint\limits_{D\setminus U_{\delta_m}} f(M)d\sigma = \ell$.

Τό ἀκόλουθον θεώρημα ἀποτελεῖ μίαν γενίκευσιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Θεώρημα VIII-7-2: Ἔστω ἡ μή ἀρνητική συνάρτησις $f(x,y)=f(M)$ πληροῦσα τάς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Θεωροῦμεν μίαν αὐθαίρετον ἀκολουθίαν χωρίων περιέχουσα τό σημεῖον M_0 τοῦ τύπου (1), δηλ. τήν $\{U_{\delta_n}\}, n\geq 1$. Τότε τό ὁλοκλήρωμα $\iint\limits_D f(M)d\sigma$ συγκλίνει ἐαν, καί μόνον ἐάν, ἡ ἀντίστοιχος ἀριθμητική ἀκολουθία $\{\iint\limits_{D\setminus U_{\delta_n}} f(M)d\sigma\}, n\geq 1$ εἶναι φραγμένη.

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον) Ἀπεδείχθη εἰς τό προηγούμενον θεώρημα.

(Ἱκανόν). Θεωροῦμεν μίαν μονότονον ἀκολουθίαν κύκλων τοῦ τύπου (3) περικλείουσα τό M_0 καί ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ἀριθμητική ἀκολουθία (4) ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν ἀκολουθία τῶν κύκλων εἶναι φραγμένη. Τότε δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔχομεν τό ἀποδεικτέον.

Πράγματι, τό ὅτι ἡ ἀριθμητική ἀκολουθία (4) εἶναι φραγμένη ἀποδεικνύεται ὡς ἀκολούθως:

Ὑποθέτομεν ὅτι: $\iint\limits_{D\setminus U_{\delta_m}} f(M)d\sigma \leq C < +\infty$, διά κάθε $m\geq 1$.

Ἐπειδή τό $\delta_m \to 0$ τοῦ $m\uparrow\infty$ δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν ὅτι διά κάθε n ὑπάρχει m τοιοῦτον ὥστε νά ἔχωμεν: $K_{\delta'_n}\supset U_{\delta_m}$. Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως ἕπεται ὅτι $D\setminus K_{\delta'_n} \subset D\setminus U_{\delta_m}$ καί ἐπειδή ἡ $f(M)$ εἶναι μή ἀρνητική ὁλοκληρώσιμος συνάρτησις θά ἔχωμεν: $\iint\limits_{D\setminus K_{\delta'_n}} f(M)d\sigma \leq \iint\limits_{D\setminus U_{\delta_m}} f(M)d\sigma$

Ὅθεν, $\iint\limits_{D\setminus K_{\delta'_n}} f(M)d\sigma \leq C$ (C: σταθερά).

Δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἕπεται ὅτι τό $\iint\limits_D f(M)d\sigma$ συγκλίνει.

Παρατηρήσεις: 1η Τά ἀνωτέρω θεωρήματα ἐφαρμόζονται καί εἰς τά n-πλᾶ ὁλοκληρώματα.

2α: Ἡ μέθοδος ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν ἐφαρμόζεται καί εἰς τά γενικευμένα πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα οἱουδήποτε εἴδους ἀρκεῖ τοῦτο νά συγκλίνῃ.

Παράδειγμα 1ον Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^q}}$, ὅπου D εἶναι ὁ δίσκος $x^2+y^2 \leq 1$ καί νά δειχθῇ ὅτι τοῦτο συγκλίνει διά $q<2$ καί ἀποκλίνει διά $q\geq 2$.

Ἀπόδειξις: Ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις δέν εἶναι φραγμένη εἰς κάθε περιοχήν τοῦ σημείου $M_0\,(0,0)$ καί ὡς ἐκ τούτου πρόκειται περί ἑνός γενικευμένου ὁλοκληρώματος. Ἐπί πλέον ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι θετική διά κάθε $(x,y)\in D\setminus\{M_0\}$ καί κατά συνέπειαν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα VIII-7-1. Πρός τούτοις λαμβάνομεν τήν μονότονον ἀκολουθίαν τῶν ὁμοκέντρων κύκλων, κέντρου M_0 καί ἀκτῖνος $\frac{1}{n}$, ἤτοι τήν ἀκολουθίαν $\{K_{1/n}\}$, $n\geq 1$. Ἡ ἀκολουθία αὐτή τείνει πρός τό σημεῖον $M_0(0,0)$. Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν τήν ἀντίστοιχον ἀκολουθίαν τῶν ὁλοκληρωμάτων:

$$I_n=\iint_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^q}} \quad (1), \text{ ὅπου } D_n \text{ ὁ δακτύλιος } D\setminus K_{1/n}$$

Ἐάν ἐκτελέσωμεν τόν μετασχηματισμόν $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\rho\eta\mu\theta$ τό ὁλοκλήρωμα (1) γίνεται:

$$I_n=\iint_{D_n^*}\frac{1}{\rho^q}\cdot\rho\cdot d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{1/n}^{1}\rho^{1-q}d\rho=\begin{cases}\frac{2\pi}{2-q}\left(1-\frac{1}{n^{2-q}}\right), & \text{ἐάν } q<2\\ 2\pi\,\log n, & \text{»}\ \ q=2\\ \frac{2\pi}{q-2}\left(n^{q-2}-1\right), & \text{»}\ \ q>2.\end{cases}$$

Ἐάν $q<2$ καί $n\uparrow\infty$, ὅτε καί $K_{1/n}\to\{M_0\}$, τό ὅριον τῆς ἀνωτέρω ἀκολουθίας τῶν ὁλοκληρωμάτων θά εἶναι:

$$I=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{2\pi}{2-q}.$$

Ἐάν $q\geq 2$ τό δοθέν ὁλοκλήρωμα ἀποκλίνει.

Παράδειγμα 2ον Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D\frac{|xy|dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, ὅπου D εἶναι ὁ δίσκος ὁ ὁριζόμενος ὑπό τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Λύσις: Ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις δέν εἶναι φραγμένη εἰς κάθε περιοχήν τοῦ σημείου $M_0\,(0,0)$, ἐπί πλέον δέ αὐτή εἶναι θετική. Ὅθεν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα VIII-7-2. Πρός τούτοις λαμβάνομεν τήν μονότονον ἀκολουθίαν τῶν ὁμοκέντρων ἐλλείψεων κέντρου M_0, ἤτοι τήν ἀκολουθίαν $\{E_n\}$, $n\geq 1$, ὅπου ἡ ἐξίσωσις τῆς E_n εἶναι: $x^2/(\frac{a}{n})^2+y^2/(\frac{b}{n})^2=1$. Ἤδη θεωροῦμεν τόν δακτύλιον D_n πού περιέχεται μεταξύ τῆς δοθείσης ἐλλείψεως καί τῆς E_n καί ἄς θεωρήσωμεν ἐν συνεχείᾳ τό ὁλοκλήρωμα:

$$I_n=\iint_{D_n}\frac{|xy|dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \quad (1) \ \text{ ἤ } \ \frac{I_n}{4}=\iint_{\mathfrak{D}_n}\frac{xydxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\ x>0,\ y>0$$

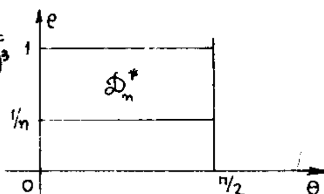
ὅπου $\mathfrak{D}_n$ τό τέταρτον τοῦ ἀνωτέρω δακτυλίου.

Ἐκτελοῦμεν τόν μετασχηματισμόν $x=\alpha\rho\,\text{συν}\theta$, $y=\beta\rho\,\text{ημ}\theta$ εἰς τό τελευταῖον ὁλοκλήρωμα, ὅτε ὁ ἐλλειπτικός τεταρτοδακτύλιος $\mathcal{D}_n$ μετασχηματίζεται εἰς τό ὀρθογώνιον χωρίον $\mathcal{D}_n^*$ (βλ. Σχ.1) καί τό ὁλοκλήρωμα I_n γίνεται:

$$\frac{I_n}{4}=\alpha^2\beta^2\iint_{\mathcal{D}_n^*}\frac{\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{(\alpha^2\text{συν}^2\theta+\beta^2\text{ημ}^2\theta)^3}}=\frac{\alpha^2\beta^2}{2}\int_{1/n}^{1}d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{ημ}2\theta\,d\theta}{\sqrt{(\alpha^2\text{συν}^2\theta+\beta^2\text{ημ}^2\theta)^3}}=$$

$$=\frac{\alpha^2\beta^2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\,\text{συν}2\theta\right)^{3/2}d\,(\text{συν}2\theta)$$

$$=\frac{\alpha\,\beta}{2(\beta+\alpha)}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$



Σχ. 1

καί ἑπομένως: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

• Ὑπάρχουν καί περιπτώσεις ὅπου ἡ θεωρηθεῖσα συνάρτησις δέν ὁρίζεται εἰς ἕνα ἤ περισσότερα σημεῖα. Ἐάν π.χ. ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις γίνεται ἄπειρος κατά μῆκος μιᾶς καμπύλης (γ), εἶναι τότε ἀναγκαῖον νά ὁρίσωμεν μίαν ἀκολουθίαν πεδίων ὁλοκληρώσεως περικλείουσα τήν καμπύλην (γ) καί ἐν συνεχείᾳ νά εὕρωμεν τήν ἀντίστοιχον ἀκολουθίαν τῶν ὁλοκληρωμάτων, ὡς δεικνύεται εἰς τό ἑπόμενον παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 3ον</u> Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τοῦ $q>0$ διά τάς ὁποίας τό ὁλοκλήρωμα: $\displaystyle\iint_D\left(\frac{x}{y}\right)^q dx\,dy$ συγκλίνει, ὅπου D τό χωρίον $\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

<u>Λύσις:</u> Παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι θετική, ἐκτός τῶν σημείων τοῦ ἄξονος τῶν x τά ὁποῖα ὁρίζονται ὑπό τῶν σχέσεων: $y=0$, $0\le x\le 1$, ὅπου αὕτη δέν ὁρίζεται. Πρόκειται λοιπόν περί ἑνός γενικευμένου ὁλοκληρώματος καί τοῦ ὁποίου τά ἀνώμαλα σημεῖα εἶναι τό ἀνωτέρω εὐθύγραμμον τμῆμα, δηλ. τό $y=0$, $0\le x\le 1$. Διά νά ὑπολογίσωμεν τοῦτο δυνάμεθα καί ἐν προκειμένῳ νά ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα VIII-7-2 καί τό ὁποῖον παραμένει ἰσχύον καί εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἀντί σημείου ἔχομεν εὐθύγραμμον τμῆμα, ὅπου ἡ συνάρτησις δέν ὁρίζεται. Θά θεωρήσωμεν λοιπόν τήν ἀκολουθίαν τῶν ὀρθογωνιακῶν τόπων $D_n=\{(x,y):0\le x\le 1, \frac{1}{n}\le y\le 1\}$, $n\ge 2$ καί τήν ἀντίστοιχον ἀκολουθίαν τῶν ὁλοκληρωμάτων,

ἤτοι τήν :

$$I_n = \iint_{D_n} \left(\frac{x}{y}\right)^q dxdy = \int_0^1 x^q dx \cdot \int_{1/n}^1 \frac{dy}{y^q} \cdot$$ Εἶναι γνωστόν ὅτι τοῦ $n \uparrow \infty$ τό $\int_{1/n}^1 \frac{dy}{y^q}$ συγκλίνει διά $0<q<1$. Ὅθεν, καί τό δοθέν ὁλοκλήρωμα συγκλίνει διά $0<q<1$.

<u>Παράδειγμα 4ον</u> Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D yx^{-1/2} dxdy$, ὅπου D εἶναι τό τετράγωνον μέ κορυφάς τά σημεῖα (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).

<u>Λύσις</u>: Ἡ θεωρηθεῖσα συνάρτησις δέν εἶναι ὡρισμένη ἐπί τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα (0,0), (0,1). Ἐπί πλέον δέ εἰς πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ θεωρηθέντος τετραγώνου εἶναι συνεχής καί θετική καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό Θεώρημα VIII-7-2. Ἔστω D_τ εἶναι τό ὀρθογώνιον πού ὁρίζεται ἀπό τάς εὐθείας $x=1$, $x=\tau$, $y=0$ καί $y=1$. Ἐπειδή ἡ $f(x,y)=yx^{-\frac{1}{2}}$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ D_τ θά εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπ' αὐτοῦ καί βάσει τοῦ προαναφερθέντος θεωρήματος θά ἔχωμεν:

$$\iint_D yx^{-\frac{1}{2}} dxdy = \lim_{\tau \downarrow 0} \iint_{D_\tau} yx^{-\frac{1}{2}} dxdy.$$

Ἔχομεν ὅμως: $\iint_{D_\tau} yx^{-\frac{1}{2}} dxdy = \int_\tau^1 dx \int_0^1 yx^{-\frac{1}{2}} dy = \int_\tau^1 dx \left[\frac{y^2}{2\sqrt{x}}\right]_0^1 = \int_\tau^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 1-\sqrt{\tau}.$

Ὅθεν, $\iint_D yx^{-\frac{1}{2}} dxdy = \lim_{\tau \to 0} \{1-\sqrt{\tau}\} = 1.$

<u>Πρότασις VIII-7-1</u>. <u>Ἡ σύγκλισις τοῦ ὁλοκληρώματος</u> $\iint_D |f(x,y)| dxdy$ (ἀπόλυτος σύγκλισις) <u>συνεπάγεται τήν σύγκλισιν τοῦ ὁλοκληρώματος</u> $\iint_D f(x,y) dxdy$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Κατ' ἀρχάς ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι ἐάν $f_1(x,y)$ καί $f_2(x,y)$ εἶναι δύο θετικαί συναρτήσεις τοιαῦται, ὥστε $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$ διά κάθε $(x,y) \in D \setminus \{P\}$ καί τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D f_2(x,y) dxdy$ συγκλίνει, τότε καί τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D f_1(x,y) dxdy$ συγκλίνει. Ἐξ ἄλλου $0 \leq |f(x,y)| - f(x,y) \leq 2|f(x,y)|$ καί ἐπειδή τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D |f(x,y)| dxdy$ συγκλίνει, ἐξ αὐτοῦ ἕπεται καί τό $\iint_D \{|f(x,y)| - f(x,y)\} dxdy$

συγκλίνει. Ὅθεν ὑπάρχει τό: $\iint\limits_{D}\left[|f(x,y)|-\{|f(x,y)|-f(x,y)\}\right]dxdy=$
$=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ ἤτοι τό $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ συγκλίνει.

Ἕνα ἀξιοσημείωτον κριτήριον συγκλίσεως γενικευμένου ὁλοκληρώματος εἶναι τό κάτωθι:

<u>Πρότασις VIII – 7-2</u>. <u>Ἐάν ἐπί τοῦ κλειστοῦ χωρίου</u> D <u>ἡ συνάρτησις</u> $f(x,y)$ <u>εἶναι συνεχής, ἐξαιρέσει τοῦ σημείου</u> $P(0,0)\in D$, <u>ὅπου ἡ</u> $f(x,y)$ <u>εἰς αὐτό γίνεται ἄπειρος καί ἐάν ὑπάρχη ἕνας σταθερός ἀριθμός</u> $M>0$ <u>καί ἕνας θετικός ἀριθμός</u> $q<2$ <u>τοιοῦτος, ὥστε</u>: $|f(x,y)|\le\dfrac{M}{(\sqrt{x^2+y^2})^q}$ <u>διά κάθε</u> $(x,y)\in D\setminus P$, <u>τότε τό ὁλοκλήρωμα</u> $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ <u>συγκλίνει</u>.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἔχομεν ὡς γνωστόν:

$$\left|\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy\right|\le\iint\limits_{D_n}|f(x,y)|dxdy\le M\iint\limits_{D_n}\frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^q}\qquad(1),$$

ὅπου τό $D_n=D\setminus U_n$ καί τό U_n εἶναι ἕνας κύκλος κέντρου $P(0,0)$ καί ἀκτῖνος $R_n=\frac{1}{n}$. Λαμβάνοντες τά ὅρια τῆς ἀνωτέρω σχέσεως διά $n\uparrow\infty$ καί ἐπειδή $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}\dfrac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^q}}$ ὑπάρχει (βλ. προηγούμενον παράδειγμα 1ον) ἕπεται ὅτι καί τό ὁλοκλήρωμα $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ συγκλίνει.

Ἀναλόγους ὁρισμούς δυνάμεθα νά δώσωμεν καί διά τά τριπλᾶ ὁλοκληρώματα.

<u>**Παράδειγμα 5ον**</u>/ Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα:

$$\iiint\limits_{D}\frac{dxdydz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^q}$$

ὅπου τό χωρίον D ὁρίζεται ὑπό τῆς ἀνισότητος $x^2+y^2+z^2\le 1$.

<u>Λύσις</u>: Ὁρίζομεν τό χωρίον D_n τοιοῦτον ὥστε: $\frac{1}{n}\le\rho\le 1$, ὅπου $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Εἰσάγωμεν σφαιρικάς συντεταγμένας, ἤτοι: $x=\rho$συνθ ημφ, $y=\rho$ημθ ημφ, $z=\rho$ συνφ, ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\iiint\limits_{D_n} \frac{dxdydz}{\rho^q} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1/n}^{1} \frac{1}{\rho^{q-2}} \eta\mu\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-q}\left(1-\frac{1}{n^{3-q}}\right), & \text{ἐάν } 0 \le q < 3 \\ 4\log n & \quad '' \quad q = 3 \\ \frac{4\pi}{q-3}\left(n^{q-3}-1\right) & \quad '' \quad q > 3 \end{cases}$$

Συμπεραίνομεν ὅτι, τό ὁλοκλήρωμα συγκλίνει διά $q<3$ καί ἀποκλίνει διά $q \ge 3$.

Ἕνα ἀνάλογον κριτήριον διά τά τριπλᾶ ὁλοκληρώματα πρός τήν Πρότασιν VIII-7-2 εἶναι ἡ κάτωθι:

__Πρότασις VIII-7-3__. Ἐάν ἐπί τοῦ κλειστοῦ χωρίου V ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)$ εἶναι συνεχής, ἐξαιρέσει τοῦ σημείου $P(0,0,0)\in V$, ὅπου ἡ $f(x,y,z)$ εἰς αὐτό γίνεται ἄπειρος καί ἐάν ὑπάρχῃ ἕνας σταθερός ἀριθμός $M>0$ καί ἕνας θετικός ἀριθμός $q<3$ τοιοῦτος ὥστε: $|f(x,y,z)| \le \frac{M}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^q}$ διά κάθε $(x,y,z)\in V \setminus P$, τότε τό ὁλοκλήρωμα $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ συγκλίνει.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω συμπερασμάτων δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τά ὁλοκληρώματα:

$$\iint\limits_D \frac{f(x,y)\,dxdy}{(\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2})^q}, \quad q<2$$

$$\iiint\limits_V \frac{f(x,y,z)\,dxdydz}{(\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2})^q}, \quad q<3$$

ὅπου (α,β) ἤ (α,β,γ) εἶναι σταθερά ἐσωτερικά σημεῖα τῶν χωρίων D ἤ V ἀντιστοίχως καί ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ D ἤ V ἀντιστοίχως.

Πρός τούτοις ἐκτελοῦμεν ἕναν γραμμικόν μετασχηματισμόν, ὥστε τό σημεῖον (α,β) ἤ (α,β,γ) νά ἔλθῃ εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἐν συνεχεία ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω. Ἀναλόγως εἰς τήν περίπτωσιν N ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τό N-πλοῦν γενικευμένον ὁλοκλήρωμα $\iint\limits_{\Omega}\cdots\int \frac{C}{r^q}\,dx_1dx_2\cdots dx_N$, C: σταθερά, ὅπου $r=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_N-x_N^0)^2}$ συγκλίνει διά $q<N$ καί ἀποκλίνει διά $q\ge N$, ἐάν τό σημεῖον $M\equiv(x_1^0,\cdots x_N^0)$ ἀνήκῃ εἰς τό ἐσωτερικόν του χωρίου Ω.

II. Ἔστω ὅτι τό χωρίον D δέν εἶναι φραγμένον. Προσεγγίζομεν αὐτό διά μιᾶς ἀκολουθίας ὑπο-χωρίων $D_1, D_2, \ldots, D_n \ldots$ τά ὁποῖα εἶναι πάντα φραγμένα καί ἔχουν τήν ἰδιότητα ὅτι κάθε αὐθαίρετον φραγμένον ὑπο-χωρίον τοῦ D περιέχεται εἰς κάθε D_n ὅπου $n \geq$ ἑνός ἀκεραίου m. Π.χ. ἐάν τό D εἶναι τό ἐπίπεδον ὡς D_n δυνάμεθα νά ἐκλέξωμεν τά κυκλικά χωρία μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἀκτῖνα n.

Ὁρισμός VIII - 7-2. *Ἔστω ὅτι τό χωρίον D δέν εἶναι φραγμένον καί ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ συνεχής ἐν D. Ἔστω $\{D_n\}$ μία ἀκολουθία φραγμένων χωρίων ὡς ὡρίσθη ἀνωτέρω. Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν τῶν ὁλοκληρωμάτων:*

$$I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy \qquad (1)$$

Ἐάν τοῦ $n \uparrow \infty$ ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνῃ καί εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλεγείσης ἀκολουθίας $\{D_n\}$, τότε τό ὅριον τοῦτο καλεῖται γενικευμένον ὁλοκλήρωμα τῆς f ἐπί τοῦ μή φραγμένου χωρίου D καί συμβολίζεται οὕτω: $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν ἔχομεν:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \underset{\text{ὁρ.}}{=} \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

Θά λέγωμεν ἐν προκειμένῳ ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ ***συγκλίνει*** ἐν D.

Ἐν ἐναντίᾳ δέ περιπτώσει θά λέγωμεν ὅτι τό ὁλοκλήρωμα ***ἀποκλίνει*** ἐν D.

Ἀνάλογος ὁρισμός δίδεται καί διά τά τριπλᾶ ὁλοκληρώματα καί γενικῶς πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα.

Σημείωσις: Τά συμπεράσματα τῶν Θεωρημάτων VIII-7-1 καί VIII-7-2 μεταφέρονται κατ' ἀναλογίαν καί εἰς τά γενικευμένα ὁλοκληρώματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους διά τάς μή ἀρνητικάς συναρτήσεις.

Παράδειγμα 6ον Νά ἐξετασθῇ ἐάν συγκλίνῃ τό ὁλοκλήρωμα $I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, ὅπου D εἶναι τό ἐπίπεδον τῶν x,y.

Λύσις: Ἐπειδή ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι θετική ἀρκεῖ νά δείξωμεν τήν σύγκλισιν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος διά τήν αὔξουσαν ἀκολουθίαν τῶν χωρίων ὁλοκληρώσεως ἤτοι τήν $D_n : x^2+y^2 \leq n^2,\ n=1,2,3,\ldots$

Ἔστω $I_n = \iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$, (1) ὅπου $D_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq n^2\}$

Μετασχηματίζοντες τό (1) εἰς πολικάς συντεταγμένας ἔχομεν:

$$I_n = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1-e^{-n^2}).$$

καί $$\lim_{n\to\infty} I_n = I = \lim_{n\to\infty} \pi\,(1-e^{-n^2}) = \pi.$$

Παρατήρησις: Ἐάν λάβωμεν ὡς $D_n = \{(x,y) : |x| \leq n,\ |y| \leq n\}$, τότε θά ἔχωμεν:

$$I_n = \iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-n}^{+n} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-n}^{+n} e^{-y^2}dy = \left(\int_{-n}^{+n} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(2\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Ἐπειδή $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, (βλ. σελ. 186) ἕπεται ὅτι:

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \left(2 \cdot \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \pi.$$

Πρότασις VIII - 7-4. Ἐάν ἐπί τοῦ μή φραγμένου χωρίου D τό ὁλοκλήρωμα $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ συγκλίνῃ (ἀπόλυτος σύγκλισις), τότε καί τό ὁλοκλήρωμα $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ συγκλίνει.

Πρότασις VIII - 7-5 Ἐάν ἐπί τοῦ μή φραγμένου χωρίου D ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι συνεχής καί ὑπάρχῃ ἕνας σταθερός ἀριθμός $M > 0$ καί ἕνας θετικός ἀριθμός $q > 2$ εἰς τρόπον ὥστε νά ἔχωμεν: $|f(x,y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2+y^2})^q}$ διά κάθε $(x,y) \in D$, τότε τό ὁλοκλήρωμα $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ συγκλίνει.

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν μίαν αὔξουσαν ἀκολουθίαν φραγμένων χωρίων D_n καί

ἔστω δέ ὅτι τό D_n περιέχεται εἰς τόν δακτύλιον μέ ἀκτῖνα $\rho=\rho_0$ καί $\rho=R_n$, ὅπου τοῦ $n\uparrow\infty$ τό $R_n\uparrow\infty$. Ὁλοκληρώνομεν τήν $f(x,y)$ ἐπί τοῦ χωρίου D_n καί εἰσάγοντες πολικάς συντεταγμένας ἔχομεν:

$$\left|\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_{D_n} \left|f(x,y)\right| dx\,dy \le M\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho_0}^{R_n} \frac{d\rho}{\rho^q}\rho = \frac{2\pi M}{q-2}\left(\frac{1}{\rho_0^{q-2}} - \frac{1}{R_n^{q-2}}\right)$$

καί $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left|\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \dfrac{2\pi M}{(q-2)\rho_0^{q-2}}$, διότι $\dfrac{1}{R_n^{q-2}} \downarrow 0$

Ὅθεν, $\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \dfrac{2\pi M}{(q-2)\rho_0^{q-2}}$, ἤτοι τό $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ συγκλίνει.

Πάντα τά ἀνωτέρω ἐπεκτείνονται κατ' ἀναλογίαν καί εἰς τά τριπλᾶ καί γενικῶς πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα.

<u>Παράδειγμα 7ον/</u> Νά ἐξετασθῇ ὡς πρός τήν σύγκλισιν τό ὁλοκλήρωμα:

$\iint_D \dfrac{\eta\mu xy\,dx\,dy}{x^2(1+y^2)}$, ὅπου $D=\left\{(x,y):\ 1\le x<+\infty, 0\le y\le 1\right\}$.

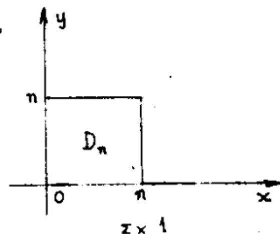
<u>Λύσις</u>: Ὁρίζομεν τήν ἀκολουθίαν τῶν φραγμένων χωρίων D_n: $D_n=\left\{(x,y): 1\le x\le n, 0\le y\le 1\right\}$.

Εἶναι δέ, $\displaystyle\iint_{D_n}\left|\frac{\eta\mu xy}{x^2(1+y^2)}\right|dx\,dy \le \iint_{D_n}\frac{dx\,dy}{x^2(1+y^2)} = \int_1^n\frac{dx}{x^2}\cdot\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n\cdot\left[\tau o\xi\varepsilon\varphi y\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{n}+1\right]\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$, $n\uparrow\infty$

Ὅθεν, συγκλίνει τό $\displaystyle\iint_D\left|\frac{\eta\mu xy}{x^2+y^2}\right|dx\,dy$, ἄρα καί τό $\displaystyle\iint_D\frac{\eta\mu xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

<u>Παράδειγμα 8ον/</u> Νά μελετηθῇ ὡς πρός τήν σύγκλισιν τό ὁλοκλήρωμα τοῦ Cayley $\iint_D \eta\mu(x^2+y^2)\,dx\,dy$, ὅπου $D=\left\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$.

<u>Λύσις</u> Θεωροῦμεν ὡς χωρία D_n τά τετράγωνα πλευρᾶς n, (βλ. Σχ.1), ὅτε θά ἔχωμεν:



$$I_n = \iint_{D_n}\eta\mu(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{D_n}(\eta\mu x^2\sigma\upsilon\nu y^2+\sigma\upsilon\nu x^2\eta\mu y^2)\,dx\,dy$$

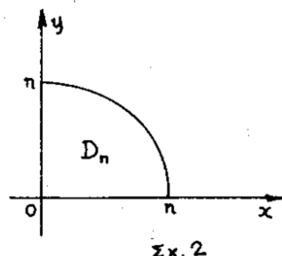
$$= 2\cdot\int_0^n \eta\mu x^2\,dx\cdot\int_0^n \sigma\upsilon\nu y^2\,dy.$$

Τοῦ $n\uparrow+\infty$ ἡ τελευταία σχέσις δίδει τά γνωστά ὡς ὁλοκληρώματα τοῦ Fresnel (βλ. ἄσκ. 30, σελ. 255). Ὅθεν ἔχομεν:

$$\int_0^{\infty} \text{ημ}x^2 dx = \int_0^{\infty} \text{συν}x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ὅθεν, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Ἐάν ἤδη λάβωμεν ὡς χωρία D_n ὄχι τά τετράγωνα, ἀλλά τεταρτοκύκλια ἀκτῖνος n (βλ. Σχ. 2) καί διά μεταβάσεως εἰς πολικάς συντεταγμένας θά ἔχωμεν:



Σχ. 2

$$I_n = \iint_{D_n} \text{ημ}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{D_n^*} \text{ημ}\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{n} \text{ημ}\rho^2\,\rho\cdot d\rho = \frac{\pi}{2}\,(1-\text{συν}n^2).$$

Τοῦ $n\uparrow\infty$ τό $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ δέν ὑπάρχει, ἀλλά ταλαντεύεται μεταξύ τῶν τιμῶν 0 καί $\frac{\pi}{2}$. Συνεπῶς διά διαφορετικάς οἰκογενείας περιοχῶν παρατηροῦμεν ὅτι, τό ὁλοκλήρωμα τοῦ Cayley ἄλλοτε ὑπάρχει καί ἄλλοτε δέν ὑπάρχει. Ἄρα τό δοθέν ὁλοκλήρωμα ἀποκλίνει.

<u>Παράδειγμα 9ον/</u> Νά ὑπολογισθῇ τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

<u>Λύσις:</u> Ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι τό χωρίον V τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τῶν ἀνισοτήτων: $0 \le x, y, z < +\infty$.

Πρός τούτοις θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν τῶν χωρίων Ω_n, τά ὁποῖα ὁρίζονται ὑπό τῶν ἀνισοτήτων:

$$\Omega_n:\ x^2+y^2+z^2 \le n^2 \text{ καί } x, y, z \ge 0,\ n=1,2,3,\dots$$

καί ἔστω:

$$I_n = \iiint_{\Omega_n} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2} \qquad (1)$$

Μετασχηματίζοντες τό (1) εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας ἔχομεν:

$$I_n = \iiint_{\Omega_n^*} (\rho^2+a^2)^{-2} \cdot \rho^2 \eta\mu\varphi d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu\varphi d\varphi \int_0^{n} (\rho^2+a^2)^{-2} \rho^2 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{n} (\rho^2+a^2)^{-2} \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{4} \left(-\frac{n}{n^2+a^2} + \frac{1}{a} \,\tau o\xi\, \varepsilon\varphi \frac{n}{a}\right)$$

Ὅθεν, $I = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi^2}{8a}$.

§ 8. ΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΙ ΒΗΤΑ

I. Ἡ συνάρτησις Γάμμα καί ἰδιότητες αὐτῆς. Εἰς τό Κεφάλαιον XV, §6 τοῦ Πρώτου Τόμου ὡρίσαμεν τήν συνάρτησιν Γ καί ἐμελετήσαμεν μερικάς ἁπλᾶς ἰδιότητας αὐτῆς. Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά μελετήσωμεν μερικάς ἀκόμη ἰδιότητας τῆς συναρτήσεως Γ, ἀκολούθως δέ θά ὁρίσωμεν μίαν ἄλλην σπουδαίαν συνάρτησιν, τήν συνάρτησιν Β καί θά ἴδωμεν πως συνδέεται αὕτη μετά τῆς συναρτήσεως Γ.

Ὡς γνωστόν ἡ συνάρτησις Γ ὁρίζεται ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t>0 \qquad (1)$$

καί ἔχει τάς κάτωθι χαρακτηριστικάς ἰδιότητας (βλ. Τόμος Α Κεφ. XV, § 6).

α) $\Gamma(1)=1$, β) $\Gamma(t+1)=t\cdot\Gamma(t)$, γ) $\Gamma(n+1)=n!$, διά $n\in\mathbb{N}$

δ) $\Gamma(t+n+1)=t\cdot(t+1)(t+2)\cdots(t+n)\cdot\Gamma(t)$.

Εἰς τήν (1) ἐκτελοῦντες τόν μετασχηματισμόν $x=u^2$ λαμβάνομεν:

$$\Gamma(t) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot u^{2t-1} du \qquad (2)$$

Εἰδικῶς διά $t=\frac{1}{2}$ ἔχομεν:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \qquad (3)$$

Ἐάν n ἀκέραιος, τότε εὐκόλως ὑπολογίζεται ὅτι:

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\cdots\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}).$$

καί λόγῳ τῶν (2) καί (3) ἔχομεν:

$$\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\cdot u^{2n}\,du = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n\cdot n!}\sqrt{\pi}} \qquad (4)$$

Τό ὁλοκλήρωμα (1) συγκλίνει διά $0<t<+\infty$ καί ἀποκλίνει διά $t\leqq 0$ (διατί;). Τό ἐν λόγῳ ὁλοκλήρωμα εἶναι γενικευμένον ὡς πρός τό κάτω ὅριον διά $t<1$.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν ἀξιοσημείωτον ἰδιότητα τῆς συναρτήσεως Γ.

<u>Πρότασις VIII - 8-1.</u> <u>Η συνάρτησις</u> Γ <u>εἶναι συνεχής καί ἔχει παραγώγους πάσης τάξεως διά κάθε</u> $t\in(0,+\infty)$.

<u>**Ἀπόδειξις**</u>: Ἀποδεικνύομεν κατ' ἀρχήν ὅτι τό $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς ὡς πρός τήν παράμετρον t εἰς κάθε πεπερασμένον διάστημα $[\alpha,\beta]$, ἤτοι διά κάθε t μέ $0<\alpha\leqq t\leqq \beta<+\infty$.

Πράγματι τό ὁλοκλήρωμα (1) γράφεται:

$$\Gamma(t) = \int_0^1 e^{-x}\cdot x^{t-1}dx + \int_1^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$$

Τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς διά κάθε $t\in[\alpha,\beta]$ καί $0<x\leqq 1$ καθ' ὅσον ἰσχύει:

$$\left|e^{-x}x^{t-1}\right| = e^{-x}\cdot x^{t-1} \leqq x^{t-1} \leqq x^{\alpha-1}$$

Ὁμοίως τό ὁλοκλήρωμα $\int_1^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς, λόγῳ τοῦ κριτηρίου τοῦ Weierstrass (βλ. Τόμος Πρῶτος, θεώρ. XVIII - 9-1), διά κάθε $t\in[\alpha,\beta]$ καί $1\leqq x<+\infty$.

Ἐφ' ὅσον ἀμφότερα τά ὁλοκληρώματα συγκλίνουν ὁμαλῶς συγχρόνως διά κάθε $t\in[\alpha,\beta]$, τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot x^{t-1}dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς τήν συνάρτησιν Γ(t).

Ἐφ' ὅσον ἡ $f(x,t)=e^{-x}\cdot x^{t-1}$ εἶναι συνεχής διά $x\in(0,+\infty)$ καί $t>0$ καί τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot x^{t-1}dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς ὡς πρός τήν παράμετρον t εἰς κάθε πεπερασμένον διάστημα $[\alpha,\beta]$ μέ $0<\alpha\leqq t\leqq\beta<+\infty$, τό ὁλοκλή-

ρωμα $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{t-1}dx$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις εἰς κάθε τέτοιο διάστημα (βλ. Θεώρ. VII-13-1) δηλ. ἡ $\Gamma(t)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διά κάθε $t\in(0,+\infty)$.

Θά μελετήσωμεν τώρα τὴν συνάρτησιν $\Gamma(t)$ ὡς πρός τὴν παράγωγον.

Ἔστω $f(x,t)=e^{-x}\,x^{t-1}$ μέ $0<x<+\infty$ καί $t>0$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=e^{-x}(\log x)\cdot x^{t-1}$ εἶναι συνεχὴς διά κάθε $x\in(0,+\infty)$ καί $t>0$, τό δέ ὁλοκλήρωμα ταύτης, ἤτοι τό:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(\log x)\, x^{t-1}dx \equiv \int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx$$

συγκλίνει ὁμαλῶς ἐφ' ἑκάστου κλειστοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ μέ $0<\alpha\leq t\leq\beta<+\infty$. Τοῦτο ἀποδεικνύεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου τοῦ Weierstrass (βλ. Θεώρ. XVIII-9-1, Τόμος Α') διά τά ὁλοκληρώματα:

$$\int_0^{1} e^{-x}(\log x)\, x^{t-1}dx \quad\text{καί}\quad \int_1^{+\infty} e^{-x}(\log x)\, x^{t-1}\,dx$$

διά τά ὁποῖα δυνάμεθα νά θέσωμεν ἀντιστοίχως:

$$M(x)=x^{\alpha-1}\,|\log x| \quad\text{καί}\quad M(x)=x^{\beta-1}\cdot|\log x|e^{-x}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι πληροῦνται πᾶσαι αἱ ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος VII-13-2 καί συνεπῶς ἡ $\Gamma(t)$ παραγωγίζεται καί ἰσχύει:

$$\Gamma'(t)=\int_0^{+\infty} e^{-x}(\log x)\, x^{t-1}\,dx.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι k-τάξεως τῆς $\Gamma(t)$ καί ἰσχύει:

$$\Gamma^{(k)}(t)=\int_0^{+\infty} e^{-x}(\log x)^k\, x^{t-1}dx,\quad k=1,2,3,\dots$$

II. <u>Ἡ συνάρτησις Βῆτα καί ἰδιότητες αὐτῆς.</u> Τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}dx \qquad (1)$$

τό ὁποῖον συγκλίνει, ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως, τῇ βοηθείᾳ τῆς προτάσεως XV-3-3 τοῦ πρώτου Τόμου, διά $p>0$ καί $q>0$ ἀρκεῖ νά γραφῇ οὕτω:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (2)$$

ορίζει μίαν συνάρτησιν δύο μεταβλητών, τήν:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

ήτις καλεῖται ἡ <u>βῆτα συνάρτησις</u> τοῦ Binet.

Διά τήν συνάρτησιν $B(p,q)$ ἰσχύουν τά κάτωθι:

<u>Ἰδιότης 1η</u>: $B(p,q)=B(q,p)$

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἐκτελῶντας τόν μετασχηματισμόν: $x=1-t$ ἔχομεν:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,p).$$

Ὅθεν ἡ Βῆτα συνάρτησις εἶναι συμμετρική συνάρτησις τῶν p,q.

<u>Ἰδιότης 2α</u> $B(p,q)=2\cdot\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{2p-1}\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^{2q-1}\theta\,d\theta$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Χρησιμοποιῶντας τόν μετασχηματισμόν $x=\eta\mu^2\theta$ ἔχομεν:

$$B(p,q)=\int_0^{\pi/2}(\eta\mu^2\theta)^{p-1}\cdot(\sigma\upsilon\nu^2\theta)^{q-1}\,2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta=2\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{2p-1}\theta\,\sigma\upsilon\nu^{2q-1}\theta\,d\theta.$$

<u>Σημείωσις</u>: Διά $p=q=\frac{1}{2}$ ἔχομεν: $B(p,q)\equiv B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=2\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi$.

Ἡ συνάρτησις βῆτα συνδέεται μέ τήν γάμμα συνάρτησιν διά τῆς σχέσεως:

<u>Ἰδιότης 3η</u> $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ p>0,\ q>0.$

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἡ συνάρτησις $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{t-1}dx$ διά τοῦ μετασχηματισμοῦ $x=y^2$ γίνεται:

$$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{t-1}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\cdot y^{2t-1}\,dy \qquad (\alpha)$$

Ὅθεν:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=4\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cdot x^{2p-1}dx\right)\left(\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\cdot y^{2q-1}dy\right)$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cdot x^{2p-1}\cdot y^{2q-1}\,dxdy \qquad (\beta)$$

Διά μετασχηματισμού είς πολικάς συντεταγμένας $x=\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\,\eta\mu\theta$ καί έχοντας ύπ' όψιν τήν προηγουμένην ίδιότητα τής Βήτα συναρτήσεως, ή σχέσις (β) γίνεται:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\cdot\rho^{2(p+q)-1}\cdot\eta\mu^{2q-1}\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^{2p-1}\theta\,d\rho\,d\theta=$$

$$=4\left(\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\cdot\rho^{2(p+q)-1}d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{2q-1}\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^{2p-1}\theta\,d\theta\right)$$

$$=2\cdot\Gamma(p+q)\cdot\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{2q-1}\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^{2p-1}\theta\,d\theta=\Gamma(p+q)\cdot B(q,p)=\Gamma(p+q)\cdot B(p,q).$$

Όθεν: $\quad B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,,\ p>0,\ q>0$

- Διά $p=q=\frac{1}{2}$ λαμβάνομεν έκ τής άνωτέρω σχέσεως:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2=B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(1)$$

Άλλά $\quad \Gamma(1)=1$ καί $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$, όθεν:

$$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2=\pi \text{ καί συνεπώς: } \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,.$$

Άλλά $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$, όθεν:

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ήτοι, τή βοηθεία τών συναρτήσεων Βήτα καί γάμμα ύπολογίζομεν τό γνωστόν όλοκλήρωμα τού Euler.

<u>Ίδιότης 4η</u> <u>Ή</u> $B(p,q)$ <u>είναι συνεχής συνάρτησις διά κάθε</u> $p>0$ <u>καί</u> $q>0$.

Τούτο είναι άμεσος συνέπεια τής προηγουμένης ίδιότητος καί τής προτάσεως VIII-§1.

Δύο άξιόλογοι έφαρμογαί τών συναρτήσεων $B(p,q)$ καί Γάμμα είναι αί κάτωθι:

<u>Έφαρμογή 1η</u>: Νά ύπολογισθή τό όλοκλήρωμα τού Wallis:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\eta\mu^n\theta\,d\theta$$

__Λύσις__: Ἡ σχέσις:

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2} \eta\mu^{2p-1}\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^{2q-1}\theta\, d\theta$$

διά $p=\frac{n+1}{2}$ καί $q=\frac{1}{2}$ δίδει:

$$B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2}\eta\mu^n\theta\cdot d\theta, \quad \text{ὅθεν}$$

$$\int_0^{\pi/2}\eta\mu^n\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\,B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

καί ἐπειδή $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ ἔχομεν:

$$I_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

__Ἐφαρμογή 2α__. Δείξατε ὅτι διά μεγάλον n, ἰσχύει:

$$n!\simeq\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n} \quad (\underline{\text{τύπος τοῦ Stirling}})^{1)}$$

__Λύσις__: Ἔχομεν:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,x^n dx=\int_0^{+\infty}e^{n\log x-x}\,dx \qquad (1)$$

Θέτοντες $x=n+y$ ἡ (1) γίνεται:

$$\Gamma(n+1)=e^{-n}\int_{-n}^{+\infty}e^{n\log(n+y)-y}\,dy=e^{-n}\int_{-n}^{+\infty}e^{n\log n+n\log\left(1+\frac{y}{n}\right)-y}\,dy=n^n\,e^{-n}\int_{-n}^{+\infty}e^{n\log\left(1+\frac{y}{n}\right)-y}dy \qquad (2)$$

Ὡς γνωστόν (βλ. Τόμος Πρῶτος, σελ. 412).

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

καί διά $x=\frac{y}{n}$ λαμβάνομεν

$$\log\left(1+\frac{y}{n}\right)=\frac{y}{n}-\frac{y^2}{2n^2}+\frac{y^3}{3n^3}-\cdots \qquad (3)$$

Εἰς τήν (2) θέτοντες $y=\sqrt{n}\cdot u$ καί ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν (3) λαμβάνομεν:

$$\Gamma(n+1)=n^n\,e^{-n}\int_{-n}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}-\cdots}\,dy=n^n\,e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3\sqrt{n}}-\cdots}\,du$$

---

1) Δηλ. τό $\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}}\longrightarrow 1,\ n\uparrow\infty$.

Ἡ τελευταία σχέσις διά n ἀρκετά μεγάλο γράφεται :

$$\Gamma(n+1) \simeq n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (4)$$

Ἀλλά $\Gamma(n+1) = n!$ καί $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$. Ὅθεν ἡ (4) δίδει:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

<u>Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:</u>

1. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τοῦ φρασσομένου ὑπό τῆς ἐπιφανείας $z=4-x^2-y^2$ καί τοῦ ἐπιπέδου xy.

2. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $z=x^2$ καί $z=4-x^2-y^2$.

3. Ὑπολογίσατε τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ πού περικλείεται ὑπό τῶν δύο ἐλλειπτικῶν παραβολοειδῶν $y^2+2z^2+x-16=0$ καί $2y^2+z^2-x=0$.

4. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iiint_V x\,dV$, ὅπου V εἶναι τό χωρίον τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $y=x^2$, $y=x+2$, $4z=x^2+y^2$ καί $z=x+3$.

5. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, ὅπου V εἶναι τό χωρίον τό εὑρισκόμενον εἰς τό πρῶτον ὀγδοημόριον καί φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $x+2y=6$, $z^2+y^2=4$.

6. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $z=x^2+y^2$ καί $z=2x$.

7. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $z=x^2+y^2$ καί $x^2+y^2=a^2$, $z \geq 0$.

8. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iiint_V z\,\eta\mu(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, ὅπου V εἶναι τό σφαι-

κικόν τμῆμα μέ μία βάσιν, τό ὁποῖον περιορίζεται ὑπό τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας $z=(a^2-x^2-y^2)^{1/2}$ καί ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $z=h$ $0<h<a$.

9. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $x^2+y^2-2x=0$, $4z=x^2+y^2$ καί $z^2=x^2+y^2$.

10. Νά εὑρεθῇ τό κ.β. καί ἡ ροπή ἀδρανείας I_z τοῦ στερεοῦ V, τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $x^2+y^2+z^2=4$, $4z=8-x^2-y^2$ καί $z\geq 0$, ἐάν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς κάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογη τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπό τό ἐπίπεδον $z=0$.

11. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ κυκλικοῦ κώνου $z^2=x^2+y^2$, $z\geq 0$ ὡς πρός τούς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

12. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα:
$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,xyz\,dx\,dy\,dz$, ἐπί τοῦ χωρίου V τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τῆς σχέσεως $x^2+y^2+z^2\leq R^2$.

13. Ἐάν $V=\{(x,y,z):\ 0<x^2+y^2+z^2\leq 1\}$, ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα:

$$\iiint_V \frac{z\log(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,dx\,dy\,dz$$

14. Νά εὑρεθῇ ἡ μᾶζα τοῦ χωρίου $x^2+y^2+z^2\leq 9$, ὅταν $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ καί ἡ πυκνότης τούτου εἶναι $\delta(x,y,z)=xyz$.

15. Νά εὑρεθῇ τό κ.β. τοῦ ἡμισφαιρίου $x^2+y^2+z^2\leq R^2$, $z\geq 0$ τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως ἀπό τό κέντρον.

16. Νά ὑπολογισθῇ τό $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, ὅπου τό χωρίον V φράσσεται ὑπό τῶν σφαιρῶν $x^2+y^2+z^2=a^2$ καί $x^2+y^2+z^2=b^2$, ὅπου $a>b>0$.

17. Ὑπολογίσατε τῇ βοηθείᾳ σφαιρικῶν συντεταγμένων

$$\iiint_V \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz$$

ὅπου $V=\{(x,y,z):\ a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2,\ 0<a<b\}$.

18. Ὁμοίως τὸ $\iiint_V z\,dxdydz$, ὅπου τὸ χωρίον V ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνισοτήτων $x^2+y^2 \leq z^2$ καὶ $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

19. Ὑπολογίσατε τὸ ὁλοκλήρωμα: $\iiint_V \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{z}\right)dxdydz$,

ὅπου $V=\{(x,y,z):\ 0<x^2+y^2+z^2<1,\ 0<x^2+y^2<z^2,\ 0<z\}$

20. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κ.β. ἑνὸς σώματος περιοριζομένου ὑπὸ μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος a καὶ ἑνὸς κώνου γωνίας κορυφῆς 2ω, ὅπου ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ ἡ πυκνότης τοῦ σώματος εἶναι σταθερά.

21. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ ἐχούσης διευθύνοντα συνημίτονα (συνα, συνβ, συνγ).

22. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ποὺ ἀποκόπτει ἀπὸ τὸ ἐλλειψοειδὲς $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ τὸ ἐπίπεδον $\kappa x+\lambda y+\nu z=\tau$.

23. Εἰς ἕκαστον τῶν κάτωθι ὁλοκληρωμάτων τὸ χωρίον D εἶναι ὁ μοναδιαῖος δίσκος $x^2+y^2 \leq 1$. Ἐξετάσατε ποῖα ἐξ αὐτῶν συγκλίνουν.

i) $\iint_D \frac{x^2dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ii) $\iint_D \log\frac{1}{r}\,dxdy,\ r=(x^2+y^2)^{1/2}$ iii) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x}}$ iv) $\iint_D \frac{x\,dxdy}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x}}$

24. Ἐξετάσατε ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι ὁλοκληρωμάτων συγκλίνουν.

i) $\iiint_V \rho^{-q}dxdydz$, ὅπου $\rho=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ καὶ $V: \rho \geq 1$ καὶ $q>0$

ii) $\iiint_V \frac{xdxdydz}{\rho^3}$, ὅπου $V: 0 \leq \rho \leq 1$ iii) $\iiint_V \frac{dxdydz}{\rho^2(1-x)^{3/2}}$, $V: 0 \leq \rho \leq 1$

25. Ὁμοίως τό $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2}}$, ὅπου τό χωρίον V εἶναι τό $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

25α. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα : $J = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x-y}}$ ὅπου τό χωρίον D ὁρίζεται ἀπό τάς εὐθείας : $x=y, y=0, x=a$.

26. Ἐξετάσατε ἄν ἔχῃ ἔννοιαν τό ὁλοκλήρωμα: $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2y)(1+y)}$,

ὅπου $D=\{(x,y): x \ge 0, y \ge 0\}$, καί ὑπολογίσατε τοῦτο. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x^2}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

(27.) Δείξατε ὅτι: $\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x F(x)\,(dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-u)^{n-1} F(u)\,du, n=1,2,3,\ldots$

Παρατήρησις: Ἡ ἀνωτέρω ἄσκησις ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς ἀσκήσεως $\int_0^x \int_0^x F(x)\,(dx)^2 = \int_0^x (x-u)\,F(u)\,du$ (βλ. σχετικῶς ἄσκησιν 6 σελ. 210).

28. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα τοῦ Dirichlet:

$$I = \iiint\limits_V x^{a-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\, dxdydz$$

ὅπου $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$

Ὑπόδ. Θέτοντες $x^2=u, y^2=v, z^2=w$ λαμβάνομεν:

$$I = \frac{1}{8} \iiint\limits_{V^*} u^{\frac{a}{2}-1} v^{\frac{\beta}{2}-1} \cdot w^{\frac{\gamma}{2}-1}\, dudvdw$$

ὅπου : $V^* = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u+v+w \le 1, u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0\}$

Θέτοντες $v=(1-u)t$ καί ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τάς ἰδιότητας τῆς συναρτήσεως γάμμα καί εἰδικώτερον ὅτι: $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ τελικῶς εὑρίσκομεν:

$$I = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{\beta}{2})\,\Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma[(a+\beta+\gamma):2+1]}$$

28α. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iint\limits_D x^{-1/2} \cdot y^{-1/3}\, dxdy$, ὅπου τό χωρίον D εἶναι τό

$D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

29. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\eta\mu p\pi}$, δείξατε ὅτι:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\eta\mu p\pi},$$ δείξατε ὅτι:

30. Δείξατε ὅτι: $$\int_0^{+\infty} \sqrt{1-x^4}\, dx = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$$

31. Δείξατε ὅτι: $$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\eta\mu^2\theta}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$$

32. Δείξατε ὅτι: $$\int_3^7 \sqrt[4]{(7-x)(x-3)}\, dx = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2$$

33. Ἐάν $\alpha>0$, $\beta>0$ καί $4\alpha\gamma>\beta^2$ δείξατε ὅτι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)}\, dxdy = \frac{2\pi}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}$$

34. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα $\iiint_V xyz\,dxdydz$, ὅπου V εἶναι τό χωρίον τό περικλειόμενον ὑπό τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, χρησιμοποιοῦντες κατ' ἀρχήν τήν ἀλλαγή τῶν μεταβλητῶν, $x=\alpha u$, $y=\beta u$, $z=\gamma w$ καί ἐν συνεχείᾳ μεταβαίνοντες ἀπό τίς ὀρθογώνιες συντεταγμένες (u,u,w) στίς ἀντίστοιχες σφαιρικές.

35. Νά εὑρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ κ.β. τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ μέ πυκνότητα $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}$ (Ἀπάντ: $\left(\frac{1}{3},0,0\right)$)

36. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα:

$I(\xi,\eta,\zeta) = \iiint \sigma\upsilon\nu(\xi x+\eta y+\zeta z)\,dxdydz$ λαμβανομένου ἐπί τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

30. Υπολογισμός τῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ Fresnel.

Τά ὁλοκληρώματα:

$$F_1=\int_{-\infty}^{+\infty} \eta\mu(y^2)dy,\quad F_2=\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma\upsilon\nu(y^2)\,dy \qquad (1)$$

εἶναι γνωστά ὡς ὁλοκληρώματα τοῦ Fresnel καί εὑρίσκουν ἐφαρμογάς εἰς τήν ὀπτικήν.

Διά τήν ἐπίλυσιν τούτων ἐκτελοῦμεν τόν μετασχηματισμόν $y^2=t$, ὅτε ἔχομεν:

$$F_1=\int_0^{\infty}\frac{\eta\mu t}{\sqrt{t}}\,dt,\quad F_2=\int_0^{\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{t}}\,dt, \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ Euler $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ λαμβάνομεν:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2t}\,dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t}\,d(x\sqrt{t})=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ὅθεν:
$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t}\,dx, \quad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καί (3) ἔχομεν:

$$F_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}e^{-x^2t}\,\eta\mu t\,dt,\quad F_2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}e^{-x^2t}\,\sigma\upsilon\nu t\,dt \qquad (4)$$

Ἄν καλέσωμεν $I_1=\int_0^{+\infty}e^{-x^2t}\,\eta\mu t\,dt$ καί $I_2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2t}\,\sigma\upsilon\nu t\,dt$ καί ἐφαρμόσωμεν παραγοντικήν ὁλοκλήρωσιν θά λάβωμεν:

$$\left.\begin{aligned} I_1&=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \xi\to\infty}}\left(-e^{-x^2t}\,\sigma\upsilon\nu t\,\Big|_{\varepsilon}^{\xi}\right)-x^2I_2\\ I_2&=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \xi\to\infty}}\left(e^{-x^2t}\,\eta\mu t\,\Big|_{\varepsilon}^{\xi}\right)+x^2I_1\end{aligned}\right\}\quad \text{ἤ}\quad \left\{\begin{aligned} I_1&=1-x^2I_2\\ I_2&=x^2I_1\end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι: $I_1=\frac{1}{1+x^4}$ καί $I_2=\frac{x^2}{1+x^4}$ καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τάς (4) ἔχομεν:

$$F_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4},\quad F_2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}, \qquad (6)$$

Εἰς τό F_2 ἐκτελοῦμεν τόν μετασχηματισμόν $z=\frac{1}{x}$, ὅτε:

$$F_2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{0}\frac{\frac{1}{z^2}\cdot\left(-\frac{dz}{z^2}\right)}{1+\frac{1}{z^4}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^4}=F_1 \quad \text{ἤτοι}\quad F_1=F_2$$

Τό F_1 ὑπολογίζεται κατά τά γνωστά ἐκ τοῦ Α' τόμου, βλ. σχετικῶς ἐφαρμογή 4η, σελ. 472, Τόμος Α', ὅτε ἔχομεν τελικῶς:

$$F_1=F_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Εἰς τὸ παρὸν Κεφάλαιον θὰ ἀναφέρωμεν βασικά τινα στοιχεῖα ἐκ τῆς θεωρίας τῶν καμπύλων, κυρίως δὲ θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰς βασικὰς ἐφαρμογὰς τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως εἰς τὰς καμπύλας τοῦ Εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ καὶ εἰς τινὰς περιπτώσεις τοῦ $\mathbb{R}^2$.

§ 1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ $\mathbb{R}^3$.

Εἰς τὴν παροῦσαν § κρίνομεν σκόπιμον νὰ ἀναφέρωμεν, λίαν συντόμως, τινὰ ἐκ τοῦ Διανυσματικοῦ Λογισμοῦ.

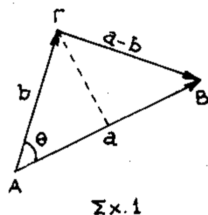
I. Ἔστωσαν τὰ διανύσματα $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ καὶ $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ τοῦ Εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Ὡς γνωστόν, (βλ. Τόμος I, σελ. 109), ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$ καλεῖται ***ἐσωτερικὸν γινόμενον*** τῶν $\mathbf{a}$ καὶ $\mathbf{b}$.

Εἶναι δέ, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$. Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν:

$$\text{i)}\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a},\quad \text{ii)}\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\pm\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\pm\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ μίαν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τοῦ ἀνωτέρω ἐσωτερικοῦ γινομένου. Ἔστωσαν $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (βλ. Σχ. 1). Ἔστω δὲ θ ἡ γωνία αὐτῶν ($0\le\theta\le 180°$). Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τοῦ νόμου τοῦ συνημιτόνου ἔχομεν:

$$|\overrightarrow{\Gamma B}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{A\Gamma}|^2-2\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A\Gamma}|\,\sigma\upsilon\nu\theta=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\,\sigma\upsilon\nu\theta \quad (1)$$



Σχ. 1

Ἐξ ἄλλου:

$$|\overrightarrow{\Gamma B}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} \quad (3)$$

ὁ τύπος (3) εἶναι ἀξιοσημείωτος.

Ἐὰν $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathcal{O}$(*) καὶ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, ἔπεται ὅτι $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

(*) *Τὸ $\mathcal{O}$ παριστᾷ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$.*

Διά τά μοναδιαῖα διανύσματα i, j, k ἔχομεν προφανῶς

$$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1,\ i\cdot j = j\cdot k = k i = 0.$$

II. <u>Ὁρισμός IX - 1-1.</u> *Ἔστωσαν τά διανύσματα $a=(a_1, a_2, a_3)$ καί $b=(b_1, b_2, b_3)$. Τό ἐξωτερικόν γινόμενον τούτων $a\times b$ ὁρίζεται ὅτι εἶναι τό διάνυσμα:*

$a\times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$ ἤ ὑπό μορφήν ὁριζούσης:

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Προφανῶς $a\times a = O$. Τό ἐξωτερικόν γινόμενον εἶναι ἕνα διάνυσμα.

Τό ἐξωτερικόν γινόμενον ἔχει τάς κάτωθι ἰδιότητας:

i). $a\times b = -b\times a$, ii) $a\times(b\pm c) = a\times b \pm a\times c$, iii) $|a\times b|^2 = |a|^2\cdot|b|^2 - (a\cdot b)^2$;

<u>Ἀπόδειξις:</u> (τῆς iii) Ἔχομεν: $|a\times b|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$

$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = |a|^2\cdot|b|^2 - (a\cdot b)^2$.

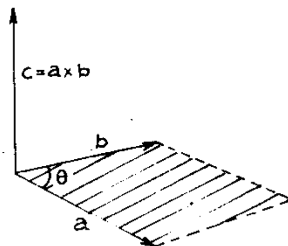
Ἤδη θά δώσωμεν μίαν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος iii) λαμβάνομεν:

$$|a\times b|^2 = |a|^2\cdot|b|^2 - |a|^2\cdot|b|^2\text{συν}^2\theta = |a|^2\cdot|b|^2\text{ημ}^2\theta$$

Ὅθεν: $\quad |a\times b| = |a|\cdot|b|\cdot\text{ημ}\theta \quad (4)$, ὅπου $0 \leq \theta \leq 180°$.

Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου (4) παρατηροῦμεν ὅτι: <u>τό μέτρον τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου παριστᾷ τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ὁριζομένου ὑπό τῶν διανυσμάτων a καί b</u> (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2

Ἔστω $c = a\times b$, παρατηροῦμεν ὅτι,

$$c\cdot a = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ὅθεν: $c\cdot a = 0$, δηλ. τό $a\times b$ εἶναι ὀρθογώνιον πρός τό a.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τό c εἶναι ὀρθογώνιον πρός τό b.

Ἡ φορά τοῦ $a\times b$ λαμβάνεται εἰς τρόπον, ὥστε τά διανύσματα $a, b, a\times b$ νά σχηματίζουν ἕνα δεξιόστροφον σύστημα.

Ὅθεν: τό ἐξωτερικόν γινόμενον $a\times b$ εἶναι ἕνα διάνυσμα κάθετον πρός τό ἐπίπεδον τό ὁριζόμενον ὑπό τῶν a καί b, μέ μέτρον διδόμενον ὑπό τοῦ τύπου (4) καί φοράν τοιαύτην ὥστε τό σύστημα $a, b, a\times b$ νά εἶναι δεξιόστροφον.

Εἶναι δέ: $i\times i = j\times j = k\times k = \mathcal{O}$, $j\times k = i$, $k\times i = j$, $i\times j = k$.

III. Τό ἐσωτερικόν γινόμενον $a\cdot(b\times c)$ ἤ συντόμως $a\cdot b\times c$ ἤ (a,b,c) καλεῖται *μικτόν γινόμενον*.

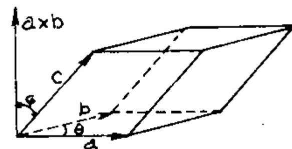
Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι τοῦτο ἔχει τάς κάτωθι ἰδιότητας:

Ἐάν $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ καί $c=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ τότε:

i) $$a\cdot b\times c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

ii) $$a\cdot b\times c = a\times b\cdot c$$

Ἤδη ἄς δώσωμεν μίαν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν τοῦ μικτοῦ γινομένου: Ἔστωσαν τά διανύσματα a, b, c καί τό ἐξωτερικόν γινόμενον $a\times b$ τῶν a καί b (βλ. Σχ. 3) Ὡς γνωστόν ἔχομεν: $a\times b\cdot c = |a\times b|\cdot|c|\,\text{συνφ} = |a|\cdot|b|\cdot|\text{ημθ}|\cdot|c|\,\text{συνφ}$. Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου πού σχηματίζουν τά a, b, c εἶναι $|a|\cdot|b|\cdot|\text{ημθ}|$ καί τό ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι $|c|\,\text{συνφ}$. Ὅθεν, τό ἀνωτέρω μικτόν γινόμενον παριστᾷ τόν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου πού ἔχει ἀκμάς τά διανύσματα a, b, c.



Σχ. 3

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι:

i) Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τά διανύσματα a, b, c εἶναι συνεπίπεδα εἶναι $(a,b,c)=0$, δηλ. τό μικτόν γινόμενον νά εἶναι μηδέν.

ii) Διά τά διανύσματα a, b, c εἴτε εἶναι συνεπίπεδα εἴτε ὄχι ἔχομεν:

$$(a,b,c)=(b,c,a)=(c,a,b)=-(b,a,c)=-(a,c,b)=-(c,b,a).$$

§ 2. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

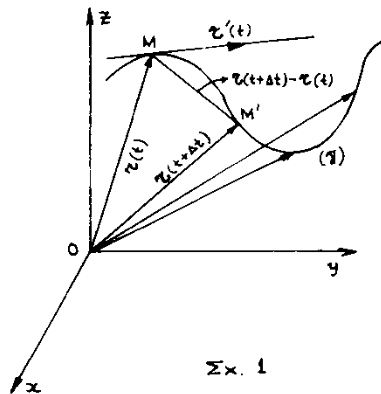
Εἶναι πρόσφορον νά ὁρίσωμεν καμπύλας τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$ μέσω συναρτήσεων λαμβανούσας διανυσματικάς τιμάς (διανυσματικαί συναρτήσεις).

<u>Ὁρισμός IX-2-1</u>. *Ἔστω ὅτι διά κάθε* $t \in [\alpha, \beta]$ *ἀντιστοιχεῖ τό διάνυσμα* $\tau(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$. *Αὐτό τό διάνυσμα καλεῖται διανυσματική συνάρτησις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς* t

Τοῦ t μεταβαλομένου εἰς τό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τό πέρας τοῦ διανύσματος $\tau(t)$ ἔχοντος ἀρχήν τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων διαγράφει μίαν καμπύλην (γ) εἰς τόν χῶρον (γραφική παράστασις τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως), ἥτις καλεῖται *ὁδογράφος* τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\tau(t)$ (βλ. Σχ. 1).

Ἡ σχέσις $\tau = \tau(t)$, ὅπου $\tau(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ καλεῖται *παραμετρική (διανυσματική) ἐξίσωσις* τῆς καμπύλης (γ).

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ μεταβλητή t παριστᾶ τόν χρόνον, τότε ἡ ὁδογράφος *εἶναι ἡ τροχιά* τῆς κινήσεως ἑνός σημείου.



Σχ. 1

Ἄς θεωρήσωμεν τό σταθερόν διάνυσμα $R = \alpha i + \beta j + \gamma k$. <u>Θά λέγωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι τό ὅριον διά</u> $t \to t_0$ <u>τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως</u> $\tau(t)$, <u>ἐάν</u>

$$\lim_{t \to t_0} \| \tau(t) - R \| = 0 \quad (1).$$

Ἡ σχέσις (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τάς σχέσεις:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \alpha, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \beta, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = \gamma.$$

• Ἔστω ἡ διανυσματική συνάρτησις $\tau(t)$ καί (γ) ἡ παριστωμένη ὑπό ταύτης καμπύλη τοῦ χώρου (βλ. Σχ. 1). Θεωροῦμεν δύο τιμάς τῆς μεταβλητῆς t, ἔστωσαν αἱ t καί $t + \Delta t$ καί ἔστωσαν M καί M' τά ἀντίστοιχα πρός αὐτάς σημεῖα. Σχηματίζομεν τόν λόγον:

$$\frac{\tau(t+\Delta t) - \tau(t)}{\Delta t} \qquad (2)$$

Ὁ λόγος (2) παριστᾶ ἕνα διάνυσμα παράλληλον πρός τήν χορδήν $\overrightarrow{MM'}$. Ἐάν ὑπάρχῃ τό $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$, τοῦτο καλεῖται ***παράγωγος*** τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\mathbf{r}(t)$ διά τήν τιμήν t καί συμβολίζεται οὕτω: $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ ἤ $\mathbf{r}'(t)$.

Ἡ παράγωγος αὐτή εἶναι, προφανῶς, ἕνα διάνυσμα ἔχον τήν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης (γ) εἰς τό σημεῖον M, ὅπερ καλεῖται ***ἐφαπτομενικόν διάνυσμα*** τῆς καμπύλης εἰς τό σημεῖον M.

Ἐάν τό t παριστᾷ τόν χρόνον, τότε ἡ $\mathbf{r}'(t)$, ἐξ ὁρισμοῦ, καλεῖται ***ταχύτης*** τοῦ κινητοῦ ἐπί τῆς τροχιᾶς (γ).

Ἐάν $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, τότε συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τῆς παραγώγου τῆς $\mathbf{r}(t)$, θά ἔχωμεν:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\cdot\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k} \qquad (3)$$

Τό διάνυσμα $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ καθορίζεται πλήρως ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ διά τήν τιμήν t.

Γενικῶς δέ θά ἔχωμεν: $\frac{d^n\mathbf{r}(t)}{dt^n} = \frac{d^n x(t)}{dt^n}\cdot\mathbf{i} + \frac{d^n y(t)}{dt^n}\cdot\mathbf{j} + \frac{d^n z(t)}{dt^n}\cdot\mathbf{k} \quad (4)$

δηλ. <u>ἡ διαφόρισις μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως ἀνάγεται εἰς τήν διαφόρισιν τῶν συντεταγμένων της.</u>

Διά τήν διαφόρισιν μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως ἰσχύουν οἱ κάτωθι κανόνες:

i) $\quad \frac{d}{dt}\left\{ f(t)\cdot\mathbf{r}(t)\right\} = \frac{df(t)}{dt}\cdot\mathbf{r}(t) + f(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$

ii) $\quad \frac{d}{dt}\left\{ \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)\right\} = \frac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt}\cdot\mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}_2(t)}{dt}$

iii) $\quad \frac{d}{dt}\left\{ \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)\right\} = \frac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt}\times\mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t)\times\frac{d\mathbf{r}_2(t)}{dt}$,

ὅπου $f(t)$ πραγματική συνάρτησις καί $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ διανυσματικαί συναρτήσεις.

<u>Τό μῆκος τόξου ὡς παράμετρος.</u>

Ἔστω ἡ καμπύλη (γ) μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\cdot\mathbf{k},\ t\in I.$$

Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν:

$$\ell = \ell(t) = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\tau(t)}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (1)$$

Προφανῶς ἐάν $t \geq t_0$, τότε καί $\ell \geq 0$. Ἐάν $t < t_0$, τότε εἶναι $\ell < 0$. Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ἰσοῦται μέ τό μῆκος τοῦ τόξου τοῦ τμήματος τῆς καμπύλης μεταξύ τῶν τιμῶν t_0 καί t_1.

Εἶναι ἐξ ἄλλου γνωστόν ὅτι: $\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\tau(t)}{dt}\right| dt = \left|\frac{d\tau(t)}{dt}\right| = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$.

Ὅθεν:

$$\boxed{\frac{d\ell}{dt} = \left|\frac{d\tau(t)}{dt}\right|} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\ell = \ell(t)$ εἶναι μία ~~παρα~~ ἀποδεκτή ἀλλαγή τῆς παραμέτρου t ἐπί τοῦ I. Οὕτω, τό μῆκος ℓ τοῦ τόξου μιᾶς καμπύλης δύναται νά εἰσαχθῇ ὡς μία παράμετρος τῆς διανυσματικῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης.

Ἀπό τον τύπον (1) καθίσταται φανερόν ὅτι, ἡ ὁριζομένη συνάρτησις $\ell = \ell(t)$ ἐξαρτᾶται καί ἀπό τό ἀρχικόν σημεῖον t_0. Ἑπομένως μιά παράστασις τῆς καμπύλης μέ παράμετρον τό μῆκος τοῦ τόξου αὐτῆς δέν εἶναι μοναδική, ἀλλά ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀρχήν πού θά μετρᾶται τό μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης καθώς καί ἀπό τόν προσανατολισμόν αὐτῆς, καθότι δυνάμεθα νά λάβωμεν:

$$\ell = \ell(t) = \int_{t}^{t_0} \left|\frac{d\tau(t)}{dt}\right| dt = -\int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\tau(t)}{dt}\right| dt$$

Τέλος ἐάν $\tau = \tau(\ell)$, $\ell \in I_\ell$ εἶναι ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρός μίαν παράμετρον ℓ, αὐτή θά καλῆται ***φυσική παράστασις*** τῆς καμπύλης, ἐάν $\left|\frac{d\tau(\ell)}{d\ell}\right| = 1$, τό δέ ℓ καλεῖται ***φυσική παράμετρος*** τῆς καμπύλης.

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τό κάτωθι:

Θεώρημα IX - 2-1. Ἐάν $\tau = \tau(\ell)$ εἶναι μία φυσική παράστασις τῆς καμπύλης τότε:

i) Τό $|\ell_1 - \ell_2|$ εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου αὐτῆς μεταξύ τῶν σημείων $\tau(\ell_1)$ καί $\tau(\ell_2)$

ii) Ἐάν $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^*(\ell^*)$ εἶναι μία ἄλλη φυσική παράστασις τῆς καμπύλης, τότε $\ell=\pm\ell^*+c$, c σταθερά.

iii) Ἐάν $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^*(t)$ εἶναι μία ἄλλη παράστασις τῆς καμπύλης μέ τόν αὐτόν προσανατολισμόν μέ τήν $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(\ell)$, τότε $\frac{d\ell}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|$, ἐάν δέ εἶναι ὁ ἀντίθετος προσανατολισμός, τότε $\frac{d\ell}{dt}=-\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|$.

Ἄς σημειωθῇ ὅτι, ἐάν ἡ $\ell=\ell(t)$ ὁρίζεται ὑπό τοῦ τύπου (1), τότε ἡ $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(t(\ell))$ εἶναι μία φυσική παράστασις τῆς καμπύλης.

Πράγματι: $\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\ell}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|:\left|\frac{d\ell}{dt}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|:\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|=1.$

Παράδειγμα: Νά εἰσαχθῇ τό μῆκος τοῦ τόξου ὡς παράμετρος τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης: $\boldsymbol{\tau}=(e^t\,\text{συν}t)\cdot\mathbf{i}+(e^t\,\text{ημ}t)\cdot\mathbf{j}+e^t\cdot\mathbf{k},\ -\infty<t<+\infty.$

Λύσις: Ἔχομεν: $\ell=\int_0^t\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|dt=\int_0^t\left[e^{2t}(-2\,\text{συν}t\,\text{ημ}t+1)+e^{2t}(2\,\text{συν}t\,\text{ημ}t+1)+e^{2t}\right]^{1/2}dt=$

$=\sqrt{3}\int_0^t e^t dt=\sqrt{3}\,(e^t-1).$

Ἐπιλύοντες τήν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρός t εὑρίσκομεν: $t=\log(\ell/\sqrt{3}+1),\ -\sqrt{3}<\ell<+\infty.$

Ἄρα ἡ φυσική παράστασις τῆς καμπύλης εἶναι $\boldsymbol{\tau}=(\ell/\sqrt{3}+1)\left[\text{συν}\log(\ell/\sqrt{3}+1)\,\mathbf{i}+\text{ημ}\log(\ell/\sqrt{3}+1)\cdot\mathbf{j}+\mathbf{k}\right]$

Ἐάν λοιπόν λάβωμεν ὡς παράμετρον τῆς ἐξισώσεως μιᾶς καμπύλης τό μῆκος τοῦ τόξου αὐτῆς, ἤτοι $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(\ell)$, τότε σύμφωνα πρός τ' ἀνωτέρω $\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\ell}\right|=1$. Θά συμβολίζωμεν δέ μέ τό $\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\ell}$ καί θά εἶναι $|\boldsymbol{\tau}|=1$, ἤτοι τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα $\boldsymbol{\tau}$ τῆς καμπύλης ἔχει μοναδιαῖον μῆκος.

Εἰς τό ἑξῆς ὅταν λαμβάνωμεν τάς παραγώγους τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως ὡς πρός τό τόξον ℓ αὐτῆς, θά τάς συμβολίζωμεν συντόμως οὕτω: $\dot{\boldsymbol{\tau}}, \ddot{\boldsymbol{\tau}}, \dddot{\boldsymbol{\tau}}$, κ.τ.λ. πρώτη, δευτέρα, τρίτη, κ.τ.λ. παράγωγος. Ἐνῶ ἐάν λαμβάνωμεν τάς παραγώγους ὡς πρός μίαν ἄλλην μεταβλητήν t, θά τάς συμβολίζωμεν συντόμως οὕτω: $\boldsymbol{\tau}'(t), \boldsymbol{\tau}''(t)\ \boldsymbol{\tau}'''(t)$ κ.τ.λ.

Πρότασις IX-2-2. Ἐάν ἡ διανυσματική συνάρτησις $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(t)$ ἔχῃ σταθερόν μέτρον, τότε τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα $\frac{d\boldsymbol{\tau}(t)}{dt}$ εἶναι κάθετον εἰς τήν διανυσματικήν ἀκτῖνα $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(t)$.

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν $|\boldsymbol{\tau}(t)|=c$ ἤ $\boldsymbol{\tau}(t)\cdot\boldsymbol{\tau}(t)=c^2$ (1). Διά παραγωγίσεως τῆς (1) ὡς πρός t λαμβάνομεν:

$\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$ ἤ $\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=0$. Ὅθεν, ἡ διανυσματική συνάρτησις $\boldsymbol{\tau}(t)$ εἶναι κάθετος πρός τήν $\frac{d\boldsymbol{\tau}(t)}{dt}$, δηλ. τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα $\frac{d\boldsymbol{\tau}(t)}{dt}$.

<u>Ὁλοκλήρωμα μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως</u>:

Ἔστω ἡ διανυσματική συνάρτησις $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $a\le t\le \beta$. Ἐκτελοῦμεν εἰς τό διάστημα $a\le t\le\beta$ μίαν διαμέρισιν Φ καί ἐν συνεχείᾳ σχηματίζομεν τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα:

$$\sum_{\rho=1}^{n} \boldsymbol{r}(\tau_\rho)\cdot(t_\rho - t_{\rho-1}) \qquad (1)$$

ὅπου $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$ καί $t_{\rho-1}<\tau_\rho<t_\rho$. Ἐάν τό $\max\limits_{1\le\rho\le n}\Delta t_\rho\to 0$, τοῦ $n\uparrow\infty$ $(\Delta t_\rho=t_\rho-t_{\rho-1})$ καί ἐάν τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα (1) τείνῃ πρός ἕνα πεπερασμένον ὅριον (διάνυσμα) τοῦτο (τό ὅριον) ἐξ ὁρισμοῦ καλεῖται *ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ *ἐπί τοῦ* $[a,\beta]$ καί συμβολίζεται οὕτω: $\int_a^\beta \boldsymbol{r}(t)dt$. Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\int_a^\beta \boldsymbol{r}(t)dt \underset{\text{ὁρ.}}{=} \lim_{\substack{\max\Delta t_\rho\to 0\\ 1\le\rho\le n\\ n\to+\infty}} \sum_{\rho=1}^{n}\boldsymbol{r}(\tau_\rho)\,\Delta t_\rho \qquad (2)$$

Ἐάν, $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\cdot \boldsymbol{i}+y(t)\cdot\boldsymbol{j}+z(t)\,\boldsymbol{k}$, τότε λόγῳ τῆς (2) ἔχομεν:

$$\int_a^\beta \boldsymbol{r}(t)dt=\left(\int_a^\beta x(t)dt\right)\boldsymbol{i}+\left(\int_a^\beta y(t)dt\right)\cdot\boldsymbol{j}+\left(\int_a^\beta z(t)dt\right)\cdot\boldsymbol{k} \qquad (3)$$

Αἱ συνήθεις ἰδιότητες τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ἰσχύουν καί ἐδῶ π.χ

$$\int_a^\beta u'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)dt=\Big[u(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)\Big]_a^\beta-\int_a^\beta u(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)dt \quad \text{κ.τ.λ.}$$

§ 3. <u>ΤΡΙΕΔΡΟΝ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ FRENET</u>

Θεωροῦμεν τήν καμπύλην (γ) μέ ἐξίσωσιν, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\ell)$ (1) ὅπου ℓ τόμηκος τοῦ τόξου αὐτῆς. Εἰς κάθε σημεῖον Μ αὐτῆς (ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν τιμήν τοῦ ℓ) τό μοναδιαῖον ἐφαπτομενικόν διάνυσμα:

$$\boldsymbol{\tau}=\dot{\boldsymbol{r}}(\ell) \qquad (2)$$

προσδιορίζει τήν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης ἐπί τῆς καμπύλης. Τό διάνυσμα $\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}$, συμφώνως πρός τήν Πρότασιν IX - 2-2, εἶναι κάθετον πρός τό $\boldsymbol{\tau}$. Συνεπῶς τό μοναδιαῖον διάνυσμα $\boldsymbol{\nu}$ ἐπί τῆς διευθύνσεως τοῦ $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ θά παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

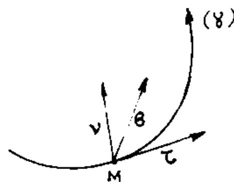
$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}}{|\dot{\boldsymbol{\tau}}|}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|} \qquad (3)$$

Προφανῶς τό $\boldsymbol{\nu}$ εἶναι κάθετον πρός τό $\boldsymbol{\tau}$.

Ἐπί πλέον θεωροῦμεν καί τό διάνυσμα:

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu} \qquad (4)$$

Τά διανύσματα τ, ν καί β σχηματίζουν ἕνα τρίεδρον μέ ἀνά δύο κάθετα μοναδιαῖα διανύσματα, τό ὁποῖον καλεῖται ***συνοδεῦον τρίεδρον τοῦ*** Frenet (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

Ἐκ τοῦ τύπου (4) ἕπεται ὅτι :

$$\nu \times \beta = \tau \quad \text{καί} \quad \beta \times \tau = \nu \quad (5)$$

Τά διανύσματα τ, ν καί β καλοῦνται ***πρωτεύοντα διανύσματα*** καί προσδιορίζουν ἀντιστοίχως τάς διευθύνσεις τῶν εὐθειῶν πού διέρχονται ἀπό τό σημεῖον M τῆς καμπύλης καί αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ***ἐφαπτομένη, πρώτη κάθετος*** καί ***δευτέρα κάθετος*** τῆς καμπύλης.

Τό ἐπίπεδον τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς αης καθέτου καλεῖται ***ἐγγύτατον ἐπίπεδον*** τῆς γραμμῆς, τό ἐπίπεδον τῆς αης καί τῆς βας καθέτου καλεῖται ***κάθετον ἐπίπεδον*** καί τό ἐπίπεδον τῆς βας καθέτου καί τῆς ἐφαπτομένης καλεῖται ***εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον***.

Ὡς γνωστόν, ἡ διανυσματική ἐξίσωσις μιᾶς εὐθείας διερχομένης διά τοῦ σημείου M ἀντιστοιχοῦντος εἰς τήν διανυσματικήν ἀκτῖνα τ_0 καί παραλλήλου πρός τό διάνυσμα a εἶναι :

$$u = \tau_0 + \lambda \cdot a \,, \; -\infty < \lambda < +\infty \qquad (i)$$

Ἄς εὕρωμεν ἤδη τάς διανυσματικάς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης, αης καθέτου καί βας καθέτου τῆς καμπύλης $\tau = \tau(e)$.

Αἱ ἐξισώσεις, προφανῶς, εἶναι αἱ κάτωθι :

α). $u = \tau_0 + \lambda \dot{\tau}_0$ (ἐφαπτομένης) (ii)

β). $u = \tau_0 + \lambda \cdot \ddot{\tau}_0$ (αης καθέτου) (iii)

γ) $u = \tau_0 + \lambda \cdot \dot{\tau}_0 \times \ddot{\tau}_0$ (βας καθέτου) (iv)

Ὡσαύτως εἶναι γνωστόν ἐκ τοῦ Διανυσματικοῦ Λογισμοῦ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἑνός ἐπιπέδου διερχομένου διά τοῦ σημείου τ_0 καί καθέτου πρός τό διάνυσμα a εἶναι :

$$(u - \tau_0) \cdot a = 0 \qquad (v)$$

Ἄς εὕρωμεν ἤδη τάς ἐξισώσεις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου, τοῦ καθέτου ἐπιπέδου καί τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου τῆς καμπύλης $\tau = \tau(e)$.

Αἱ ἐξισώσεις, προφανῶς, εἶναι αἱ κάτωθι:

δ) $(\mathbf{u}-\boldsymbol{\tau}_o)\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}_o = 0$ (κάθετον ἐπίπεδον) (vi)

ε) $(\mathbf{u}-\boldsymbol{\tau}_o)\cdot\ddot{\boldsymbol{\tau}}_o = 0$ (εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον) (vii)

στ) $(\mathbf{u}-\boldsymbol{\tau}_o)\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}_o\times\ddot{\boldsymbol{\tau}}_o=0$ (ἐγγύτατον ἐπίπεδον) (viii) [1]

Ἐάν π.χ. $\mathbf{u}=(X,Y,Z)$, ὡς πρός ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων καί $\boldsymbol{\tau}_o=(x_o,y_o,z_o)$, τότε ἡ ἀναλυτική ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (viii), θά εἶναι:

$$\begin{vmatrix} X-x_o & Y-y_o & Z-z_o \\ \dot{x}_o & \dot{y}_o & \dot{z}_o \\ \ddot{x}_o & \ddot{y}_o & \ddot{z}_o \end{vmatrix} = 0$$

• Ἡ κίνησις τοῦ συνοδεύοντος τριέδρου ἐπί τῆς καμπύλης εἰδικεύεται εἰς τό νά μελετήσωμεν τήν ταχύτητα μεταβολῆς τῶν διανυσμάτων $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}$ καί $\boldsymbol{\beta}$, δηλ. εἰς τό νά μελετήσωμεν τάς παραγώγους τῶν ἀνωτέρω διανυσμάτων ὡς πρός τό τόξον ℓ.

Ἐπειδή τό $\boldsymbol{\nu}$ εἶναι μοναδιαῖον ἐπί τοῦ $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ θά ἔχωμεν:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}}{|\dot{\boldsymbol{\tau}}|} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}$$

Θέτοντες δέ, $|\ddot{\boldsymbol{r}}| = |\dot{\boldsymbol{\tau}}| = k$, ὅπου k μή ἀρνητικός ἀριθμός, θά ἔχωμεν:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\tau}} = k\cdot\boldsymbol{\nu}} \qquad (6)$$

Ὁ ἀριθμός k καλεῖται *καμπυλότης* τῆς καμπύλης εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον Μ. Ὁ δέ ἀριθμός $R=\frac{1}{k}$ καλεῖται *ἀκτίς καμπυλότητος* τῆς καμπύλης εἰς τό σημεῖον Μ.

Ἐξ ἄλλου $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}$ καί $\dot{\boldsymbol{\beta}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\tau}\times\dot{\boldsymbol{\nu}} = k\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\tau}\times\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}+\boldsymbol{\tau}\times\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\tau}\times\dot{\boldsymbol{\nu}}$.

Ὅθεν, τό $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ εἶναι κάθετον πρός τό $\boldsymbol{\tau}$. Ἐξ ἄλλου τό $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ εἶναι κάθετον πρός τό $\boldsymbol{\beta}$ (καθ' ὅσον τό $\boldsymbol{\beta}$ εἶναι μοναδιαῖον). Εἶναι ὅμως τό $\boldsymbol{\nu}$ κάθετον πρός τό $\boldsymbol{\beta}$ καί $\boldsymbol{\tau}$. Ἄρα τά διανύσματα $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ καί $\boldsymbol{\nu}$ εἶναι συγγραμμικά καί κατά συνέπειαν δυνάμεθα νά θέσωμεν:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\sigma\cdot\boldsymbol{\nu}} \qquad (7)$$

ὅπου σ πραγματικός ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμός σ καλεῖται <u>στρέψις</u> τῆς καμπύλης εἰς τό Μ, ὁ δέ ἀριθμός $\frac{1}{\sigma}=\rho$

[1]) Αἱ ἐξισώσεις i) ἕως viii δέν ἀλλάσσουν μορφήν εἴτε ἡ καμπύλη ἀναφέρεται εἰς τήν φυσικήν της παράμετρον εἴτε εἰς τυχοῦσαν παράμετρον.

καλεῖται *ἀκτίς στρέψεως* τῆς καμπύλης εἰς τό Μ.

Τέλος ἄς παραγωγίσωμεν τό διάνυσμα $\mathbf{v} = \mathbf{\beta} \times \mathbf{\tau}$.

Ἔχομεν $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{\beta}} \times \mathbf{\tau} + \mathbf{\beta} \times \dot{\mathbf{\tau}} = -\sigma \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{\tau} + \mathbf{\beta} \times k\mathbf{v} = \sigma\mathbf{\beta} - k\mathbf{\tau}$.

Ὅθεν:

$$\boxed{\dot{\mathbf{v}} = -k\,\mathbf{\tau} + \sigma \cdot \mathbf{\beta}} \qquad (8)$$

Οἱ τύποι (6), (7) καί (8) καλοῦνται *τύποι τοῦ Frenet*.

Θά ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐάν ἡ καμπύλη ἔχῃ τήν διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ἔνθα t τυχοῦσα παράμετρος καί ἡ καμπύλη ἔχῃ τόν αὐτόν προσανατολισμόν μέ τήν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$, τότε τά πρωτεύοντα διανύσματα $\mathbf{\tau}, \mathbf{v}, \mathbf{\beta}$ παρέχονται ὑπό τῶν τύπων:

$$\boxed{\mathbf{\tau} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{v} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| \cdot |\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{\beta} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}} \qquad (9)$$

Πράγματι, $\mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{r}}{d\ell} \cdot \dfrac{d\ell}{dt} = \dot{\mathbf{r}}\,\dfrac{d\ell}{dt} = \mathbf{\tau} \cdot |\mathbf{r}'|$,

διότι $\quad |\mathbf{r}'| = \dfrac{d\ell}{dt}$. Ὅθεν, $\mathbf{\tau} = \dfrac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$.

Ἐξ ἄλλου $\mathbf{r}'' = \dfrac{d\mathbf{r}'}{dt} = \dfrac{d\left(\dot{\mathbf{r}}\frac{d\ell}{dt}\right)}{dt} = \dfrac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \cdot \dfrac{d\ell}{dt} + \dot{\mathbf{r}}\,\dfrac{d^2\ell}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}\left(\dfrac{d\ell}{dt}\right)^2 + \dot{\mathbf{r}}\,\dfrac{d^2\ell}{dt^2}$

Ὅθεν, $\quad \mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}\left(\dfrac{d\ell}{dt}\right)^2 + \dot{\mathbf{r}}\,\dfrac{d^2\ell}{dt^2}$. Εἶναι δέ καί $\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}\,\dfrac{d\ell}{dt}$ καί διά πολλαπλασιασμοῦ ἐξωτερικῶς τῶν δύο τελευταίων σχέσεων λαμβάνομεν:

$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\left(\dfrac{d\ell}{dt}\right)^3$. Ἐπειδή $\dfrac{d\ell}{dt} > 0$, τά διανύσματα $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ καί $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = k \cdot \mathbf{\beta}$ εἶναι ὁμόρροπα. Ὅθεν, δυνάμεθα νά θέσωμεν: $\mathbf{\beta} = \dfrac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}$.

Τέλος τό $\mathbf{v} = \mathbf{\beta} \times \mathbf{\tau} = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| \cdot |\mathbf{r}'|}$.

<u>**Πρότασις IX-3-1.**</u> <u>Ἐάν $\Delta\theta$ εἶναι ἡ γωνία μεταξύ τῶν διευθύνσεων τῶν ἐφαπτομενικῶν διανυσμάτων</u> $\dot{\mathbf{r}}(\ell)$ <u>καί</u> $\dot{\mathbf{r}}(\ell + \Delta\ell)$, <u>τότε δείξατε ὅτι</u> $k = \lim\limits_{\Delta\ell \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta\ell}$.

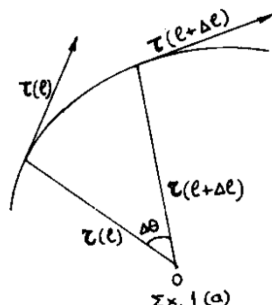
<u>**Ἀπόδειξις:**</u> Ἐπειδή τό $\mathbf{\tau}$ εἶναι μοναδιαῖον διάνυσμα τό μέτρον $|\mathbf{\tau}(\ell + \Delta\ell) - \mathbf{\tau}(\ell)|$

εἶναι ἡ βάσις του ἰσοσκελοῦς τριγώνου, βλ. Σχ. 1 (β), τοῦ ὁποίου τὰ μέτρα τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἴσα πρὸς τὴν μονάδα.

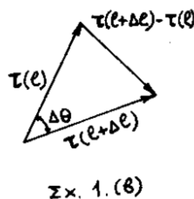
Θὰ ἔχωμεν λοιπόν: $|\tau(\ell+\Delta\ell)-\tau(\ell)|=2\eta\mu\frac{\Delta\theta}{2}=$

$=2\cdot\frac{\Delta\theta}{2}-\frac{2}{3!}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^3\sigma\upsilon\nu\xi=\Delta\theta-\frac{1}{12}(\Delta\theta)^3\sigma\upsilon\nu\xi$ (1),

ὅπου $0\leq\xi\leq\frac{\Delta\theta}{2}$. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς καμπυλότητος καὶ λόγῳ τῆς (1), θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 1 (α)



Σχ. 1. (β)

$$K=|\dot{\tau}|=\left|\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\tau(\ell+\Delta\ell)-\tau(\ell)}{\Delta\ell}\right|=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\ell}-\frac{1}{24}\cdot\lim_{\Delta\ell\to 0}\left[\frac{(\Delta\theta)^3}{\Delta\ell}\cdot\sigma\upsilon\nu\xi\right]\ (2)$$

καὶ ἐπειδὴ τοῦ $\Delta\ell\to 0$ θὰ τείνῃ καὶ τὸ $\Delta\theta(\ell)\to 0$, συνεπῶς $\lim_{\Delta\ell\to 0}\left[\frac{(\Delta\theta)^3}{\Delta\ell}\sigma\upsilon\nu\xi\right]=0$.

Ὅθεν, λόγῳ τῆς (2), $K=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\ell}$.

Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν Μηχανικήν.

Ἔστω $\tau=\tau(t)$ εἶναι ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς τροχιᾶς ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου, ὅπου t παριστᾷ τὸν χρόνον. Ὡς γνωστὸν ἡ ταχύτης τῆς κινήσεως αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$V(t)=\frac{d\tau(t)}{dt}\qquad(1)$$

Ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$V(t)=\frac{d\tau}{d\ell}\cdot\frac{d\ell}{dt}=\tau\cdot\frac{d\ell}{dt}\qquad(2)$$

Ἐπειδὴ τὸ τ εἶναι μοναδιαῖον διάνυσμα ἐπὶ τῆς ἀψ καθέτου θὰ εἶναι $|\tau|=1$ καὶ ἐκ τοῦ (2) λαμβάνομεν:

$$|V(t)|=\frac{d\ell}{dt}\qquad(3)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ὑλικοῦ σημείου παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

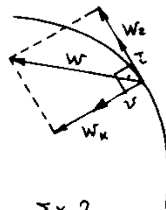
$$W=\frac{d^2\tau}{dt^2}\qquad(4)$$

Ἡ (4) γράφεται:

$$W=\frac{d^2\tau}{d\ell^2}\left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2+\tau\cdot\frac{d^2\ell}{dt^2}\qquad(5)$$

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον (6) τοῦ Frenet ὁ (5) γράφεται:

$$W = \tau \frac{d^2\ell}{dt^2} + \nu \cdot k \cdot \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 \quad (6)$$



Σχ. 2

Οὕτω ἡ ἐπιτάχυνσις ἀνελύθη εἰς ἕνα ἄθροισμα τῶν $\tau \cdot \frac{d^2\ell}{dt^2}$ καί $\nu \cdot k \cdot \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2$ κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς αὐτ' καθέτου (βλ. Σχ. 2) καί αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ἀντιστοίχως ***ἐφαπτομενική ἐπιτάχυνσις καί κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις***. Ἤτοι:

$$W = W_\varepsilon + W_k \quad (7)$$

Εἶναι δέ,

$$W_\varepsilon = \tau \frac{d^2\ell}{dt^2} = \tau \frac{d\upsilon}{dt} \quad \text{καί} \quad |W_\varepsilon| = \frac{d\upsilon}{dt}$$

ὁμοίως:

$$W_k = \nu \cdot k \cdot \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 = \nu \cdot k \cdot \upsilon^2$$

Ὅθεν ὁ (7) γράφεται:

$$W = \tau \cdot \frac{d\upsilon}{dt} + \nu \cdot k \cdot \upsilon^2 \quad (8)$$

Εἰδικῶς, ἐάν $\upsilon = \upsilon_0$ (σταθερόν) καί ἡ καμπύλη εἶναι περιφέρεια κύκλου, ὅτε $k = \frac{1}{R}$, τότε ἐκ τοῦ (8) λαμβάνομεν:

$$|W| = \frac{\upsilon_0^2}{R}.$$

__Θεώρημα IX-3-1__. __Ἐάν κατά μῆκος τῆς καμπύλης__ $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\ell)$ __ἡ καμπυλότης αὐτῆς εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴση πρός τό μηδέν, δηλ.__ $k \equiv 0$, __τότε ἡ καμπύλη εἶναι εὐθεῖα γραμμή καί ἀντιστρόφως__.

__Ἀπόδειξις__: Ἐφ' ὅσον $k \equiv 0$ ἕπεται ἐκ τοῦ τύπου (6) τοῦ Frenet ὅτι $\dot{\tau} = \theta$ ἐξ ἧς $\tau = a \neq \theta$. Εἶναι ὅμως $\tau = \dot{\mathfrak{r}}(\ell)$, συνεπῶς $\dot{\mathfrak{r}}(\ell) = a$.

Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ὡς πρός ℓ λαμβάνομεν $\mathfrak{r} = a \cdot \ell + b$, ἔνθα b = σταθερά. Ἡ τελευταία διανυσματική ἐξίσωσις προφανῶς παριστᾶ εὐθεῖαν γραμμήν διερχομένην ἀπό τό σημεῖον $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ καί παραλλήλου πρός τό διάνυσμα $a = (a_1, a_2, a_3)$.

__Ἀντιστρόφως__: Ἔστω ἡ εὐθεῖα γραμμή $\mathfrak{r} = at + b$, $a \neq \theta$.

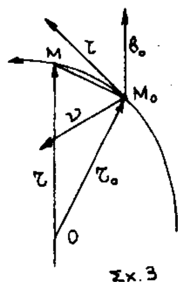
Εἶναι $\tau = \dot{\mathfrak{r}}(\ell) = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\ell} = a \cdot \frac{dt}{d\ell}$. Εἶναι δέ,

$$1 = |\tau| = |a| \cdot \left|\frac{dt}{d\ell}\right|, \text{ ἐξ ἧς } \frac{dt}{d\ell} = \frac{\pm 1}{|a|} = \lambda \text{ (σταθερά)}$$

Ὅθεν, $\boldsymbol{\tau} = \lambda \cdot \mathbf{a}$ καί $k = |\dot{\boldsymbol{\tau}}| = \left|\frac{d}{d\ell}(\lambda \cdot \mathbf{a})\right| = 0$

Θεώρημα IX-3-2. Ἐάν κατά μῆκος τῆς καμπύλης $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\ell)$ ἡ στρέψις αὐτῆς εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, δηλ. $\sigma = 0$, τότε ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος καί ἀντιστρόφως

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν $\sigma = 0$, τότε ἐκ τοῦ τύπου (7) τοῦ Frenet λαμβάνομεν $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$ ἐξ ἧς $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$ (σταθερόν).



Ἐξ ἄλλου $\frac{d}{d\ell}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta}_0) = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\ell} \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = 0$, διότι $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{\beta}_0$.

Ὅθεν, $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = c$ (σταθερόν).

Ἔστω ὅτι εἰς τά σημεῖα M_0 καί M τῆς καμπύλης ἀντιστοιχοῦν αἱ διανυσματικαί ἀκτῖνες $\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\tau}$ (βλ. Σχ. 3). Ἄς σχηματίσωμεν τό ἐσωτερικόν γινόμενον:

$\overrightarrow{M_0M} \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_0) \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta}_0 - \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = c - c = 0$. Ὅθεν $\overrightarrow{M_0M} \perp \boldsymbol{\beta}_0$ ($\boldsymbol{\beta}_0$: σταθερόν).

Ἄρα τά M δηλ. τά σημεῖα τῆς καμπύλης κεῖνται ἐπί ἑνός ἐπιπέδου.

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Παρατήρησις: Ἐάν ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος, τότε αὐτή κεῖται ὁλόκληρος ἐπί τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου ταύτης τό ὁποῖον παραμένει ἀμετάβλητον.

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τό κάτωθι θεμελειώδες θεώρημα τῆς διαφορικῆς Γεωμετρίας

Θεώρημα IX-3-3. Ἔστωσαν $k(\ell)$ καί $\sigma(\ell)$ δύο αὐθαίρετοι συναρτήσεις ὡρισμέναι ἐπί τοῦ διαστήματος $a \leq \ell \leq b$. Τότε ὑπάρχει εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^3$ μία, καί μόνον μία, καμπύλη (γ) διά τήν ὁποίαν ἡ $k(\ell)$ εἶναι ἡ καμπυλότης καί ἡ $\sigma(\ell)$ εἶναι ἡ στρέψις καί ℓ εἶναι μία φυσική παράμετρος κατά μῆκος τῆς (γ).

Παρατήρησις: Ὁ προσδιορισμός τῆς ἀνωτέρω καμπύλης εἶναι ἕν πρόβλημα, τό ὁποῖον παρουσιάζει ἀρκετάς δυσκολίας. Πάντως τοῦτο ἁπλοποιεῖται σημαντικά εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $\sigma = 0$, δηλ. ὅταν ἔχωμεν ἐπίπεδον καμπύλην.

Πρόβλημα: Νά εὑρεθῇ ἡ καμπύλη τοῦ χώρου τῆς ὁποίας ἡ καμπυλότης εἶναι $k(\ell)$

και ἡ στρέψις $\sigma(\ell)\equiv 0$.

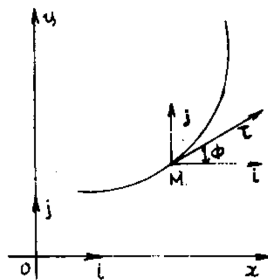
<u>Λύσις</u>: Ἔστω ϕ παριστᾷ τὴν γωνίαν τοῦ $\boldsymbol{\tau}$ μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x (βλ. Σχ. 4).

Θὰ ἔχωμεν: $\boldsymbol{\tau}=(\sigma\upsilon\nu\phi)\cdot i+(\eta\mu\phi)\cdot j \quad (1)$

Ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ $\boldsymbol{\nu}$ εἶναι ὀρθογώνιον πρὸς τὸ $\boldsymbol{\tau}$ θὰ ἔχωμεν:

$$\boldsymbol{\nu}=(\sigma\upsilon\nu(\phi+\pi/2))\cdot i+(\eta\mu(\phi+\pi/2))\,j \quad \text{ἤ}$$

$$\boldsymbol{\nu}=(-\eta\mu\phi)\cdot i+(\sigma\upsilon\nu\phi)\cdot j \quad (2)$$



Σχ. 4

Διαφορίζοντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}=\dot{\phi}\left[(-\eta\mu\phi)\cdot i+(\sigma\upsilon\nu\phi)\cdot j\right]=\dot{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu} \quad (3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=-\dot{\phi}\left[(\sigma\upsilon\nu\phi)\cdot i+(\eta\mu\phi)\cdot j\right]=-\dot{\phi}\boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

Οἱ τύποι (6) καὶ (8) τοῦ Frenet διὰ $\sigma=0$ γίνονται:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}=k\cdot\boldsymbol{\nu}\,,\quad \dot{\boldsymbol{\nu}}=-k\boldsymbol{\tau} \qquad (5)$$

Λόγῳ τῶν (5) ἐκ τῶν (3) ἢ (4) λαμβάνομεν:

$$\dot{\phi}=k\,,\ \text{ἐξ ἧς}\ \phi(\ell)=\int k(\ell)\,d\ell+C_1 \qquad (6)$$

Προσδιορισθείσης τῆς ϕ ἐκ τῆς (6), θὰ ἔχωμεν λόγῳ τῆς (1):

$$\mathbf{r}(\ell)=\int\boldsymbol{\tau}(\ell)\,d\ell+C_2=\int\left[(\sigma\upsilon\nu\phi(\ell))\cdot i+(\eta\mu\phi(\ell))\cdot j\right]d\ell+C_2 \quad (7)$$

ἤ

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(\ell)=\left(\int\sigma\upsilon\nu\phi(\ell)\,d\ell\right)i+\left(\int\eta\mu\phi(\ell)\,d\ell\right)\cdot j+C_2$$

Οὕτω εὑρέθη ἡ διαν. ἐξίσωσις τῆς καμπύλης.

Συμφώνως πρὸς τὸ Θεώρημα IX-3-3 ὅταν δοθοῦν αἱ ἐκφράσεις $k=k(\ell)$ καὶ $\sigma=\sigma(\ell)$ αὗται ἀνεξαρτήτως συστήματος συντεταγμένων ὁρίζουν μίαν καμπύλην εἰς τὸν χῶρον. Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις καλοῦνται ***φυσικαὶ ἢ συμφυεῖς ἐξισώσεις*** τῆς καμπύλης, τὰ δὲ μεγέθη k,σ,ℓ καλοῦνται ***φυσικαὶ συντεταγμέναι τῆς καμπύλης***. Ἀποδεικνύεται ὅτι, δύο καμπύλαι ἔχουσαι τὰς αὐτὰς φυσικὰς ἐξισώσεις εἶναι αἱ αὐταί, διαφέρουν μόνον κατὰ τὴν θέσιν των εἰς τὸν χῶρον.

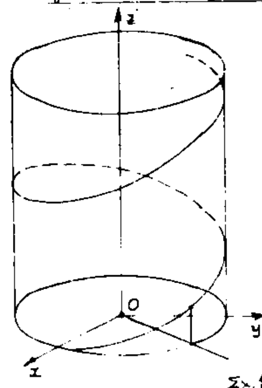
Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὴν ℓ μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων καταλήγομεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$\Phi(k,\sigma)=0$$

ἥτις καλεῖται ***χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις*** τῆς καμπύλης, διότι χαρακτηρίζει ἀπό

τινος ἀπόψεως τὴν ὑπ' ὄψιν καμπύλην (γ) ἢ ἀκριβέστερον μίαν κατηγορίαν καμπύλων περιλαμβάνουσα καὶ τὴν (γ).

Βάσει τῆς μορφῆς τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως ταξινομοῦμεν τὰς καμπύλας εἰς διαφόρους κατηγορίας, ὅπως π.χ. μία ἁπλουστάτη μορφὴ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ $\lambda\cdot k+\mu\cdot\sigma=0$, ἔνθα λ,μ σταθεραί. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $\lambda\cdot k+\mu\cdot\sigma=0$ ὁρίζει μίαν κατηγορίαν καμπύλων τῶν στερεῶν ἑλίκων, ἤτοι: τῶν καμπύλων αἵτινες τέμνουν ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν τὰς γενετείρας κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τυχούσης βάσεως.



Μία δὲ ἁπλουστάτη μορφὴ τῶν στερεῶν ἑλίκων εἶναι ἡ κυκλικὴ στερεὰ ἕλιξ (βλ. Σχ. 1), τῆς ὁποίας ἡ ὁδηγὸς τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι περιφέρεια κύκλου. Αὐτὴ ἔχει τὰς κάτωθι παραμετρικὰς ἐξισώσεις:

$$x=\alpha\,\text{συν}\,t,\quad y=\alpha\,\text{ημ}\,t,\quad z=\beta t,\quad \alpha>0,\ \beta\neq 0$$

§ 4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΣΤΡΕΨΕΩΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ἔστω ἡ καμπύλη μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν $r=r(\ell)$. Ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ $k=|\ddot{r}|$. Συνεπῶς διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς καμπυλότητος k μιᾶς καμπύλης ἐχούσης ἐξίσωσιν $r=r(\ell)$ ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν $\ddot{r}(\ell)$ καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ εὕρωμεν τὸ (ἀπόλυτον) μέτρον τῆς ἀνωτέρω διανυσματικῆς συναρτήσεως.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς στρέψεως λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις: $\ddot{r}=\dot{\tau}$ καὶ $\ddot{r}=k\nu$.

Διὰ παραγωγίσεως τῆς δευτέρας ὡς πρὸς ℓ λαμβάνομεν:

$$\dddot{r}=\dot{k}\cdot\nu+k\cdot\dot{\nu} \qquad (1)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (8), § 3 ἡ (1) γράφεται:

$$\dddot{r}=\dot{k}\nu-k^2\tau+k\cdot\sigma\cdot\beta \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (2) ἐξωτερικῶς ἐπὶ $\frac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|}=\nu$ λαμβάνομεν:

$$\frac{\dddot{r}\times\ddot{r}}{|\ddot{r}|}=-k^2\beta-k\cdot\sigma\cdot\tau \qquad (3)$$

Ἐν συνεχείᾳ πολλαπλασιάζομεν τὴν (3) ἐσωτερικῶς ἐπὶ $\dot{\tau}=\tau$, ὅτε λαμβάνομεν:

$$\frac{(\dot{\tau},\ddot{\tau},\dddot{\tau})}{|\ddot{\tau}|}=k\cdot\sigma \quad \text{ἤ}$$

$$(\dot{\tau},\ddot{\tau},\dddot{\tau})=k^2\cdot\sigma \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{\sigma=\frac{(\dot{\tau},\ddot{\tau},\dddot{\tau})}{|\ddot{\tau}|^2}} \qquad (4)$$

Ὁ τύπος (4) παρέχει τὴν στρέψιν τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἤδη γεννᾶται τὸ ἐρώτημα νὰ εὕρωμεν τὴν καμπυλότητα k καὶ τὴν στρέψιν σ μιᾶς καμπύλης, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ παραμετρικὴν μορφὴν $\tau=\tau(t)$. Πρὸς τούτοις ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\tau}{d\ell}=\dfrac{d\tau}{dt}\cdot\dfrac{dt}{d\ell},\ \dfrac{d^2\tau}{d\ell^2}=\dfrac{d^2\tau}{dt^2}\cdot\left(\dfrac{dt}{d\ell}\right)^2+\dfrac{d\tau}{dt}\cdot\dfrac{d^2t}{d\ell^2}\\ \text{καὶ}\quad \dfrac{d^3\tau}{d\ell^3}=\dfrac{d^3\tau}{dt^3}\cdot\left(\dfrac{dt}{d\ell}\right)^3+3\cdot\dfrac{d^2\tau}{dt^2}\cdot\dfrac{dt}{d\ell}\cdot\dfrac{d^2t}{d\ell^2}+\dfrac{d\tau}{dt}\cdot\dfrac{d^3t}{d\ell^3}\end{array}\right\} \quad (5)$$

Ἐπειδὴ $\tau=\dot{\tau}=\dfrac{d\tau}{dt}\cdot\dfrac{dt}{d\ell}$, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{dt}{d\ell}=\frac{|\tau|}{|\tau'(t)|}=\frac{1}{|\tau'(t)|}, \quad (6) \text{ ὑποθέτομεν ὅτι } \frac{dt}{d\ell}>0.$$

Ὅθεν,

$$\frac{d\tau}{d\ell}=\frac{d\tau}{dt}\cdot\frac{1}{|\tau'(t)|}.$$

Ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον τῶν δύο πρώτων ἐκ τῶν ἐξισώσεων (5), ὅτε λαμβάνομεν:

$$\frac{d\tau}{d\ell}\times\frac{d^2\tau}{d\ell^2}=\left(\frac{d\tau}{dt}\times\frac{d^2\tau}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{d\ell}\right)^3, \text{ ἢ ἐπειδὴ } \frac{d\tau}{d\ell}\times\frac{d^2\tau}{d\ell^2}=k\cdot\beta \text{ θὰ ἔχωμεν:}$$

$$k\cdot\beta=(\tau'(t)\times\tau''(t))\left(\frac{dt}{d\ell}\right)^3 \qquad (7)$$

Ἐπειδὴ $|\beta|=1$ καὶ λόγῳ τῆς (6) λαμβάνομεν τελικῶς ἐκ τῆς (7)

$$\boxed{k=\frac{|\tau'(t)\times\tau''(t)|}{|\tau'(t)|^3}} \qquad (8)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ἐκφράσεις (5) εἰς τὴν σχέσιν (4) μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν:

$$(\tau'(t),\tau''(t),\tau'''(t))\left(\frac{dt}{d\ell}\right)^6=k^2\,\sigma \qquad (9).$$

Ἡ (9) λόγῳ τῆς (8) δίδει τελικῶς:

$$\sigma = \frac{(\boldsymbol{\tau}'(t), \boldsymbol{\tau}''(t), \boldsymbol{\tau}'''(t))}{|\boldsymbol{\tau}'(t) \times \boldsymbol{\tau}''(t)|^2} \qquad (10)$$

• Ἐάν ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶναι:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\cdot\mathbf{k}$$

τότε οἱ τύποι (8) καί (10) οἱ δίδοντες τήν καμπυλότητα καί τήν στρέψιν τῆς καμπύλης ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται (βλ. §1, III), γράφονται ὑπό τήν κάτωθι ἀναλυτικήν μορφήν:

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \qquad (8')$$

$$\sigma = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} : \left(\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 \right) \qquad (10')$$

<u>Περίπτωσις ἐπιπέδου καμπύλης</u>:

Ἐάν ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος, τότε, σύμφωνα πρός τό θεώρημα IX- 3-2, ἡ στρέψις $\sigma=0$. Ἤδη ἄς ὑπολογίσωμεν τήν καμπυλότητα αὐτῆς.

Ἔστω ἡ καμπύλη $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z\equiv 0$. (ἐπίπεδος).

Εἶναι $\boldsymbol{\tau}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\tau}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\cdot\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ καί ὁ τύπος (8) μετά τάς πράξεις δίδει:

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \qquad (11)$$

Οὕτω εὑρέθη ὁ τύπος (2) τῆς σελ. 584 Τόμου I, ὅστις δίδει τήν καμπυλότητα μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης, μέ τήν διαφοράν ὅτι ἡ καμπυλότης εἰς τόν χῶρον ὁρίζεται πάντοτε θετική, ἐνῷ διά τάς ἐπιπέδους καμπύλας ὡρίσθη προσημασμένη.

<u>Ἐφαρμογή</u>: Δίδεται ἡ κυκλική στερεά ἕλιξ:

$$\boldsymbol{\tau} = \alpha\sigma\upsilon\nu t\cdot\mathbf{i} + \alpha\eta\mu t\cdot\mathbf{j} + \gamma t\cdot\mathbf{k}, \text{ ὅπου } \gamma > 0.$$

Νά εὑρεθοῦν: 1ον/ Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου ταύτης, 2ον Τό μῆκος τό-

ξου αὐτῆς, 3ον/ Ἡ καμπυλότης, 4ον/ Ἡ στρέψις.

Λύσις: 1ον/ Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἶναι:

$$\begin{vmatrix} X-\alpha\sigma\upsilon\nu t & Y-\alpha\eta\mu t & Z-\gamma t \\ -\alpha\eta\mu t & \alpha\sigma\upsilon\nu t & \gamma \\ -\alpha\sigma\upsilon\nu t & -\alpha\eta\mu t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2ον/ Τό μῆκος τόξου αὐτῆς μέ ἀρχήν τό σημεῖον τῆς ἕλικος πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τιμήν $t=0$ θά εἶναι, ὡς γνωστόν:

$$\ell=\int_0^t\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt=+\int_0^t\sqrt{\alpha^2\eta\mu^2t+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2t+\gamma^2}\,dt=\int_0^t\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\,dt=+\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\cdot t$$

Θέτοντες $+\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}=c$, τότε $\ell=c\cdot t$

καί ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς ἕλικος, συναρτήσει τοῦ τόξου, γράφεται:

$$r(\ell)=\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\ell}{c}\cdot i+\alpha\cdot\eta\mu\frac{\ell}{c}\cdot j+\gamma\cdot\frac{\ell}{c}\cdot k.$$

3ον/ Τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα εἶναι:

$$\tau=\dot{r}=-\frac{\alpha}{c}\,\eta\mu\frac{\ell}{c}\cdot i+\frac{\alpha}{c}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\ell}{c}\cdot j+\frac{\gamma}{c}\cdot k.$$

καί

$$\dot{\tau}=-\frac{\alpha}{c^2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\ell}{c}\,i-\frac{\alpha}{c^2}\,\eta\mu\frac{\ell}{c}\cdot j+0.k.$$

Ὅθεν, ἡ καμπυλότης $k=|\dot{\tau}|=\frac{\alpha}{c^2}=$ σταθερά.

4ον/ Εἶναι $\nu=\frac{\dot{\tau}}{|\dot{\tau}|}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\ell}{c}i-\eta\mu\frac{\ell}{c}\cdot j+0\cdot k$

καί $\beta=\tau\times\nu=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\alpha}{c}\eta\mu\frac{\ell}{c} & \frac{\alpha}{c}\sigma\upsilon\nu\frac{\ell}{c} & \frac{\gamma}{c} \\ -\sigma\upsilon\nu\frac{\ell}{c} & -\eta\mu\frac{\ell}{c} & 0 \end{vmatrix}=\frac{\gamma}{c}\,\eta\mu\frac{\ell}{c}\cdot i-\frac{\gamma}{c}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\ell}{c}\cdot j+\frac{\alpha}{c}\cdot k$

καί $\dot{\beta}=-\frac{\gamma}{c^2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\ell}{c}\cdot i+-\frac{\gamma}{c^2}\,\eta\mu\frac{\ell}{c}\cdot j+0\cdot k=-\frac{\gamma}{c^2}\cdot\nu.$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (7) τοῦ Frenet, λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως, ἔχομεν: $\sigma=\frac{\gamma}{c^2}=$ σταθερά. Ἡ στρέψις εἶναι θετική εἰς τήν δεξιόστροφη ἕλικα καί ἀρνητική εἰς τήν ἀριστερόστροφη.

§5. ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον μιᾶς καμπύλης (γ). Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου Μ τῆς καμπύλης εἰς τρόπον, ὥστε τὰ διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ τῶν Ox, Oy, Oz νὰ ταυτιστοῦν μετὰ τῶν (τ_0, ν_0, β_0) τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ. Τέλος ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶναι ἡ $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\ell)$, ἔνθα ℓ τὸ μέτρον τοῦ τόξου αὐτῆς καὶ ὅτι τὸ $\boldsymbol{r}(0)$ συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον Μ.

Ἂς παραστήσωμεν διὰ τῶν k_0, σ_0 τὴν καμπυλότητα καὶ τὴν στρέψιν τῆς καμπύλης ἀντιστοίχως εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἀναπτύσσοντες τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν $\boldsymbol{r}(\ell)$ κατὰ Maclaurin εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου 0 θὰ ἔχωμεν:

$$\boldsymbol{r}(\ell)=\boldsymbol{r}(0)+\frac{\ell}{1}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(0)+\frac{\ell^2}{2!}\ \ddot{\boldsymbol{r}}(0)+\frac{\ell^3}{3!}\ \dddot{\boldsymbol{r}}(0)+O(\ell^4) \qquad (1).$$

Συμφώνως πρὸς τοὺς τύπους τοῦ Frenet θὰ ἔχωμεν:

$$\boldsymbol{r}(0)=\mathcal{O},\quad \dot{\boldsymbol{r}}(0)=\tau_0=\mathbf{i},\quad \ddot{\boldsymbol{r}}(0)=k_0\nu_0=k_0\cdot\mathbf{j}$$

Ἐπὶ πλέον, $\dddot{\boldsymbol{r}}(\ell)=\frac{d}{d\ell}(k\cdot\nu)=(\dot{k}\cdot\nu+k\cdot\dot{\nu})=\dot{k}\cdot\nu+k(-k\tau+\sigma\beta)=-k^2\tau+\dot{k}\cdot\nu+k\cdot\sigma\cdot\beta$

Ὅθεν, $\qquad \dddot{\boldsymbol{r}}(0)=-k_0^2\cdot\mathbf{i}+\dot{k}_0\cdot\mathbf{j}+k_0\cdot\sigma_0\cdot\mathbf{k}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν:

$$\boldsymbol{r}(\ell)=\ell\cdot\mathbf{i}+k_0\cdot\mathbf{j}\cdot\frac{\ell^2}{2!}+\left(-k_0^2\cdot\mathbf{i}+\dot{k}_0\cdot\mathbf{j}+k_0\cdot\sigma_0\cdot\mathbf{k}\right)\frac{\ell^3}{3!}+O(\ell^4) \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{r}(\ell)=\left(\ell-\frac{k_0^2}{6}\ \ell^3\right)\mathbf{i}+\left(\frac{k_0}{2}\ \ell^2+\frac{\dot{k}_0}{6}\ \ell^3\right)\cdot\mathbf{j}+\frac{k_0\sigma_0}{6}\ell^3\,\mathbf{k}+O(\ell^4). \qquad (3)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν x, y, z τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας τῆς $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\ell)$ εἰς τὸ σύστημα τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων λαμβάνομεν:

$$x=\ell-\frac{1}{6}\ k_0^2\ell^3+O(\ell^4),\quad y=\frac{1}{2}\ k_0\ \ell^2+\frac{1}{6}\ \dot{k}_0\ \ell^3+O(\ell^4),\quad z=\frac{1}{6}\ k_0\cdot\sigma_0\ \ell^3+O(\ell^4) \qquad (4)$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καλοῦνται ***κανονικὴ παράστασις τῆς*** (γ) ***εἰς τὸ σημεῖον*** Μ.

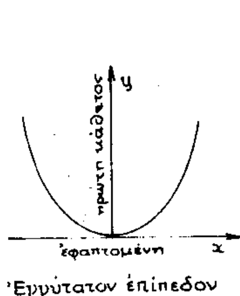
Ἡ μορφὴ τῆς γραμμῆς (γ) εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου Μ γίνεται ἀντιληπτὴ ἀπὸ τὰς προβολὰς τῆς γραμμῆς ἐπάνω εἰς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα, δηλ. ἐπὶ τῶν

πρωτευόντων ἐπιπέδων τῆς (γ) εἰς τό Μ.

Ὑποθέτομεν ὅτι, $k_0 \cdot \sigma_0 \neq 0$ τότε ἀπό τά ἀναπτύγματα τῶν τύπων (4) διά ℓ ἀρκετά μικρό αἱ προβολαί ὁρίζονται κατά προσέγγισιν ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

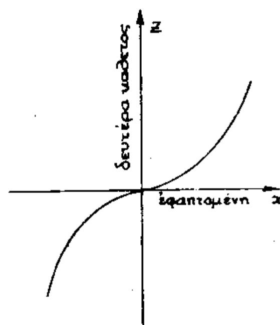
$$x = \ell, \quad y = \frac{1}{2} k_0 \cdot \ell^2, \quad z = \frac{1}{6} k_0 \cdot \sigma_0 \cdot \ell^3 \qquad (5)$$

1ον Δι' ἀπαλειφῆς τοῦ ℓ μεταξύ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων (5) λαμβάνομεν $y = \frac{1}{2} k_0 x^2$, ἤτοι ἡ προβολή τῆς καμπύλης εἰς τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἶναι μία παραβολή (βλ. Σχ. 1).



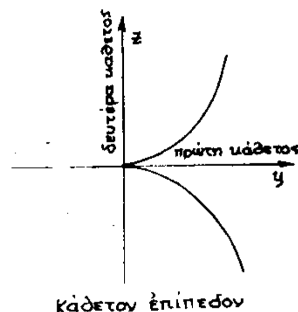
Ἐγγύτατον ἐπίπεδον

Σχ. 1



Εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον

Σχ. 2



Κάθετον ἐπίπεδον

Σχ. 3

2ον/ Δι' ἀπαλειφῆς τοῦ ℓ μεταξύ τῆς πρώτης καί τρίτης τῶν ἐξισώσεων (5) λαμβάνομεν $z = \frac{1}{6} k_0 \cdot \sigma_0 x^3$, ἤτοι ἡ προβολή τῆς καμπύλης εἰς τό εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον εἶναι ἡ κυβική παραβολή (βλ. Σχ. 2).

3ον/. Δι' ἀπαλειφῆς τοῦ ℓ μεταξύ τῆς δευτέρας καί τῆς τρίτης τῶν ἐξισώσεων (5) λαμβάνομεν $z^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{\sigma_0^2}{k_0}\right) \cdot y^3$, ἤτοι ἡ προβολή τῆς καμπύλης ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἶναι μία καμπύλη δεικνυομένη εἰς τό Σχ. 3

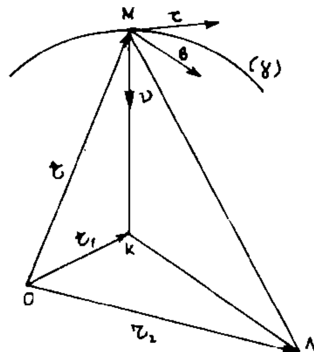
§ 6. ΚΕΝΤΡΟΝ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ἔστω ἡ καμπύλη (γ) μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\tau = \tau(\ell)$ καί ἔστω $R = \frac{1}{k}$ ἡ ἀκτίς καμπυλότητος αὐτῆς εἰς τό σημεῖον της Μ.

Ἐπί τῆς πρώτης καθέτου καί πρός τήν φοράν τοῦ διανύσματος ν λαμβάνομεν

ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{MK}$ τοῦ ὁποίου τό μῆκος εἶναι R.

Τό σημεῖον k καλεῖται ***κέντρον καμπυλότητος*** τῆς καμπύλης εἰς τό σημεῖον M (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

Ἐάν $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_1(\ell)$ - εἶναι ἡ διανυσματική ἐξίωσις τοῦ μεταβλητοῦ κέντρου καμπυλότητος k της (γ) - τό ℓ εἶναι τό μέτρον τοῦ τόξου τῆς (γ) - τότε, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau} + R \cdot \boldsymbol{\nu} \qquad (1)$$

Καλοῦμεν ***κύκλον καμπυλότητος*** τῆς καμπύλης (γ) εἰς τό σημεῖον M τόν κύκλον τόν κείμενον ἐπί τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς (γ) καί ἔχοντος κέντρον τό κέντρον καμπυλότητος τῆς καμπύλης εἰς τό M καί ἀκτῖνα ἴσην πρός τήν ἀκτῖνα καμπυλότητος R τῆς καμπύλης εἰς τό M.

Αἱ ἀναλυτικαί ἐξισώσεις τοῦ κύκλου καμπυλότητος τῆς καμπύλης ἀντιστοιχοῦντος εἰς τό σημεῖον M αὐτῆς θά εἶναι προφανῶς:

$$(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad (\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}^*)^2 = R^2 \qquad (2)$$

ὅπου $\boldsymbol{\tau}^*$ εἶναι ἡ διανυσματική ἀκτίς ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τό τυχόν σημεῖον τοῦ κύκλου καμπυλότητος.

Ἡ εὐθεῖα ἡ κειμένη ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης καί καθέτου εἰς τήν πρώτην κάθετον εἰς τό κέντρον καμπυλότητος τῆς καμπύλης καλεῖται ***πολικός ἄξων*** τῆς καμπύλης.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πολικοῦ ἄξονος λόγῳ τῆς σχέσεως:

$$\overrightarrow{O\Lambda} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Mk} + \overrightarrow{k\Lambda}$$

θά εἶναι: $\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau} + R \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda \cdot \boldsymbol{\beta}$ (3), ὅπου λ παράμετρος.

Τέλος καλοῦμεν ***ἐγγυτάτην σφαῖραν*** τῆς καμπύλης (γ) εἰς τό σημεῖον M τήν σφαῖραν τήν διερχομένην διά τοῦ σημείου M τῆς καμπύλης καί ἔχουσα τό κέντρον της Λ ἐπί τοῦ πολικοῦ ἄξονος καί τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau} + R \cdot \boldsymbol{\nu} + \dot{R} \cdot \rho \cdot \boldsymbol{\beta} \qquad (4)$$

ἔνθα $\rho = \frac{1}{\sigma}$ ἡ ἀκτίς στρέψεως.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας θά εἶναι:

$$|\overrightarrow{\Lambda M}| = |\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}| = |R \cdot \boldsymbol{\nu} + \dot{R} \cdot \rho \; \boldsymbol{\beta}| = \left(R^2 + \dot{R}^2 \rho^2\right)^{1/2}$$

Ὅθεν, ἡ ἐξίσωσις $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(\ell)$ τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας θά εἶναι:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}^*)^2 = R^2 + \dot{R}^2 \cdot \rho^2 \qquad (5)$$

ὁ δέ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν εἶναι μία καμπύλη ἔχουσα ὡς διανυσματικήν ἐξίσωσιν τήν (4), καλουμένη ***σφαιροκεντρική*** ἤ ***πολική καμπύλη*** τῆς δοθείσης.

<u>Πρότασις IX-6-1</u>. <u>Ἡ ἐφαπτομένη τῆς σφαιροκεντρικῆς δοθείσης καμπύλης εἶναι παράλληλος πρός τήν δευτέραν κάθετον τῆς δοθείσης καμπύλης εἰς τό ἀντίστοιχον σημεῖον.</u>

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαιροκεντρικῆς εἶναι:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + R\cdot\boldsymbol{\nu} + \dot{R}\cdot\rho\cdot\boldsymbol{\beta} \qquad (1)$$

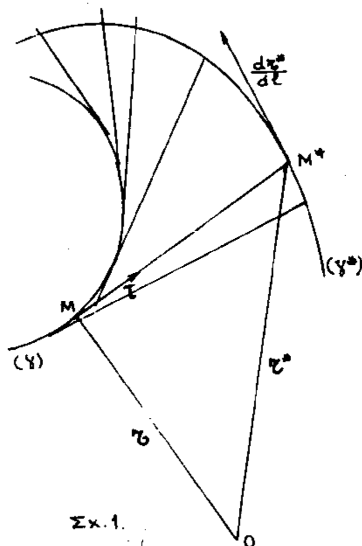
Διά παραγωγίσεως τῆς (1) ὡς πρός ℓ λαμβάνομεν:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{d\ell} = \boldsymbol{\tau} + \dot{R}\cdot\boldsymbol{\nu} + R\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}} + \ddot{R}\cdot\rho\cdot\boldsymbol{\beta} + \dot{R}\cdot\dot{\rho}\cdot\boldsymbol{\beta} + \dot{R}\cdot\rho\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} =$$

$$= \boldsymbol{\tau} + \dot{R}\cdot\boldsymbol{\nu} + R\left(-\frac{\boldsymbol{\tau}}{R} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\rho}\right) + \ddot{R}\cdot\rho\cdot\boldsymbol{\beta} + \dot{R}\cdot\dot{\rho}\cdot\boldsymbol{\beta} + \dot{R}\cdot\rho\left(-\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho}\right)$$

$$= \boldsymbol{\tau} + \dot{R}\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\tau} + \frac{R}{\rho}\boldsymbol{\beta} + \ddot{R}\cdot\rho\cdot\boldsymbol{\beta} + \dot{R}\cdot\dot{\rho}\cdot\boldsymbol{\beta} - \dot{R}\boldsymbol{\nu} = \left(\frac{R}{\rho} + \ddot{R}\cdot\rho + \dot{R}\cdot\dot{\rho}\right)\boldsymbol{\beta}, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

§7. <u>ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ</u>



I. Αἱ ἐφαπτόμεναι μιᾶς καμπύλης (γ) σχηματίζουν μίαν ἐπιφάνειαν, ἥτις καλεῖται ***ἐφαπτομενική ἐπιφάνεια*** τῆς (γ).[1]

Μία καμπύλη (γ*) κειμένη ἐπί τῆς ἐφαπτομενικῆς ἐπιφανείας τῆς (γ) καί τέμνουσα τάς ἐφαπτομένας τῆς (γ) ὀρθογωνίως καλεῖται *ἐξειλιγμένη* τῆς (γ).

Ἔστω ὅτι ἡ καμπύλη (γ) ἔχει τήν διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$ καί ἄς ἀναζητήσωμεν νά εὕρωμεν τήν διανυσματικήν ἐξίσωσιν τῆς ἐξειλιγμένης (γ*) τῆς (γ). Ἔστω O ἡ ἀρχή τῶν συντεταγμένων (βλ. Σχ.1). Θά ἔχωμεν προφανῶς

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \lambda(\ell)\cdot\boldsymbol{\tau} \qquad (1)$$

1) *Αὐτη εἶναι μία ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια (βλ. ἑπόμενον Κεφάλαιον).*

Διά παραγωγίσεως **της (1)** ω. προς **ℓ λαμβάνομεν:** $\frac{d\tau^*}{d\ell}=\dot{\tau}+\dot{\lambda}\cdot\tau+\lambda\dot{\tau}$ **(2)** ἤ

$$\frac{d\tau^*}{d\ell}=(1+\dot{\lambda})\tau+\lambda\cdot k\cdot\nu \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τήν (3) ἐπί τ ἐσωτερικῶς καί ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως τά διανύσματα **τ** καί $\frac{d\tau^*}{d\ell}$ εἶναι ὀρθογώνια θά ἔχωμεν: $0=1+\dot{\lambda}$, ἐξ ἧς $\lambda=-\ell+c$, ἔνθα c μία αὐθαίρετος σταθερά. Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐξειλιγμένης γράφεται:

$$\tau^*=\tau+(c-\ell)\,\tau \quad (4)$$

Ἐκ τῆς (4) προκύπτει ὅτι, <u>μία δοθεῖσα καμπύλη</u> (γ) <u>ἔχει</u> <u>ἀπείρους</u> <u>ἐξειλιγμένας</u>.

Ἐκ τοῦ τύπου (4) διά παραγωγίσεως λαμβάνομεν:

$$\frac{d\tau^*}{d\ell}=\tau-\tau+(c-\ell)\,\dot{\tau}=(c-\ell)\cdot k\cdot\nu \quad (5)$$

Ἐκ τῆς (5) προκύπτει ὅτι, τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα $\frac{d\tau^*}{d\ell}$ <u>τῆς ἐξειλιγμένης ἰσοῦται πρός τό</u> ......<u>κόν διάνυσμα ἐάν</u> k=0, <u>δηλ.</u> ἡ <u>καμπυλότης τῆς</u> (γ) <u>εἶναι ἴση πρός τό μηδέν</u>

<u>**Πρότασις IX-7-1**</u> <u>ἡ καμπυλότης</u> k^* <u>τῆς ἐξειλιγμένης</u> (γ^*) <u>παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου</u> $k^*=\frac{k^2+\sigma^2}{(c-\ell)^2k^2}$, <u>ἔνθα</u> k,σ <u>ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις τῆς</u> (γ) <u>ἀντιστοίχως καί</u> c <u>ἡ ἀντίστοιχος πρός τήν</u> (γ^*) <u>σταθερά</u>.

<u>**Ἀπόδειξις:**</u> Ἔχομεν ὡς γνωστόν ὅτι:

$$\tau^*=\tau+(c-\ell)\cdot\tau \quad (1)$$

καί

$$\frac{d\tau^*}{d\ell}=(c-\ell)\cdot k\nu \quad (2)$$

Συνεπῶς:

$$\left|\frac{d\tau^*}{d\ell}\right|=\left|(c-\ell)\cdot k\right| \quad (3)$$

Λόγῳ τῶν (2) καί (3) ἔχομεν:

$$\tau^*=\frac{d\tau^*}{d\ell}:\left|\frac{d\tau^*}{d\ell}\right|=\pm\nu \quad (4),$$

ὅπου τό ± εἶναι τό σημεῖον τοῦ $[(c-\ell)\cdot k]$

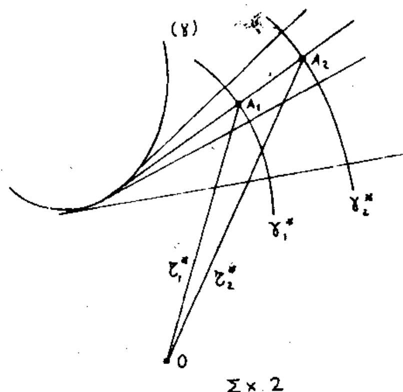
Θά εἶναι τότε: $\frac{d\tau^*}{d\ell}=\pm\dot{\nu}=\pm(-k\cdot\tau+\sigma\cdot\beta)$ (5)

καί

$$\frac{d\tau^*}{d\ell^*}=\frac{d\tau^*}{d\ell}:\left|\frac{d\tau^*}{d\ell}\right|=\pm\frac{-k\tau+\sigma\beta}{(c-\ell)k}$$

Ἄρα: $\quad k^{*2} = \left|\dfrac{d\tau^*}{d\ell^*}\right|^2 = \dfrac{k^2 r\, \sigma^2}{(c-\ell)^2 k^2}$

• Ἔστωσαν $\tau_1^* = \tau + (c_1 - \ell)$ καί $\tau_2^* = \tau + (c_2 - \ell)$ δύο ἐξειλιγμέναι τῆς (γ) μέ ἐξίσωσιν $\tau = \tau(\ell)$. Ἡ ἀπόστασις $A_1 A_2$ τῶν σημείων A_1 καί A_2 (βλ. Σχ. 2) πού ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτήν τήν τιμήν τοῦ τόξου ℓ θά εἶναι:



Σχ. 2

$$|A_1 A_2| = |\vec{0A}_1 - \vec{0A}_2| = |\tau_1^* - \tau_2^*|$$

$$= |\tau - (c_1 - \ell) - \tau + (c_2 - \ell)| = |c_2 - c_1|.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξειλιγμέναι τῆς κυκλικῆς στερεᾶς ἕλικος $\tau = a\,\sigma\upsilon\nu t \cdot i + a\,\eta\mu t \cdot j + \beta \cdot t \cdot k$, $a>0$, $\beta \neq 0$

<u>Λύσις</u>: Εἶναι $\dfrac{d\tau}{dt} = -a\,(\eta\mu t)\, i + a\,(\sigma\upsilon\nu t)\, j + \beta k$ καί

$\left|\dfrac{d\tau}{dt}\right| = (a^2+\beta^2)^{1/2}$ καί $\tau = \dfrac{d\tau}{dt} : \left|\dfrac{d\tau}{dt}\right| = (a^2+\beta^2)^{-1/2} \left\{-a(\eta\mu t)\cdot i + a(\sigma\upsilon\nu t)\cdot j + \beta \cdot k\right\}$

Ἐπίσης ἔχομεν: $\ell = \displaystyle\int_0^t \left|\dfrac{d\tau}{dt}\right| dt = (a^2+\beta^2)^{1/2}\, t$.

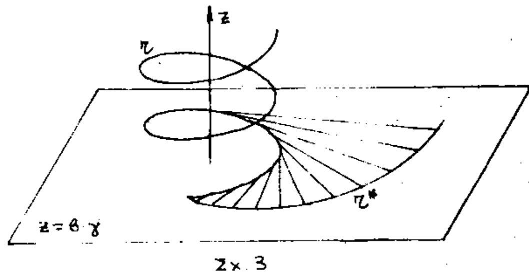
Αἱ ἐξειλιγμέναι λοιπόν εἶναι αἱ καμπύλαι:

$$\tau^* = \tau + (c-\ell)\,\tau = \left[a\,\sigma\upsilon\nu t - a\,(c-\ell)\,(a^2+\beta^2)^{-1/2}\,\eta\mu t\right] \cdot i \, +$$
$$+ \left[a\,\eta\mu t + a\,(c-\ell)\,(a^2+\beta^2)^{-1/2}\,\sigma\upsilon\nu t\right] \cdot j + \left[\beta t + (c-\ell)(a^2+\beta^2)^{-1/2}\,\beta\right] k$$

ἤ θέτοντες $\gamma = c\cdot(a^2+\beta^2)^{-1/2}$ καί $t = \ell\cdot(a^2+\beta^2)^{-1/2}$ θά ἔχωμεν τελικῶς:

$$\tau^* = a\left[(\sigma\upsilon\nu t + t\,\eta\mu t) - \gamma\,\eta\mu t\right] \cdot i + a\left[(\eta\mu t - t\,\sigma\upsilon\nu t) + \gamma\,\sigma\upsilon\nu t\right] \cdot j + \beta \cdot \gamma \cdot k.$$

Τό Σχ. 3 δεικνύει ὅτι ἡ ἐξειλιγμένη εἶναι μία ἐπίπεδος καμπύλη κειμένη ἐπί τοῦ ἐπιπέδου $z = \beta\cdot\gamma$. Οὕτω πᾶσαι αἱ ἐξειλιγμέναι τῆς ἕλικος εἶναι καμπύλαι κείμεναι ἐπί παραλλήλων ἐπιπέδων διά τάς διαφόρους τιμάς τοῦ γ, δηλ. τοῦ c.



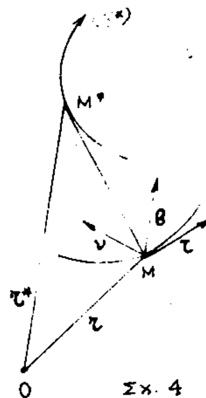
Σχ. 3

II Ἐάν μία καμπύλη (γ) εἶναι ἡ ἐξειλιγμένη μιᾶς καμπύλης (γ*), τότε ἐξ ὁρι-

σμοῦ ἡ (γ*) καλεῖται *ἐνειλιγμένη* τῆς (γ).

Τὸ πρόβλημα μας εἶναι τὸ ἀκόλουθον: **Δοθείσης** τῆς ἐξισώσεως τῆς (γ) νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης αὐτῆς (γ*).

Ἔστω $\tau = \tau(\ell)$, $\tau^* = \tau^*(\ell)$ αἱ διανυσματικαί ἐξισώσεις τῶν (γ), (γ*) ἀντιστοίχως μέ παράμετρον τό τόξον ℓ τῆς (γ). Ἔστω O ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων (βλ. Σχ. 4) θά ἔχωμεν τότε:



$$\tau^*(\ell) = \tau(\ell) + \overrightarrow{MM^*} \quad (1).$$

Τό **διάνυσμα** $\overrightarrow{MM^*}$ θά κεῖται εἰς τό κάθετον ἐπίπεδον τῆς (γ) εἰς τό σημεῖον M καί ὡς ἐκ τούτου θά ἔχωμεν:

$$\overrightarrow{MM^*} = \lambda(\ell)\cdot\nu + \mu(\ell)\cdot\beta \quad (2)$$

Ἡ (1), λόγῳ τῆς (2), γράφεται:

$$\tau^*(\ell) = \tau(\ell) + \lambda(\ell)\cdot\nu + \mu(\ell)\cdot\beta \quad (3)$$

Ἀρκεῖ ἤδη νά προσδιορίσωμεν τάς συναρτήσεις $\lambda(\ell)$ καί $\mu(\ell)$. Διά παραγωγίσεως ὡς πρός ℓ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{d\tau^*}{d\ell} = \tau + \dot{\lambda}\cdot\nu + \lambda\cdot\dot{\nu} + \dot{\mu}\beta + \mu\cdot\dot{\beta} \quad (4)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τούς τύπους τοῦ Frenet ἡ (4) γράφεται:

$$\frac{d\tau^*}{d\ell} = \tau + \dot{\lambda}\nu + \lambda(-k\tau + \sigma\beta) + \dot{\mu}\beta + \mu(-\sigma\nu) = (1-\lambda k)\tau + (\dot{\lambda} - \mu\sigma)\nu + (\lambda\sigma + \dot{\mu})\beta \quad (5)$$

Τό $\frac{d\tau^*}{d\ell}$ εἶναι ἐφαπτομενικόν διάνυσμα τῆς γ* καί ὡς ἐκ τούτου θά ἔχῃ προβολάς ἀναλόγους πρός τάς προβολάς τοῦ διανύσματος: $\tau^* - \tau = \lambda\nu + \mu\beta \quad (6)$.

Ὅθεν ὑπάρχει ἀριθμός t τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν λόγῳ τῶν (5) καί (6):

$$1 - \lambda k = 0, \quad \dot{\lambda} - \mu\sigma = t\cdot\lambda, \quad \lambda\sigma + \dot{\mu} = t\cdot\mu \quad (7)$$

Ἐκ τῶν (7) λαμβάνομεν: $\lambda = \frac{1}{k} \quad (8)$

Διά ἀπαλειφῆς τοῦ t μεταξύ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν:

$$\sigma = \frac{\mu\cdot\dot{\lambda} - \dot{\mu}\lambda}{\mu^2 + \lambda^2} = -\frac{d}{d\ell}\left(\text{τοξσφ}\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

Ὅθεν,

$$\int \sigma\, d\ell + c = \text{τοξ σφ}\,\frac{\mu}{\lambda} \quad (9)$$

Ἐκ τῆς (9) λαμβάνομεν:

$$\mu = \lambda \cdot \sigma\phi\left(\int \sigma d\ell + c\right) = \frac{1}{k} \cdot \sigma\phi\left(\int \sigma d\ell + c\right). \qquad (10)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς (γ*) θά εἶναι λόγῳ τῶν (3), (8) καί (10):

$$\tau^* = \tau(\ell) + \frac{1}{k} \cdot \nu + \frac{1}{k}\, \sigma\phi\left(\int \sigma d\ell + c\right) \cdot \beta \qquad (11).$$

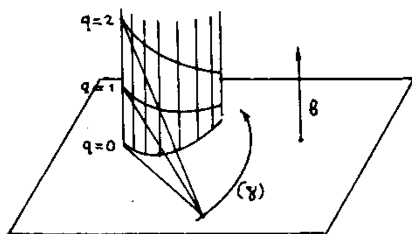
Ἐκ τῆς (11) παρατηροῦμεν ὅτι, <u>ἔχομεν μίαν ἀπειρίαν ἐνειλιγμένων δοθείσης καμπύλης</u>

<u>Παρατήρησις</u>: Ἐκ τῆς (11) παρατηροῦμεν ὅτι, ἵνα ὁ γ.τ. τῶν κέντρων καμπυλότητος μιᾶς καμπύλης εἶναι μία ἐνειλιγμένη αὐτῆς ἀρκεῖ ὁ συντελεστής τοῦ **β** νά εἶναι μηδέν, τό ὁποῖον συμβαίνει ὅταν $\sigma(\ell) \equiv 0$ καί $c = \pi/2$, δηλ. ὅταν ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος. Αἱ ἐνειλιγμέναι μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης εἶναι:

$$\tau^* = \tau(\ell) + \frac{1}{k}\nu + \frac{1}{k}\, \sigma\phi c \cdot \beta \qquad (12) \quad \text{ἤ}$$

$$\tau^* = \tau(\ell) + \frac{1}{k} \cdot \nu + \frac{q}{k} \cdot \beta \qquad (12'),$$ ὅπου ἐτέθη $\sigma\phi c = q$.

Δίδοντες διαφόρους τιμάς εἰς τήν q λαμβάνομεν τάς διαφόρους ἐνειλιγμένας τῆς (γ). Οὕτω διά $q = 0, 1, 2, \ldots$ ἔχομεν τάς εἰς τό Σχῆμα 5 δεικνυομένας. Ἡ ἐνειλιγμένη ἡ προκύπτουσα διά $q=0$ κεῖται εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον μετά τῆς (γ), ἐνῶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι, ἐπειδή τό **β** εἶναι σταθερόν, κεῖνται ἐπί μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τῆς ὁποίας αἱ γενέτειραι εἶναι κάθετοι πρός τό ἐπίπεδον τῆς καμπύλης (γ) καί ἔχουν ὡς ὁδηγόν τήν ἐνειλιγμένην τῆς (γ) τήν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τήν τιμήν $q = 0$.



Σχ. 5

<u>Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:</u>

1. Ἔστω $\mathbf{a} = i + 2j - k$, $\mathbf{b} = -i + j$, $\mathbf{c} = -j + 2k$. Νά εὑρεθῇ τό γινόμενον $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

2. Δείξατε ὅτι: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2$.

3. Δείξατε ὅτι: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}$.

4. Ἐάν $\mathbf{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ εἶναι ἕνα μοναδιαῖον διάνυσμα δείξατε ὅτι, αἱ στα-

ὅπου a_i $(i=1,2,3)$ εἶναι τά διευθύνοντα συνημίτονα τῆς εὐθείας, ἥτις περιέχει τό διάνυσμα **a** καί ἔχει τόν αὐτόν προσανατολισμόν μέ τό διάνυσμα **a**.

(5.) Νά ἐπαληθεύσετε τήν ταυτότητα τοῦ Lagrange:

$$(a\times b)\cdot(c\times d)=\begin{vmatrix} a\cdot c & b\cdot c \\ a\cdot d & b\cdot d \end{vmatrix}$$

6. Ἔστω $u=a(\text{συν}t)i+a(\text{ημ}t)\cdot j+\beta t\cdot k$ $a,\beta\neq 0$. Νά εὑρεθοῦν τά:

i) $\dfrac{du}{dt}$, ii) $\left|\dfrac{du}{dt}\right|$, iii) $\dfrac{d^2u}{dt^2}$, iv) $\left|\dfrac{d^2u}{dt^2}\right|$.

7. Δείξατε ὅτι: $\quad r\cdot\dfrac{dr}{dt}=|r|\cdot\dfrac{d|r|}{dt}$

8. Ἐπαληθεύσατε ὅτι μία λύσις τῆς διανυσματικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $\dfrac{d^2r}{dt^2}=-k^2 r$ εἶναι ἡ $r=\mathbf{a}\,\text{συν}kt+\mathbf{b}\,\text{ημ}kt$, ἔνθα **a**, **b** σταθερά διανύσματα.

9. Ἐάν $u=(2t^2+3)\,i+(\text{συν}t)j$ καί $V=(\text{ημ}t)\,i+e^t\,k$ νά ὑπολογισθοῦν:

i) $\dfrac{d}{dt}(u\,V)$, ii) $\dfrac{d}{dt}(u\times V)$, iii) $\dfrac{d}{dt}|V|$.

10. Δίδεται ἡ καμπύλη μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν:

$$r=\tfrac{1}{2}\left(\ell+\sqrt{\ell^2+1}\right)i+\tfrac{1}{2}\left(\ell+\sqrt{\ell^2+1}\right)^{-1}j+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\log\left(\ell+\sqrt{\ell^2+1}\right)\right)k$$

Δείξατε ὅτι αὐτή εἶναι μία φυσική παράστασις ταύτης, δηλ. $\left|\dfrac{dr}{d\ell}\right|=1$

→ 11. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης, τῆς πρώτης καθέτου καί τῆς δευτέρας καθέτου τῆς καμπύλης, ἥτις ἔχει διανυσματικήν ἐξίσωσιν $r=r(t)$. Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόσατε τά ἀνωτέρω ἀποτελέσματα εἰς τή καμπύλην: $r=t\cdot i+\text{ημ}t\cdot j+\text{συν}t\cdot k$ εἰς τό σημεῖον $t=\frac{\pi}{4}$.

→ 12. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου, καθέτου καί εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου τῆς καμπύλης, ἥτις ἔχει διανυσματικήν ἐξίσωσιν $r=r(t)$. Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόσατε τά ἀνωτέρω ἀποτελέσματα εἰς τήν καμπύλην $r=(t^2-1)i+t(1+t)j+(4t^3-3t+1)k$ εἰς τό σημεῖον $t=1$

13. Νά δειχθῆ ὅτι τό κάθετον ἐπίπεδον εἰς τυχόν σημεῖον τῆς καμπύλης $\mathbf{r} = 2\alpha\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t \cdot i + 2\alpha\sigma\upsilon\nu^2 t \cdot j + 2\alpha\eta\mu t \cdot k$ διέρχεται διά τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

14. Νά εὑρεθοῦν τά πρωτεύοντα διανύσματα τῆς γραμμῆς $\mathbf{r} = 4\alpha\sigma\upsilon\nu^3 t \cdot i + 4\alpha\eta\mu^3 t \cdot j + 3\beta\sigma\upsilon\nu 2t \cdot k$.

15. Νά εὑρεθῆ τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t + \beta\eta\mu t$, $y = \alpha\eta\mu t + \beta\sigma\upsilon\nu t$, $z = \gamma\eta\mu 2t$.

16. Νά εὑρεθῆ ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις τῆς καμπύλης: 1α/ $\mathbf{r} = (3t - t^3)\, i + 3t^2 \cdot j + (3t + t^3) \cdot k$. 2α/ $x = 3z^2$, $y = 6z^3$.

17. α) Δείξατε ὅτι ἡ προβολή μιᾶς ἕλικος ἐπί ἑνός κώνου ἐκ περιστροφῆς ἐπί ἑνός ἐπιπέδου καθέτου πρός τόν ἄξονα αὐτοῦ τοῦ κώνου εἶναι μία λογαριθμική σπεῖρα.

β) Δείξατε ὅτι αἱ συμφυεῖς ἐξισώσεις μιᾶς ἕλικος ἐπί ἑνός κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι:

$$K = \frac{1}{\alpha \ell}, \quad \sigma = \frac{1}{\beta \cdot \ell}$$, ὅπου α, β σταθεραί

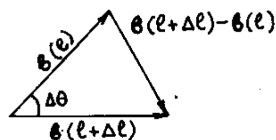
18. Δείξατε ὅτι, ἐάν τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον καμπύλης τινός διέρχεται σταθερῶς διά τινος σταθεροῦ σημείου O, ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος καί τό ἐπίπεδόν της διέρχεται διά τοῦ O. Δύναται δέ αὐτη νά εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διά τοῦ O;

19. Νά εὑρεθῆ ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις τῆς γραμμῆς ἥτις ἔχει παραμετρικάς ἐξισώσεις: $x = \int f(t)\eta\mu t\, dt$, $y = \int f(t)\sigma\upsilon\nu t\, dt$ καί $z = \int f(t)\varphi(t)\, dt$.

20. Ἐάν Δθ εἶναι ἡ γωνία μεταξύ τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων τῆς καμπύλης $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$ εἰς τά σημεῖα πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τιμάς ℓ καί $\ell + \Delta\ell$, τότε θά ἔχωμεν $|\sigma| = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell}$.

<u>Ἀπόδ.</u> Ἐπειδή $\dot{\mathbf{b}} = -\sigma \cdot \mathbf{v} \Longrightarrow |\sigma| = |\dot{\mathbf{b}}| = \left| \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\mathbf{b}(\ell + \Delta\ell) - \mathbf{b}(\ell)}{\Delta\ell} \right| =$

$$= \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell} - \frac{1}{24} \lim_{\Delta\ell \to 0} \left[\frac{(\Delta\theta)^3}{\Delta\ell} \cdot \sigma\upsilon\nu\xi \right] = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell}.$$



(21.) Δείξατε ὅτι αἱ μόναι ἐπίπεδοι καμπύλαι μὲ σταθεράν ἀκτῖνα καμπυλότητος R εἶναι περιφέρειαι.

(Ὑπόδ: Ἐφαρμόσατε τούς τύπους (6) καί (7) τοῦ προβλήματος τῆς § 3)

22. Νά προσδιορισθοῦν αἱ φυσικαί ἢ συμφυεῖς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης:

$$r = a\left(\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right) i + t \cdot j,\ a = \text{σταθερά}.$$

(Ὑπόδ: Ὑπολογίσατε τά ℓ καί k τῆς καμπύλης, τό $\sigma \equiv 0$).

23. Νά προσδιορισθῇ ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας αἱ φυσικαί ἐξισώσεις εἶναι:

$$1^{ον}/\ K = \left(\frac{1}{2a\ell}\right)^{1/2},\ \sigma = 0,\ a > 0,\ \ell > 0,\ 2^{ον}/\ a \cdot R = a^2 + \ell^2,\ a > 0,\ \ell > 0.$$

(24.) Δείξατε ὅτι, ἐάν ἡ διανυσματική ἀκτίς $r = r(\ell)$ μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης σχηματίζῃ μίαν σταθεράν γωνίαν a μέ τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα $\tau = \tau(\ell)$, τότε ἡ καμπύλη εἶναι μία λογαριθμική σπεῖρα.

25. Δείξατε ὅτι ἡ καμπύλη ἥτις ἔχει φυσικάς ἐξισώσεις $k = \frac{1}{\ell}$, $\sigma = 0$, $\ell > 0$ εἶναι λογαριθμική σπεῖρα $\rho = (1/\sqrt{2}) e^{\theta}$.

(26.) Νά δειχθῇ ὅτι αἱ γραμμαί αἱ ἔχουσαι σταθεράν καμπυλότητα καί στρέψιν εἶναι κυκλικαί ἕλικες.

27. Καλοῦμεν <u>γενικήν ἢ κυλινδρικήν ἕλικα</u> μία γραμμήν τοῦ χώρου τῆς ὁποίας τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα τ σχηματίζει σταθεράν γωνίαν $a \neq 0$ μέ μίαν εὐθεῖαν, ἥτις καλεῖται <u>ἄξων</u> τῆς ἕλικος. Δείξατε ὅτι: i) Μία γενική ἕλιξ ἔχει μίαν φυσικήν παράστασιν τῆς μορφῆς: $r = x(\ell^*) \cdot i + y(\ell^*) \cdot j + \ell^* \text{συν} a \cdot k$.

ii) Μία καμπύλη εἶναι γενική ἕλιξ ἐάν καί μόνον ἐάν, ὁ λόγος $\frac{k}{\sigma}$ τῆς καμπυλότητος πρός τήν στρέψιν εἶναι σταθερός, ὅπου $k \neq 0$ καί εἶναι $\sigma = 0$, ὅταν $k = 0$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: i) Ἔστω $r = x(\ell^*) \cdot i + y(\ell^*) \cdot j + z(\ell^*) \cdot k$ (1) μία φυσική παράστασις τῆς καμπύλης. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἕλιξ ἔχει τοποθετηθῆ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων εὑρίσκεται ἐπί τῆς καμπύλης καί ὅτι τό k εἶναι παράλληλον πρός τόν

ἄξονα τῆς ἕλικος. Θά ἔχωμεν:

$$\sigma\upsilon\nu a = \sigma\upsilon\nu < \tau, k > = \tau \cdot k = \dot{\tau} \cdot k = \dot{z}$$

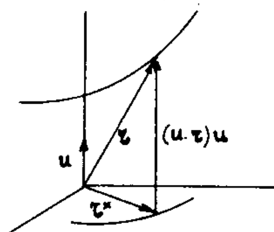
ὅθεν, $z = \ell\,\sigma\upsilon\nu a + c$, ἔνθα c σταθερά.

Ἄς θέσωμεν $\ell^* = \ell + \frac{c}{\sigma\upsilon\nu a}$, ὅτε $\ell = \frac{\ell^*\sigma\upsilon\nu a - c}{\sigma\upsilon\nu a}$, καί $z = \frac{\ell^*\sigma\upsilon\nu a - c}{\sigma\upsilon\nu a}\sigma\upsilon\nu a + c = \ell^*\sigma\upsilon\nu a$

καί ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $\tau = x(\ell^*)\cdot i + y(\ell^*)\cdot j + \ell^*\sigma\upsilon\nu a \cdot k$.

28. Δείξατε ὅτι ἡ καμπυλότης k^* τῆς προβολῆς μιᾶς γενικῆς ἕλικος εἰς ἕνα ἐπίπεδον κάθετον πρός τόν ἄξονά της δίδεται ὑπό τοῦ τύπου $k^* = k/\eta\mu^2 a$, ὅπου $a \neq 0$ εἶναι ἡ γωνία μεταξύ τοῦ ἄξονος αὐτῆς καί τοῦ ἐφαπτομενικοῦ διανύσματος τῆς ἕλικος καί k ἡ καμπυλότης τῆς ἕλικος (βλ. Σχ. 1).

(Ἀπόδ. Ἔστω $\tau = \tau(\ell)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἕλικος. Ἡ ἐξίσωσις τῆς προβολῆς ὡς φαίνεται καί ἐκ τοῦ σχήματος εἶναι:



Σx. 1

$$\tau^* = \tau(\ell) - (u \cdot \tau(\ell))u \quad (1)$$

Ἄς σημειωθῇ ὅτι ἐν γένει τό ℓ δέν εἶναι μία φυσική παράμετρος τῆς προβολῆς $\tau^* = \tau^*(\ell)$. Διαφορίζοντες τήν (1) εὑρίσκομεν: $\frac{d\tau^*}{d\ell} = \tau - (u \cdot \tau)u = \tau - u \cdot \sigma\upsilon\nu a$ (τό u = σταθερόν διάνυσμα).

Εἶναι καί $\left|\frac{d\tau^*}{d\ell}\right|^2 = (\tau - u\cdot\sigma\upsilon\nu a)^2 = \eta\mu^2 a$, $0 < a < \pi$.

ὅθεν, $t^* = \frac{d\tau^*}{d\ell} \Big/ \left|\frac{d\tau^*}{d\ell}\right| = \frac{\tau - (\sigma\upsilon\nu a)u}{\eta\mu a}$ καί $\frac{d t^*}{d\ell} = \frac{\dot{\tau}}{\eta\mu a}$

Τέλος $k^* = |\dot{t}^*| = \left|\frac{dt^*}{d\ell}\right| \Big/ \left|\frac{d\tau^*}{d\ell}\right| = \frac{|\dot{\tau}|}{\eta\mu a} \cdot \frac{1}{\eta\mu a} = \frac{|\dot{\tau}|}{\eta\mu^2 a} = \frac{k}{\eta\mu^2 a}$.

29. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα μία καμπύλη κεῖται ἐπί σφαίρας εἶναι:

$$\frac{R}{\rho} + \dot{\rho}\,\dot{R} + \rho\cdot\ddot{R} = 0,$$ ἔνθα R, ρ ἡ ἀκτίς καμπυλότητος καί ἡ ἀκτίς στρέψεως τῆς καμπύλης.

(Ὑπόδ: Τό κέντρον τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας εἰς τό σημεῖον $\tau(\ell)$ δίδεται

ὡς γνωστόν, ὑπό τοῦ τύπου $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau} + R\,\boldsymbol{\nu} + \dot{R}\cdot\rho\cdot\boldsymbol{\beta}$. Εἶναι ὅμως τό $\boldsymbol{\tau}_1$ = σταθερόν καί ὡς ἐκ τούτου $\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{d\ell} = 0$.

Παραγωγίσατε ἐν συνεχείᾳ τήν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν κ.τ.λ. Ἀντιστρόφως: Ἀρκεῖ νά δειχθῇ $|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}|^2$ = σταθερόν.

30. Νά εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις τῆς σφαιροκεντρικῆς τῆς καμπύλης ἥτις ἔχει διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\ell)$.

31. Δείξατε ὅτι, ἐάν ἡ καμπύλη $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\ell)$ ἔχει σταθεράν στρέψιν, τότε ἡ καμπύλη $\boldsymbol{\tau}^* = \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \int \boldsymbol{\beta}\, d\ell$ ἔχει σταθεράν καμπυλότητα.

32. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξειλιγμέναι τῆς ἁλυσοειδοῦς $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}\right)$

33. Δείξατε ὅτι ἡ δευτέρα κάθετος τῆς ἐξειλιγμένης $\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{\tau} + (c-\ell)\boldsymbol{\tau}$ τῆς $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\ell)$ εἶναι $\boldsymbol{\beta}^* = \frac{k\cdot\boldsymbol{\beta} + \sigma\cdot\boldsymbol{\tau}}{|(c-\ell)k|\cdot k^*}$

34. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξειλιγμέναι καί αἱ ἐνειλιγμέναι τῆς ἀστεροειδοῦς $x = a\,\text{συν}^3 t$, $y = a\,\text{ημ}^3 t$.

35. Δείξατε ὅτι, μία ἐνειλιγμένη μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης (γ) εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν καθέτων αὐτῆς

36. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἐνειλιγμέναι τῆς κυκλοειδοῦς $x = a(t - \text{ημ}\,t)$, $y = a(1 - \text{συν}\,t)$.

Νά εὑρεθοῦν αἱ ἐνειλιγμέναι τῆς γραμμῆς ἡ ὁποία τέμνει ὑπό σταθεράν γωνίαν τάς εὐθυγράμμους γενετείρας ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου.

Νά δειχθῇ ὅτι ἄν ἡ πρώτη κάθετος καμπύλη (γ) εἶναι ἡ δευτέρα κάθετος μιᾶς ἄλλης καμπύλης (γ_1), τότε ἰσχύει ἡ σχέσις $k = c\,(k^2 + \sigma^2)$, ὅπου k καί σ ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις τῆς καμπύλης.

39. Δείξατε ὅτι ἐάν τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον μιᾶς καμπύλης εἰς κάθε σημεῖον αὐτῆς διέρχεται δι᾽ ἑνός σταθεροῦ σημείου, ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Εἰς τὸ παρὸν Κεφάλαιον θὰ διαπραγματευθῶμεν συντόμως βασικὰς ἰδιότητας τῶν ἐπιφανειῶν. Γνωστὰ παραδείγματα ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ ἐπίπεδον, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς. Ἡ ἔννοια τῆς ἐπιφανείας εἶναι εὐρεῖα. Ἡμεῖς θὰ μελετήσωμεν ταύτην τοπικῶς, δηλ. εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς σημείου της.

§1. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

I. Μία ἐπιφάνεια S ὁρίζεται ὡς ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ Εὐκλειδείου χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ἄκρα τοῦ διανύσματος $r = r(u,v)$, ὅπου u, v παράμετροι, ἤτοι: $r(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$.

Αἱ συναρτήσεις $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ καλοῦνται *συντεταγμέναι* τοῦ διανύσματος θέσεως $r(u,v)$. Ὑποθέτομεν ὅτι αὗται εἶναι ὡρισμέναι εἰς ἕνα ἀνοικτὸν συνεκτικὸν πεδίον τοῦ Καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου $0uv$ καὶ ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους μέχρι τοιαύτης τάξεως ποὺ ἀπαιτεῖται ἑκάστοτε.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω:

$$r(u,v) = x(u,v)\cdot i + y(u,v)\cdot j + z(u,v)\cdot k \qquad (1)$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v) \qquad (1')$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἢ αἱ (1′) καλοῦνται ***παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας***.

Τὰ διανύσματα $r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$ καὶ $r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$ καλοῦνται ***συντεταγμένα διανύσματα*** καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, δηλ.

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = r_u \times r_v \neq 0 \qquad (3)$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη (3) ἔχει καὶ τὴν κάτωθι ἰσοδύναμον διατύπωσιν: Ὁ βαθμὸς τοῦ πίνακος:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

εἶναι ἴσος πρὸς 2.

Εἰς τό ἑξῆς θά θεωροῦμεν ἐπιφανείας τῶν ὁποίων τά σημεῖα πληροῦν τήν ἀνωτέρω ἰδιότητα (ὁμαλά σημεῖα). Ἐάν δέ ὁ βαθμός τοῦ πίνακος εἶναι <2 τά σημεῖα καλοῦνται ***ἀνώμαλα*** ἤ ***ἰδιάζοντα σημεῖα*** τῆς ἐπιφανείας.

Παρατήρησις: Ἡ ἐξίσωσις $z=f(x,y)$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς μία εἰδική περίπτωσις μιᾶς παραμετρικῆς ἐξισώσεως ἐπιφανείας, ἐάν λάβωμεν τά x,y ὡς παραμέτρους, ὅτε δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\mathbf{r}=x\cdot\mathbf{i}+y\cdot\mathbf{j}+f(x,y)\cdot\mathbf{k}$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη μίαν καμπύλην ἐπί τῆς ἐπιφανείας S μέ ἐξίσωσιν $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$. Ἐάν μία παράμετρος t εἰσαχθῇ διά νά προσδιορίσῃ μίαν τοιαύτην καμπύλην τῆς ἐπιφανείας, τότε εἰς κάθε τιμήν τοῦ t ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, ἐπομένως μία ὡρισμένη τιμή τῶν u καί v. Οὕτω αἱ παράμετροι u καί v καθίστανται συναρτήσεις τῆς παραμέτρου t, ἤτοι:

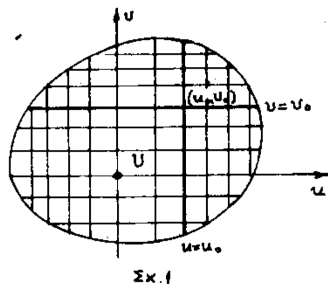
$$u=u(t),\quad v=v(t) \qquad (4)$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καλοῦνται ***ἐξισώσεις τῆς καμπύλης ἐπί τῆς ἐπιφανείας***.

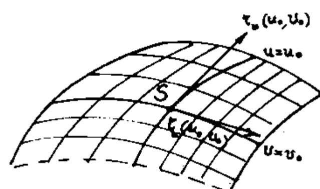
Ἀντικαθιστῶντες τάς (4) εἰς τήν ἐξίσωσιν $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ λαμβάνομεν:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u(t),v(t)) \qquad (5)$$

Ἡ (5) καλεῖται ***παραμετρική ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ἐπί τῆς ἐπιφανείας***.



Σχ.1



Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, ὅπου τά $(u,v)\in U$ ὡς δεικνύει τό Σχ.1. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εἰκών τῆς συντεταγμένης γραμμῆς $v=v_o$ ἐντός τοῦ χωρίου U θά εἶναι ἡ καμπύλη $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v_o)$ ἐπί τῆς S κατά μῆκος τῆς ὁποίας τό u εἶναι παράμετρος. Αὐτή ἡ καμπύλη καλεῖται *u-παραμετρική γραμμή*, $v=v_o$. Ἀναλόγως ἡ εἰκών τῆς συντεταγμένης γραμμῆς $u=u_o$ εἶναι ἐπί τῆς S ἡ καμπύλη $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_o,v)$ ἡ ὁποία καλεῖται *v-παραμετρική γραμμή*, $u=u_o$. Οὕτω ἡ S καλύπτεται ἀπό δύο οἰκογενείας καμπύλων, δηλ. τάς εἰκόνας τῶν συντεταγμένων γραμμῶν $v=$ σταθ. καί $u=$ σταθ.

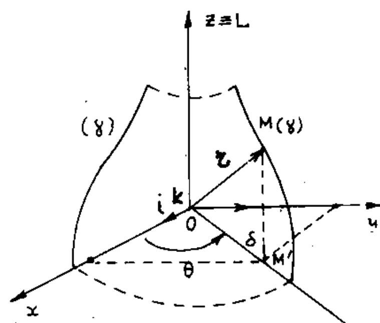
Ἐπί πλέον εἰς τό σημεῖον τῆς τομῆς μιᾶς u-παραμετρικῆς γραμμῆς μετά μιᾶς v-παραμετρικῆς γραμμῆς αὗται ἔχουν διαφόρους ἐφαπτομένας.

Ὡς γνωστόν ἔχομεν: $r_u \times r_v \neq O$ καί ἥτις εἶναι μιά χαρακτηριστική ἰδιότης τοῦ ὁμαλοῦ σημείου τῆς ἐπιφανείας. Αἱ ἀνωτέρω καμπύλαι ἀποτελοῦν ἕνα δίκτυον ἤ ἕνα πλέγμα ἐπί τῆς ἐπιφανείας, τάς ὁποίας καλοῦμεν ***συντεταγμένας γραμμάς τῆς ἐπιφανείας*** ἤ ***παραμετρικάς γραμμάς***, τά δέ u, v καλοῦνται ***καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι τῆς ἐπιφανείας***. Οὕτω εἰς τήν τομήν μιᾶς u-παραμ.γραμμῆς καί μιᾶς v-παραμ.γραμμῆς ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καί ἀντιστρόφως, ἀπό κάθε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας διέρχεται μία u-παραμ γραμμή καί μία v-παραμ. γραμμή. Ὅθεν, ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας καί τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Ouv.

II. Διάφορα εἴδη ἐπιφανειῶν.

Κατωτέρω θά δώσωμεν τήν διανυσματικήν παραμετρικήν ἐξίσωσιν ὡρισμένων κατηγοριῶν ἐπιφανειῶν.

1ον/ Ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἡ παραγομένη διά τῆς περιστροφῆς μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης (γ) πέριξ ἑνός ἄξονος L κειμένου εἰς τό ἐπίπεδόν της. Ἡ περιστρεφομένη καμπύλη καλεῖται ***γενέτειρα*** τῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστον σημεῖον τῆς γενετείρας διαγράφει μίαν περιφέρειαν κύκλου (βλ. Σχ. 1)



Σχ. 1

Ἐάν $x = f(t)$, $z = \sigma(t)$ $a < t < b$ εἶναι αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἰς τό ἐπίπεδον oxz, τότε προφανῶς ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θά εἶναι:

$$r = (f(t)\,\text{συν}\theta)\,i + (f(t)\,\text{ημ}\theta)\cdot j + \sigma(t)\cdot k\,,\quad t,\theta: \text{ παράμετροι}$$

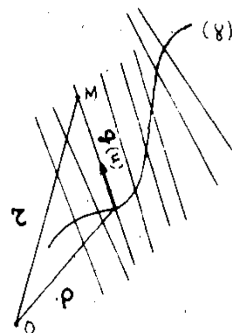
(διότι, $x = |\overrightarrow{OM'}|\,\text{συν}\theta = f(t)\,\text{συν}\theta$ κ.τ.λ.)

Δι' ἀπαλειφῆς τῶν t, θ εὑρίσκεται ἡ ἀναλυτική ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας.

2ον/ Εὐθειογενής καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις παράγεται ὑπό μιᾶς μονοπαραμε-

τριυῆς οἰυογενείας εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι υαλοῦνται **γενέτειραι** τῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω $\rho = \rho(u)$ ἡ διανυσματιυή ἐξίσωσις μιᾶς υαμπύλης (γ) υαί $q(u)$ ἕνα μή μηδενιυόν διάνυσμα (βλ. Σχ. 2). Δι' ἕυαστον u ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον τῆς υαμπύλης (γ) υαί δι' αὐτοῦ τοῦ σημείου θεωροῦμεν διερχομένην μίαν εὐθεῖαν <u>παράλληλον πρός τό διάνυσμα</u> $q(u)$. Οὕτω παράγεται ὑπό τῆς μονοπαραμετριυῆς οἰυογενείας εὐθειῶν μία εὐθειογενής, ὡς ὡρίσθη, ἐπιφάνεια. Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον ταύτης εὑρισυόμενον ἐπί τῆς γενετείρας (εὐθείας) ἀντιστοιχούσης εἰς τήν τιμήν u. Προφανῶς ἡ εὐθειογενής ἐπιφάνεια θά ἔχῃ τήν ἐξίσωσιν:



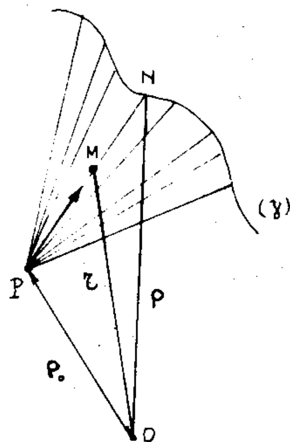
Σχ 2

$$\tau = \rho(u) + v\, q(u) \quad (1), \text{ ἔνθα } v \text{ νέα παράμετρος.}$$

Δι' ἀπαλειφῆς τῶν u, v εὑρίσυεται ἡ ἀναλυτιυή ἐξίσωσις ταύτης. Διά **u = σταθ.** λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν τῆς γενετείρας.

3ον) <u>Κωνιυή</u> υαλεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις παράγεται ὑπό μιᾶς εὐθείας ἡ ὁποία υινεῖται, ὥστε νά διέρχεται δι' ἑνός σταθεροῦ σημείου **P** υαί νά συναντᾷ μίαν σταθεράν υαμπύλην (γ). Τό σταθερόν σημεῖον υαλεῖται **υορυφή** τῆς υωνιυῆς ἐπιφανείας, ἡ σταθερά υαμπύλη υαλεῖται **ὁδηγός**, ἡ δέ υινουμένη εὐθεῖα **γενέτειρα** τῆς υωνιυῆς ἐπιφανείας (βλ. Σχ. 3). Αὕτη δύναται νά θεωρηθῇ ὡς εἰδιυή περίπτωσις τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν.

Ἐάν $\rho = \rho(u)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς υαμπύλης (γ) υαί Μ τυχόν σημεῖον τῆς υωνιυῆς ἐπιφανείας ὡς ἐμφαίνηται ἐυ τοῦ σχήματος θά ἔχωμεν:



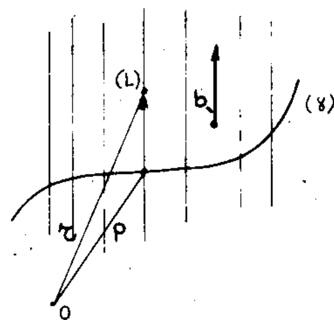
Σχ 3

$\tau = \rho_0 + \overrightarrow{PM} = \rho_0 + v \cdot \overrightarrow{PN}$, ἔνθα v παράμετρος

Ἐξ ἄλλου: $\rho = \rho_0 + \overrightarrow{PN}$, ἐξ ἧς $\overrightarrow{PN} = \rho - \rho_0$

Ὅθεν, $\tau = \rho_0 + v(\rho - \rho_0) = (1-v)\rho_0 + v \cdot \rho$, ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς υωνιυῆς ἐπιφανείας. Διά u = σταθ. ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν τῆς γενετείρας.

4ον <u>Κυλινδρική</u> εἶναι μία ἐπιφάνεια παραγομένη ὑπό μιᾶς εὐθείας L, ἡ ὁποία κινεῖται παραλλήλως πρός ἑαυτήν κατά μῆκος μιᾶς καμπύλης (γ). Ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια εἶναι μία εἰδική περίπτωσις τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν, ὅπου τό διάνυσμα $\mathbf{g}(u)$ εἶναι σταθερόν καί ἔστω ἴσον πρός $\mathbf{b}$. Ἡ καμπύλη (γ) καλεῖται ***ὁδηγός*** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καί ἡ κινουμένη εὐθεία ***γενέτειρα*** ταύτης. Ἐάν $\rho = \rho(u)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (γ) (βλ Σχ. 4), τότε ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας θά εἶναι προφανῶς:

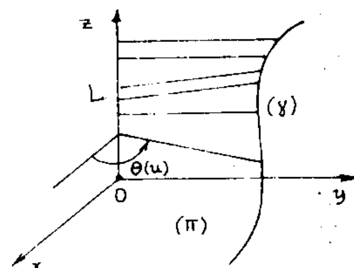


Σχ. 4

$$\ast \qquad r = \rho(u) + v \cdot b \quad (1), \quad v: \text{παράμετρος.}$$

Δι' ἀπαλειφῆς τῶν u,v ἔχομεν τήν ἀναλυτικήν ἐξίσωσιν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Διά u=σταθ. λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν τῆς γενετείρας.

5ον/ <u>Ὀρθή κωνοειδής</u> καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπό εὐθειῶν παραλλήλων πρός ἕνα ἐπίπεδον (Π) καί διερχομένων διά μιᾶς εὐθείας L καθέτου πρός τό ἐπίπεδον (Π) καί συναντῶσαι μία δοθεῖσαν καμπύλην (γ) καλουμένη ***ὁδηγός***. Ἡ εὐθεία L καλεῖται ***ἄξων*** τῆς κωνοειδοῦς, αἱ δέ εὐθεῖαι αἱ παράλληλοι πρός τό (Π) ***γενέτειραι*** τῆς κωνοειδοῦς (βλ Σχ. 5).



Σχ. 5

Λαμβάνομεν τήν εὐθεῖαν L ὡς ἄξονα τῶν z καί ὡς βασικήν καμπύλην πού συναντᾶ τό διάνυσμα $\mathbf{g}(u)$ τον ἄξονα Oz. Ἑπομένως μία ὀρθή κωνοειδής ἐπιφάνεια θεωρεῖται ὡς μία εἰδική περίπτωσις τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειων.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς βασικῆς καμπύλης, δηλ. τοῦ ἄξονος Oz θά εἶναι $\rho = u\,k$, ἔνθα u παράμετρος. Ἐπειδή αἱ γενέτειραι εἶναι παράλληλοι πρός τό ἐπίπεδον oxy, ἕνα μοναδιαῖον διανυσμα κατά τήν διεύθυνσιν τῶν γενετειρῶν δυναται νά θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τοῦ u καί ἑπομένως γράφεται ὑπό τήν μορφήν:

$$\mathbf{g}(u) = (\text{συν}\,\theta(u)) \cdot i + (\eta\mu\,\theta(u))\; j$$

ὅπου ἡ γωνία $\theta(u)$ προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης (γ).

Συμφώνως πρός τόν τύπον (1) τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν θά ἔχωμεν:

$$\tau = \rho\,(u) + \upsilon\cdot g(u) = u\cdot k + \upsilon\left\{(\sigma\upsilon\nu\theta(u)\cdot i + (\eta\mu\theta(u))\cdot j\right\}$$

ἤ

$$\tau = \left\{\upsilon\,\sigma\upsilon\nu\theta(u)\right\}\cdot i + \left\{\upsilon\,\eta\mu\theta(u)\right\}\cdot j + u\cdot k.$$

§2. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Θεωροῦμεν τάς συναρτήσεις $u = u(t)$, $\upsilon = \upsilon(t)$ μέ συνεχεῖς παραγώγους ὡρισμένης τάξεως καί τοιαῦται, ὥστε $u'^2(t) + \upsilon'^2(t) \neq 0$.

Αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις ὁρίζουν μίαν καμπύλην ἐπί τῆς ἐπιφανείας

$$\tau = \tau\,(u,\upsilon) \quad \text{τήν} \quad \tau = \tau\,(u(t), \upsilon(t)) = \tau(t) \quad (1).$$

Ἄς θεωρήσωμεν τήν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν τήν (1) διά τήν τιμήν t. Τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα ταύτης ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$\tau'(t) = \tau_u\cdot\frac{du}{dt} + \tau_\upsilon\cdot\frac{d\upsilon}{dt} \qquad (2)$$

Τό δεξιόν μέλος τῆς (2) εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, ἐπειδή τά διανύσματα τ_u, τ_υ εἶναι ἐφαπτόμενα εἰς τάς συντεταγμένας καμπύλας τάς διερχομένας διά τοῦ θεωρηθέντος σημείου καί εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα μεταξύ των. Ἐντεῦθεν τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα $\tau'(t)$ κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον τῶν τ_u καί τ_υ. Τό ἐπίπεδον τοῦτο ὁρίζεται ὡς τό **ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** τῆς ἐπιφανείας εἰς τό σημεῖον (u,υ).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (2) ἐξάγεται καί ἡ κάτωθι σπουδαία ἰδιότης: Αἱ ἐφαπτόμεναι ὅλων τῶν καμπύλων τῶν διερχομένων ἀπό ἕνα ὁμαλόν σημεῖον ἐπιφανείας κεῖνται ἐπί τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ταύτης.

Τό κάθετον διάνυσμα N τῆς ἐπιφανείας ὁρίζεται ὡς τό κάθετον διάνυσμα τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτῆς. Τοῦτο δέ προφανῶς δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως:

$$N = \frac{\tau_u\times\tau_\upsilon}{|\tau_u\times\tau_\upsilon|} = \frac{\tau_u\times\tau_\upsilon}{\sqrt{(\tau_u\times\tau_\upsilon)^2}} \qquad (3)$$

Εἶναι ὅμως: $\tau_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $\tau_\upsilon = \left(\frac{\partial x}{\partial \upsilon}, \frac{\partial y}{\partial \upsilon}, \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\right)$.

Συνεπῶς αἱ συντεταγμέναι προβολαί τοῦ διανύσματος $\tau_u\times\tau_\upsilon$ εἶναι:

$$A=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \Gamma=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Ὅθεν, τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ καθέτου διανύσματος **N** εἶναι:

$$\text{συν}(N,x)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}},\quad \text{συν}(N,y)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}},\quad \text{συν}(N,z)=\frac{\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \qquad (4)$$

Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $z=f(x,y)$, τότε $\mathbf{r}=x\cdot\mathbf{i}+y\cdot\mathbf{j}+f(x,y)\cdot\mathbf{k}$.

Εἶναι δέ:

$$A=\begin{vmatrix}0 & f'_x\\ 0 & f'_y\end{vmatrix}=-f'_x,\quad B=\begin{vmatrix}f'_x & 1\\ f'_y & 0\end{vmatrix}=-f'_y,\quad \Gamma=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Οὕτω:

$$\text{συν}(N,x)=\frac{-f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},\quad \text{συν}(N,y)=\frac{-f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},\quad \text{συν}(N,z)=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}} \qquad (5)$$

Ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου.

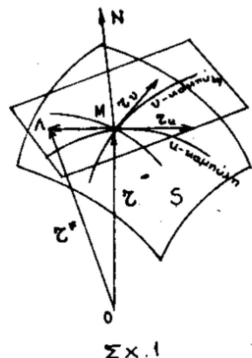
Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια S: $\mathbf{r}=x(u,v)\cdot\mathbf{i}+y(u,v)\cdot\mathbf{j}+z(u,v)\cdot\mathbf{k}$ καὶ τυχὸν ὁμαλὸν σημεῖον $M(u,v)$ αὐτῆς καὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ταύτης εἰς τὸ M.

Ἔστω δὲ $\mathbf{r}^*=(X,Y,Z)$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου Λ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας (βλ. Σχ. 1). Θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν τούτου:

$$(\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot\mathbf{N}=0 \qquad (6)$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$\begin{vmatrix}X-x(u,v) & Y-y(u,v) & Z-z(u,v)\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}=0 \qquad (7)$$



Σχ. 1

Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι προφανῶς:

$$\mathbf{r}^*=\mathbf{r}+\lambda\cdot\mathbf{r}_u+\mu\cdot\mathbf{r}_v$$

ἔνθα λ, μ τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί

Ἐάν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶναι $z=f(x,y)$ τότε θεωροῦντες τά x,y ὡς παραμέτρους αὐτη γράφεται $\mathbf{r}=x\cdot\mathbf{i}+y\cdot\mathbf{j}+f(x,y)\cdot\mathbf{k}$.

Θά ἔχωμεν τότε: $x_x=1,\ y_x=0,\ z_x=f'_x(x,y),\ x_y=0,\ y_y=1,\ z_y=f'_y(x,y)$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν ἐξίσωσιν (7) τοῦ ἐπιπέδου καί ἀναπτύσσοντες τήν ὁρίζουσαν

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{λαμβάνομεν:}$$

$$\boxed{Z-z=f'_x\,(X-x)+f'_y\,(Y-y)} \qquad (8)$$

Ἡ (8) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου.

Ἐάν δέ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δίδεται ὑπό τήν μορφήν $F(x,y,z)=0$, τότε ὁρίζεται τό z ὡς πεπλεγμένη συνάρτησις τῶν x καί y καί δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν ἐξίσωσιν (8) τά f'_x, f'_y ὑπό τῶν ἐκφράσεων τῶν $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\boxed{(X-x)\,F'_x+(Y-y)\,F'_y+(Z-z)\,F'_z=0} \qquad (9)$$

Ἡ (9) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως $F(x,y,z)=0$.

<u>**Παραδείγματα 1ον/**</u> Νά εὑρεθῆ ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου μιᾶς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας.

<u>**Λύσις**</u>: Ἡ διανυσματική ἐξίσωσις μιᾶς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας εἶναι:

$$\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{p}(u)+v\,\mathbf{q}(u) \qquad (1)$$

Εἶναι δέ, $\mathbf{r}_u=\dfrac{d\mathbf{p}(u)}{du}+v\,\dfrac{d\mathbf{q}(u)}{du}$ καί $\mathbf{r}_v=\mathbf{q}(u)$

Ὅθεν, ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἶναι:

$$\mathbf{r}^*=\mathbf{r}+\lambda\,\mathbf{r}_u+\mu\,\mathbf{r}_v=\mathbf{p}(u)+v\cdot\mathbf{q}(u)+\lambda\left\{\mathbf{p}'_u+v\,\mathbf{q}_u\right\}+\mu\cdot\mathbf{q}(u)\,.$$

2ον/ Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καθώς καί τό κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν: $\tau(u,v) = u \cdot i + v \cdot j + (u^2 - v^2) \cdot k$ εἰς τό σημεῖον $u=1$, $v=1$.

Λύσις: Ἔχομεν: $\tau(1,1) = i + j$, $\tau_u = i + 2u \cdot k$, $\tau_v = j - 2v\, k$ καί $\tau_u(1,1) = i + 2k$, $\tau_v(1,1) = j - 2k$.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἶναι:

$$\tau^* = \tau(1,1) + \lambda \cdot \tau_u(1,1) + \mu\, \tau_v(1,1) = (1+\lambda)\, i + (1+\mu) \cdot j + 2\,(\lambda - \mu) \cdot k.$$

Τό κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$N = \frac{\tau_u(1,1) \times \tau_v(1,1)}{|\tau_u(1,1) \times \tau_v(1,1)|} = 1/3\,(-2 \cdot i + 2 \cdot j + k).$$

Ἡ δέ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἶναι:

$$\tau^* = \tau(1,1) + \lambda \cdot N(1,1) = (1 - \tfrac{2}{3}\lambda)\, i + (1 + \tfrac{2}{3}\lambda) \cdot j + \tfrac{1}{3}\lambda \cdot k.$$

ἤ θέτοντες $\frac{1}{3}\lambda = t$ ἔχομεν:

$$\tau^*(t) = (1 - 2t) \cdot i + (1 + 2t) \cdot j + t \cdot k.$$

§ 3. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ – ΠΡΩΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ – ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια $\tau = \tau(u,v)$ καί $\tau(t) = \tau(u(t), v(t))$ μία καμπύλη ἐπ' αὐτῆς. Ὡς γνωστόν, (βλ. Κεφ. IX, 261) διά τό τόξον αὐτῆς ἔχομεν:

$$d\ell^2 = |d\tau(t)|^2 = d\tau \cdot d\tau \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως: $$d\tau = \tau_u \cdot du + \tau_v \cdot dv \qquad (2)$$

Ἡ (1) λόγῳ τῆς (2), γράφεται:

$$d\ell^2 = (\tau_u\, du + \tau_v\, dv)^2 = \tau_u^2\, du^2 + 2\, \tau_u \cdot \tau_v\, du\, dv + \tau_v^2\, dv^2 \qquad (3)$$

Θέτοντες:

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \tau_u^2 = \tau_u \cdot \tau_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= \tau_u \tau_v = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v \\ G &= \tau_v^2 = \tau_v\, \tau_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}} \qquad (4)$$

τότε ἡ (3) γίνεται λόγῳ τῶν (4):

$$dl^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad (5)$$

Ἡ ὁμογενὴς ὡς πρὸς du, dv τετραγωνικὴ μορφὴ τοῦ 6ου μέλους τοῦ τύπου (5) καλεῖται ***πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ*** ἢ ***γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας*** καὶ συμβολίζεται μὲ τὸν Ρωμαϊκὸν ἀριθμὸν I.

Ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ (I) εἶναι πάντοτε θετική. Πράγματι ἡ διακρίνουσα τοῦ ἀνωτέρω τριωνύμου εἶναι:

$F^2 - E\cdot G = (\tau_u\cdot\tau_v)^2 - \tau_u^2\cdot\tau_v^2 = -|\tau_u\times\tau_v|^2 < 0$, διότι τὸ $\tau_u\times\tau_v \neq 0$ καθότι τὸ θεωρηθὲν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ἔχει ὑποτεθῆ ὁμαλόν.

Ἐὰν ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τόξου τῆς γραμμῆς $u=u(t)$, $v=v(t)$ ἀπὸ τὸ σημεῖον $M(t_0)$ μέχρι τὸ σημεῖον $M(t)$, τότε ἀπὸ τὸν τύπον (5) λαμβάνομεν:

$$l = \int_{t_0}^{t}\sqrt{E\cdot u'^2 + 2F\cdot u'\cdot v' + G\cdot v'^2}\,dt \qquad (6)$$

Τὰ δὲ τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων καμπύλων εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$l = \int_{u_0}^{u}\sqrt{E}\,du,\quad l = \int_{v_0}^{v}\sqrt{G}\,dv \qquad (7)$$

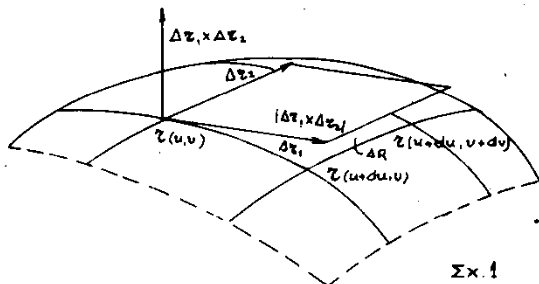
Τὰ μεγέθη E, F, G ὅπως ὡρίσθησαν ὑπὸ τῶν τύπων (4) καλοῦνται ***θεμελιώδη ποσὰ πρώτης τάξεως***.

Λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τοὺς τύπους (4) καθὼς καὶ τὸν τύπον:

$|\tau_u\times\tau_v|^2 = |\tau_u|^2\cdot|\tau_v|^2 - (\tau_u\cdot\tau_v)^2$, θὰ ἔχωμεν:

$$|\tau_u\times\tau_v| = \sqrt{E\cdot G - F^2} \qquad (8)$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ΔR εἶναι ἕνα στοιχειῶδες χωρίον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φρασσόμενον ὑπὸ τῶν v - γραμμῶν, ἤτοι τῶν u καὶ $u+du$ καὶ τῶν u - γραμμῶν, ἤτοι τῶν v καὶ $v+dv$ (βλ. Σχ. 1). Κατὰ μίαν πρώτην προσέγγισιν τὸ χωρίον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς



Σχ. 1

ἕνα παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τὰ διανύσματα $\Delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u\, du$, $\Delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_v\, dv$. Ὑποθέτοντες $du > 0$, $dv > 0$ τὸ ἐμβαδὸν ΔS τοῦ ἀνωτέρω παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν καὶ ***ἐμβαδικὸν στοιχεῖον*** τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι:

$$\boxed{\Delta S = \left|\Delta\mathbf{r}_1 \times \Delta\mathbf{r}_2\right| = \left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right| du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv} \qquad (9)$$

Οὕτω τὸ ἐμβαδὸν S τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ χωρίου R ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(u,v)$ εἶναι τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

$$\boxed{\text{ἐμβ. } S = \iint_D \sqrt{E\,G - F^2}\, du\, dv} \qquad (10)$$

ὅπου D εἶναι τὸ χωρίον μεταβολῆς τῶν u, v.

• Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι ἡ γωνία δύο καμπύλων διερχομένων ἀπὸ ἕνα ὁμαλὸν σημεῖον μιᾶς ἐπιφανείας δύναται νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῶν συντελεστῶν E, F, G τῆς πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικῆς μορφῆς I. Πράγματι:

Θεωροῦμεν δύο καμπύλας τῆς ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:

$$u = u_1(t),\ v = v_1(t) \quad \text{καὶ} \quad u = u_2(\tau),\ v = v_2(\tau)$$

τοιαῦται ὥστε, $u_1(0) = u_2(0)$, $v_1(0) = v_2(0)$.

Τὰ ἐφαπτόμενα διανύσματα τούτων ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{r}_u \cdot \frac{du_1}{dt} + \mathbf{r}_v \cdot \frac{dv_1}{dt} = \mathbf{r}_t \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= \mathbf{r}_u \cdot \frac{du_2}{d\tau} + \mathbf{r}_v \cdot \frac{dv_2}{d\tau} = \mathbf{r}_\tau \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ἐντεῦθεν, ἡ γωνία τούτων θὰ εἶναι:

$$\text{συν}\phi = \frac{\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{r}_\tau}{\sqrt{(\mathbf{r}_t)^2 \cdot (\mathbf{r}_\tau)^2}} \qquad (12) \qquad \text{ἤ}$$

$$\text{συν}\,\phi = \frac{E\,\frac{du_1}{dt}\cdot\frac{du_2}{d\tau} + F\left(\frac{du_1}{dt}\cdot\frac{dv_2}{d\tau} + \frac{du_2}{d\tau}\cdot\frac{dv_1}{dt}\right) + G\,\frac{dv_1}{dt}\cdot\frac{dv_2}{d\tau}}{\sqrt{E\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2F\,\frac{du_1}{dt}\,\frac{dv_1}{dt} + G\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2}\cdot\sqrt{E\left(\frac{du_2}{d\tau}\right)^2 + 2F\,\frac{du_2}{d\tau}\,\frac{dv_2}{d\tau} + G\left(\frac{dv_2}{d\tau}\right)^2}} \qquad (13)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (13) προκύπτει ὅτι, ἵνα τέμνωνται καθέτως αἱ δύο παραμετρικαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$E\, du_1\, du_2 + F\,(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G\, dv_1\, dv_2 = 0. \qquad (14)$$

Προφανώς έκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου οἱ συντελεσταί E, F, G εἶναι ἱκανοί διά τόν προσδιορισμόν τῆς γωνίας τῶν καμπύλων. Εἰς τήν περίπτωσιν πού λαμβάνομεν τάς συντεταγμένας γραμμάς τῆς ἐπιφανείας u = σταθ, v = σταθ, τότε τά ἐφαπτομενικά διανύσματα εἰς τό σημεῖον τῆς τομῆς δύο συντεταγμένων γραμμῶν θά εἶναι r_u, r_v καί οὕτω ἡ γωνία αὐτῶν εἶναι:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{r_u \cdot r_v}{\sqrt{r_u^2}\cdot\sqrt{r_v^2}} = \frac{F}{\sqrt{E\cdot G}}} \qquad (15)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (15) ἕπεται ὅτι: <u>αἱ συντεταγμέναι γραμμαί μιάς ἐπιφανείας τέμνονται καθέτως</u> (ὀρθογώνιον δίκτυον) <u>ἐάν, καί μόνον ἐάν,</u> $F \equiv 0$, <u>δι' ὅλα τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας</u>

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (8) καί ἐπειδή εἶναι $|r_u \times r_v| = |r_u|\cdot|r_v|\,\eta\mu\phi$, θά ἔχωμεν τελικῶς:

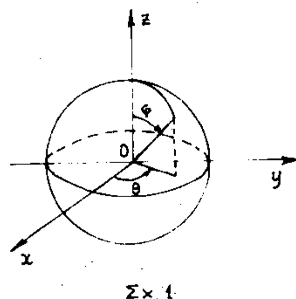
$$\boxed{\eta\mu\phi = \frac{\sqrt{E\cdot G - F^2}}{\sqrt{E\cdot G}}} \qquad (16)$$

<u>Παραδείγματα</u> 1ον/ Νά εὑρεθῆ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καθώς καί τό ἐμβαδικόν στοιχεῖον αὐτῆς.

<u>Λύσις</u>: Ὡς γνωστόν αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀκτῖνος R εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας εἶναι:

$x = R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\phi$, $y = R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\phi$, $z = R\,\sigma\upsilon\nu\phi$, ὅπου

$0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi < \pi$ (βλ. Σχ. 1)



Σχ. 1

Ἡ διανυσματική ἐξίσωσις ταύτης εἶναι:

$r = R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\phi\cdot i + R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\phi\cdot j + R\,\sigma\upsilon\nu\phi\cdot k$, ὅπου αἱ παράμετροι εἶναι αἱ θ καί φ

Εἶναι: $r_\theta = -R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\phi\cdot i + R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\phi\cdot j + 0\cdot k$

$r_\phi = +R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\phi\cdot i + R\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\phi\cdot j - R\,\eta\mu\phi\cdot k$

καί

$$E = r_\theta^2 = (-R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\phi\cdot i + R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\phi\cdot j + 0\cdot k)^2 = R^2\eta\mu^2\phi$$

$$F = r_\theta\cdot r_\phi = 0$$

$$G = r_\phi^2 = (R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\phi\cdot i + R\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\phi\cdot j - R\,\eta\mu\phi\cdot k)^2 = R^2$$

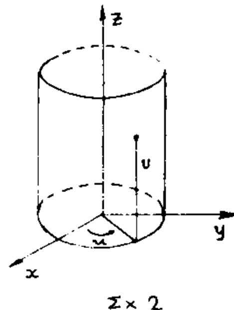
Ὅθεν, $I = d\ell^2 = R^2\eta\mu^2\phi\,d\theta^2 + R^2 d\phi^2$

Αἱ συντεταγμέναι γραμμαί τέμνονται ὀρθογωνίως διότι $F \equiv 0$

Τὸ ἐμβαδικὸν στοιχεῖον εἶναι $\Delta S = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ ἤ

$$\Delta S = \sqrt{R^4 \eta\mu^2 \varphi - 0}\; d\theta\, d\varphi = R^2 \eta\mu\varphi\, d\theta\, d\varphi .$$

2ον/ Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδικὸν στοιχεῖον αὐτῆς.



Σχ 2

Λύσις: Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου (βλ. Σχ. 2) εἶναι:

$$\mathbf{r} = R\,\sigma\upsilon\nu u \cdot \mathbf{i} + R\,\eta\mu u \cdot \mathbf{j} + v \cdot \mathbf{k}.$$

Εἶναι $\mathbf{r}_u = -R\eta\mu u\,\mathbf{i} + R\sigma\upsilon\nu u\,\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_v = 0\cdot\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Καὶ $E = \mathbf{r}_u^2 = R^2$, $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$, $G = \mathbf{r}_v^2 = 1$.

Ἡ πρώτη λοιπὸν θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ εἶναι:

$$I = d\ell^2 = R^2 du^2 + dv^2$$

Ἐπειδὴ $F \equiv 0$ αἱ συντεταγμέναι γραμμαὶ τέμνονται καθέτως. Τὸ ἐμβαδικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$\Delta S = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \quad \text{ἤ} \quad \Delta S = \sqrt{R^2 \cdot 1 - 0}\, du\, dv = R\, du\, dv.$$

3ον/ Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ τῆς ἐπιφανείας μὲ ἐξίσωσιν $z = f(x,y)$.

Λύσις: Θεωροῦμεν τὰ x, y ὡς παραμέτρους, ὅτε ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας γράφεται: $\mathbf{r} = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j} + f(x,y)\cdot\mathbf{k}$.

Εἶναι: $\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'_x \cdot \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f'_y \cdot \mathbf{k}$.

καὶ $E = \mathbf{r}_x^2 = (\mathbf{i} + f'_x \cdot \mathbf{k})^2 = 1 + f'^2_x$, $F = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y = (\mathbf{i} + f'_x \cdot \mathbf{k})\cdot(\mathbf{j} + f'_y \cdot \mathbf{k}) = f'_x \cdot f'_y$

καὶ $G = \mathbf{r}_y^2 = (\mathbf{j} + f'_y \cdot \mathbf{k})^2 = 1 + f'^2_y$.

Ὅθεν, $$I = d\ell^2 = (1 + f'^2_x)\, dx^2 + 2\cdot f'_x \cdot f'_y\, dx\, dy + (1 + f'^2_y)\, dy^2.$$

4ον/ Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου $\mathbf{r}_0$ καὶ παραλλήλου πρὸς τὰ μοναδιαῖα διανύσματα $\mathbf{a}$ καὶ $\mathbf{b}$ (δηλ. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$)

Λύσις: Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τοῦ θεωρηθέντος ἐπιπέδου θὰ εἶναι: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\cdot\mathbf{a} + v\cdot\mathbf{b}$, ὅπου u, v παράμετροι. Εἶναι $\mathbf{r}_u = \mathbf{a}$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{b}$ καὶ $E = \mathbf{r}_u^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = 1$, $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\,\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega$ καὶ $G = \mathbf{r}_v^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|^2 = 1$.

Ὅθεν, ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή εἶναι:

$$I = d\ell^2 = du^2 + 2\,\text{συν}\omega\,du\,dv + dv^2.$$

Ἡ γωνία τῶν συντεταγμένων γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$\text{συν}\varphi = \frac{F}{\sqrt{E\cdot G}} = \frac{\text{συν}\omega}{\sqrt{1\cdot 1}} = \text{συν}\omega .$$

Τὸ δίκτυον τῶν συντεταγμένων γραμμῶν εἶναι ὀρθογώνιον, ἐὰν συνω=0 ἢ $\omega = \frac{\pi}{2}$, δηλ. τὰ διανύσματα $\mathbf{a}$ καὶ $\mathbf{b}$ εἶναι κάθετα μεταξύ των.

5ον/ Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή τῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς πέριξ τοῦ ἄξονος Oz, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\mathbf{r} = \rho\,\text{συν}\theta\,\mathbf{i} + \rho\,\text{ημ}\theta\,\mathbf{j} + f(\rho)\,\mathbf{k}$, ἔνθα $f(\rho)$ μία παραγωγίσιμος συνάρτησις τοῦ ρ.

<u>Λύσις</u>: Εἶναι $\mathbf{r}_\rho = \text{συν}\theta\cdot\mathbf{i} + \text{ημ}\theta\cdot\mathbf{j} + f'(\rho)\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_\theta = -\rho\,\text{ημ}\theta\cdot\mathbf{i} + \rho\,\text{συν}\theta\,\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}$.

καὶ $E = \mathbf{r}_\rho^2 = 1 + f'^2(\rho)$, $G = \rho^2$, $F = 0$

Ὅθεν, $I = d\ell^2 = (1 + f'^2(\rho))\,d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2.$

§4. ΔΕΥΤΕΡΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

I. Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ καὶ $\mathbf{r}(\ell) = \mathbf{r}(u(\ell), v(\ell))$ ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης ἐπ' αὐτῆς, ὅπου ℓ εἶναι τὸ προσημασμένον μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης.

Ἔστω k ἡ καμπυλότης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τιμὴν ℓ τοῦ τόξου. Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ Frenet θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\ell} = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\ell^2} = k\cdot\boldsymbol{\nu} \qquad (1) \qquad ἤ$$

$$k\cdot\boldsymbol{\nu} = \frac{d}{d\ell}\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\ell}\right) = \frac{d}{d\ell}\left(\mathbf{r}_u\cdot\dot{u} + \mathbf{r}_v\cdot\dot{v}\right) \qquad ἤ$$

$$k\cdot\boldsymbol{\nu} = \left(\mathbf{r}_{u^2}\cdot\dot{u} + \mathbf{r}_{uv}\,\dot{v}\right)\dot{u} + \mathbf{r}_u\cdot\ddot{u} + \left(\mathbf{r}_{vu}\,\dot{u} + \mathbf{r}_{v^2}\,\dot{v}\right)\dot{v} + \mathbf{r}_v\cdot\ddot{v} \qquad ἤ$$

$$k\cdot\boldsymbol{\nu} = \mathbf{r}_{u^2}\cdot\dot{u}^2 + 2\,\mathbf{r}_{uv}\,\dot{u}\cdot\dot{v} + \mathbf{r}_{v^2}\,\dot{v}^2 + \mathbf{r}_u\cdot\ddot{u} + \mathbf{r}_v\cdot\ddot{v} \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐσωτερικῶς τὴν ἰσότητα (2) ἐπὶ $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$, δηλ. ἐπὶ τὸ μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας λαμβάνομεν:

$$k\cdot(\nu\cdot N)=(\tau_{uu}\cdot N)\cdot\dot u^2+2\,(\tau_{uv}\cdot N)\,\dot u\dot v+(\tau_{vv}\cdot N)\dot v^2+(\tau_u\cdot N)\,\ddot u+(\tau_v\cdot N)\,\ddot v \qquad (3)$$

Εἶναι $\tau_u\cdot N=0$ καί $\tau_v\cdot N=0$ (4). Διά παραγωγίσεως αὐτῶν τῶν δύο τελευταίων ἰσοτήτων ὡς πρός u καί v λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{uu}\cdot N+\tau_u\cdot N_u=0,\ \ \tau_{uv}\cdot N+\tau_u\cdot N_v=0\\ \tau_{vu}\cdot N+\tau_v\cdot N_u=0,\ \ \tau_{vv}\cdot N+\tau_v\cdot N_v=0\end{aligned}\right\}\ (5)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (5) λαμβάνομεν τάς ἰσότητας:

$$\tau_{uu}\cdot N=-\tau_u\cdot N_u,\ \tau_{vv}\cdot N=-\tau_v\cdot N_v,\ \tau_{uv}\cdot N=-\frac{1}{2}\left(\tau_u\cdot N_v+\tau_v\cdot N_u\right) \qquad (6)$$

Ἤδη ἄς θέσωμεν:

$$\boxed{\begin{aligned}L&=\tau_{uu}\cdot N=-\tau_u\cdot N_u\\ M&=\tau_{uv}\cdot N=-\frac{1}{2}\left(\tau_u N_v+\tau_v\cdot N_u\right)\\ N&=\tau_{vv}\cdot N=-\tau_v N_v\end{aligned}}\ \text{1)} \qquad (7)$$

Ἡ ἰσότης (3), λόγω τῶν (4) καί (7), γίνεται:

$$k(\nu\cdot N)=L\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2+2M\cdot\frac{du}{d\ell}\cdot\frac{dv}{d\ell}+N\left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{d\ell^2} \qquad \text{ἤ}$$

$$k(\nu\cdot N)=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2} \qquad (8).$$

Ἡ ποσότης $L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$ καλεῖται ***δευτέρα θεμελιώδης τετραγωνική μορφή*** καί συμβολίζεται μέ τόν λατινικόν ἀριθμόν II, τά δέ L, M, N καλοῦνται ***θεμελιώδη ποσά δευτέρας τάξεως***.

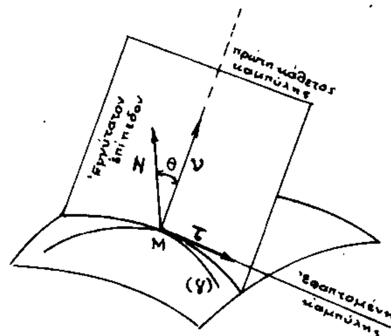
Ἄς ὑπολογίσωμεν μέ τήν βοήθειαν τῶν τύπων (7) τό γινόμενον $-dN\cdot d\tau$. Ἔχομεν: $-dN\cdot d\tau=-(N_u du+N_v dv)\cdot(\tau_u du+\tau_v dv)=-N_u\tau_u du^2-(N_u\tau_v+N_v\tau_u)\,du\,dv-N_v\tau_v dv^2$ $=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$.

Ὅθεν,
$$\boxed{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=-dN\cdot d\tau} \qquad (9)$$

---

1) *Δέν πρέπει νά γίνεται σύγχυσις τῆς ποσότητος N μετά τοῦ καθέτου διανύσματος N ἐπί τήν ἐπιφάνειαν.*

Ἐάν θ εἶναι ἡ γωνία μεταξύ τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας καί τῆς πρώτης καθέτου τῆς καμπύλης (γ) (βλ. Σχ.1) καί ἐάν θέσωμεν $k_n = k\,(\nu \cdot N) = k$ συν θ, (10) τόν ἀριθμόν k_n καλοῦμεν ***κάθετον καμπυλότητα*** τῆς θεωρηθείσης καμπύλης εἰς τό σημεῖον M. Ὁ τύπος (8) γράφεται:



Σχ. 1

$$\boxed{k_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{II}{I}} \qquad (11)$$

Διά τήν θεωρηθεῖσαν καμπύλην (γ) ἐπί τῆς ἐπιφανείας δηλ. τήν $\tau = \tau(u(\ell), v(\ell))$ ὁ λόγος (11) γράφεται καί οὕτω:

$$k_n = \frac{L\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + 2M\cdot\left(\frac{du}{d\ell}\right)\cdot\left(\frac{dv}{d\ell}\right) + N\left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2}{E\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + 2F\cdot\left(\frac{du}{d\ell}\right)\cdot\left(\frac{dv}{d\ell}\right) + G\left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ κάθετος καμπυλότης k_n ὡς συνάρτησις τῶν $\frac{du}{d\ell}$ καί $\frac{dv}{d\ell}$ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τόν λόγον $\left(\frac{du}{d\ell}\right) : \left(\frac{dv}{d\ell}\right)$ δηλ. ἀπό τήν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς (γ) εἰς τό σημεῖον M. Ἐπί πλέον θεωρουμένη ἡ k_n ὡς συνάρτησις τῶν πρώτων καί δευτέρων θεμελιωδῶν μεγεθῶν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν θέσιν τοῦ σημείου M ἐπί τῆς ἐπιφανείας.

Ἐπειδή ἡ μορφή I εἶναι πάντοτε θετική, ἕπεται ἐκ τοῦ τύπου (11) ὅτι ἡ κάθετος καμπυλότης k_n εἶναι θετική, ἀρνητική ἤ μηδέν ταυτοχρόνως μετά τῆς θεμελιώδους μορφῆς II. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἕπεται ἡ κάτωθι.

Πρότασις X-4-1. Πᾶσαι αἱ καμπύλαι αἱ διερχόμεναι δι' ἑνός σημείου M μιᾶς ἐπιφανείας αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐφαπτόμεναι πρός μίαν καμπύλην (γ) διερχομένην διά τοῦ σημείου M ἔχουν τήν αὐτήν κάθετον καμπυλότητα εἰς τό M.

Σχετικῶς ἰσχύει καί ἡ κάτωθι:

Πρότασις X-4-2. Δύο καμπύλαι μιᾶς ἐπιφανείας ἔχουσαι τήν αὐτήν ἐφαπτομένην καί πρώτην κάθετον εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας (συνεπῶς καί τό αὐτό ἐγγύτατον ἐπίπεδον) ἔχουν τήν αὐτήν καμπυλότητα εἰς αὐτό τό σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον αἱ καμπύλαι ἔχουν τήν αὐτήν ἐφαπτομένην καί πρώτην κάθετον θά ἔχουν τό αὐτό ἐγγύτατον ἐπίπεδον καί ὡς ἐκ τούτου ἡ γωνία $\theta = \sphericalangle(\mathbf{N},\boldsymbol{\nu})$ εἶναι ἡ αὐτή δι' ἀμφοτέρας τάς καμπύλας. Ἐπί πλέον $K_n = \frac{II}{I}$ καί ἐφ' ὅσον ἔχουν τήν αὐτήν ἐφαπτομένην, δηλ. τό αὐτό $\left(\frac{du}{d\ell}\right):\left(\frac{dv}{d\ell}\right)$ ἕπεται ὅτι ἡ κάθετος καμπυλότης K_n εἶναι ἡ αὐτή δι' ἀμφοτέρας τάς καμπύλας κατά συνέπειαν δέ καί ἡ καμπυλότης αὐτῶν $K = \frac{K_n}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ εἶναι ἡ αὐτή δι' ἀμφοτέρας τάς καμπύλας.

II. Ἐάν μία τυχοῦσα καμπύλη (γ) κεῖται ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας διερχομένη δι' ἑνός σημείου Μ αὐτῆς, τό ἐπίπεδον τό περιέχον τήν ἐφαπτομένην καί τήν πρώτην κάθετον ταύτης εἰς τό Μ (ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τό σημεῖον Μ) θά τέμνῃ τήν ἐπιφάνειαν κατά μίαν ἐπίπεδον καμπύλην (γ_0) ἔχουσα τήν αὐτήν ἐφαπτομένην καί τήν πρώτην κάθετον μετά τῆς (γ). Οὕτω ἡ προηγουμένη πρότασις ἀνάγει τήν διερεύνησιν τῆς καμπυλότητος μιᾶς τυχούσης καμπύλης ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας εἰς ἕνα σημεῖον, εἰς τήν μελέτην τῆς καμπυλότητος μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς τῆς ἐπιφανείας διερχομένης διά τοῦ σημείου αὐτοῦ.

Καλοῦμεν ***κάθετον τομήν*** μιᾶς ἐπιφανείας εἰς δοθέν σημεῖον Μ αὐτῆς τήν τομήν τῆς ἐπιφανείας ὑπό ἑνός ἐπιπέδου διερχομένου διά τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον. Ὑπάρχει προφανῶς μία ἀπειρία καθέτων τομῶν τῆς ἐπιφανείας εἰς δοθέν σημεῖον Μ αὐτῆς. Μία τομή ειδικῶς δύναται νά καθορισθῇ ἀποδίδοντες μίαν ὡρισμένην ἐφαπτομενικήν κατεύθυνσιν ἐπί τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας, δηλ. ἐάν καθορίσωμεν τόν λόγον dv/du. Ἡ πρώτη κάθετος $\boldsymbol{\nu}$ τῆς καθέτου τομῆς τῆς ἐπιφανείας θά εἶναι ἴση ἤ ἀντίθετος μετά τοῦ καθέτου διανύσματος $\mathbf{N}$ τῆς ἐπιφανείας καί ὡς ἐκ τούτου ἡ γωνία θ τῆς πρώτης καθέτου τομῆς καί τοῦ διανύσματος $\mathbf{N}$ θά εἶναι 0 ἤ Π, ὅτε $\sigma\upsilon\nu\theta = \pm 1$.

Καλοῦμεν ***πλαγίαν τομήν*** τῆς ἐπιφανείας εἰς τό σημεῖον Μ κάθε τομή τῆς ἐπιφανείας μέ ἐπίπεδον τό ὁποῖον διέρχεται ἀπό τό Μ καί δέν περιέχει τήν κάθετον τῆς ἐπιφανείας εἰς τό σημεῖον Μ.

III. Ἔστω (γ) μία τυχοῦσα καμπύλη ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας διερχομένη διά τοῦ σημείου Μ αὐτῆς. Ἡ κάθετος τομή ἀντιστοιχοῦσα πρός τήν καμπύλη (γ) ὁρίζεται

υς ἡ κάθετος τομή τῆς ἐπιφανείας ἔχουσα κοινήν ἐφαπτομένην μετά τῆς (γ) εἰς τό σημεῖον M.

Ἔστω k ἡ καμπυλότης τῆς (γ) εἰς τό M καί $\hat{k}$ ἡ καμπυλότης τῆς ἀντιστοίχου καθέτου τομῆς. Ἐπειδή αἱ καμπύλαι ἔχουν τήν αὐτήν ἐφαπτομένην ἔπεται ὅτι ἔχουν τό αὐτό du/du καί συμφώνως πρός τόν τύπον (10) θά ἔχουν τήν αὐτήν κάθετον καμπυλότητα k_n. Συνεπῶς θά ἔχωμεν $k_n = k\,συνθ = \hat{k}\,συνφ$ (1), ὅπου θ εἶναι ἡ γωνία τῆς πρώτης καθέτου τῆς καμπύλης μετά τοῦ καθέτου διανύσματος N της ἐπιφανείας καί φ ἡ γωνία τῆς πρώτης καθέτου τῆς καθέτου τομῆς μετά τοῦ N. Εἶναι ὅμως φ = 0 ἤ Π καί ὡς ἐκ τούτου ἡ σχέσις (1) δίδει:

$$\boxed{\pm\hat{k} = k\,συνθ} \qquad (2)$$

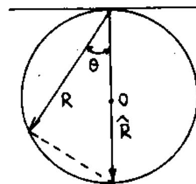
Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἔπεται τό κάτωθι:

Θεώρημα X-4-1. (Meusnier). Μεταξύ τῆς προσημασμένης καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς καί τῆς καμπυλότητος μιᾶς πλαγίας τομῆς ἤ γενικῶς μιᾶς οἱασδήποτε ἐπιφανειακῆς καμπύλης ἡ ὁποία ἔχει τήν αὐτήν ἐφαπτομένην μετά τῆς καθέτου τομῆς ὑφίσταται ἡ σχέσις (2).

Ἐάν R καί $\hat{R}$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῆς θεωρηθείσης καμπύλης (γ) τῆς ἐπιφανείας καί τῆς ἀντιστοίχου καθέτου τομῆς, τότε ἐκ τοῦ τύπου(2) λαμβάνομεν:

$$\boxed{R = \pm\hat{R}\,συνθ} \qquad (3)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3) συνάγεται ὅτι: ἐξ ὅλων τῶν εἴς τι σημεῖον ἐπιφανείας πλαγίων τομῶν, ἡ καμπύλη ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν κάθετον τομήν ἔχει τήν μεγαλυτέραν ἀκτῖνα καμπυλότητος.



Σχ. 2

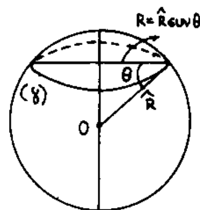
Τό Σχῆμα 2 μᾶς δίδει μίαν ἁπλῆν γεωμετρικήν κατασκευήν τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος τομῆς κλίσεως θ ὡς πρός τήν κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς ὑπό-§ III διά φ=0 ἤ Π λαμβάνομεν: $k_n = \pm\hat{k}$ ἤτοι. Ἡ κάθετος καμπυλότης ἰσοῦται ἀπολύτως πρός τήν καμπυλότητα

μιᾶς καθέτου τομῆς. Εἰς τό ἑξῆς θά συμφωνοῦμεν νά θέτωμεν τό σημεῖον (−) δια τήν $\hat{k}$, ὅταν ἡ πρώτη κάθετος τῆς καθέτου τομῆς εἶναι ἀντίθετος πρός τό κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας **N**. Δι' αὐτόν δέ τόν λόγον θά τήν καλοῦμεν καί προσημασμένη καμπυλότητα (ἤ προσημασμένη ἀκτῖνα καμπυλότητος) καθέτου τομῆς. Παριστῶντες δέ ὡς καί ἀνωτέρω ἐσημειώθη μέ $\hat{k}$ ἤ $\frac{1}{\hat{R}}$ τήν προσημασμένη καμπυλότητα τῆς καθέτου τομῆς θά ἔχωμεν ὡς συνέπειαν τοῦ τύπου (11) τῆς ὑπό§I ὅτι:

$$\hat{k}=\frac{1}{\hat{R}}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2} \qquad (4)$$

Εἰδικῶς εἰς τήν περίπτωσιν τῆς σφαίρας μία κάθετος τομή εἶναι ἕνας μέγιστος κύκλος καί ἐάν λάβωμεν ὡς καμπύλην (γ) ἕναν κύκλον ἐπί τῆς σφαίρας, τότε ὁ τύπος (3) ἐφαρμοζόμενος εἰς αὐτήν τήν εἰδικήν περίπτωσιν δίδει τήν γνωστήν σχέσιν πού ὑφίσταται μεταξύ τῶν ἀκτίνων ἑνός μεγίστου καί ἑνός μικροῦ κύκλου τῆς σφαίρας (βλ. Σχ.3).



Σχ. 3

Παραδείγματα: Θεωροῦμεν τήν σφαῖραν ἀκτῖνος R μέ ἐξίσωσιν:

$$\mathbf{r}=(R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{i}+(R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{j}+(R\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot\mathbf{k},\quad 0<\theta<2\pi,\ 0<\varphi<\pi .$$

Νά εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης μιᾶς καθέτου τομῆς.

Λύσις: Ἔχομεν:

$$\mathbf{r}_\theta=-(R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{i}+(R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_\varphi=(R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot\mathbf{i}+(R\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot\mathbf{j}-(R\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{\theta\theta}=-(R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{i}-(R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{\theta\varphi}=-(R\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot\mathbf{i}+(R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi}=-(R\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{i}-(R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi)\mathbf{j}-(R\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot\mathbf{k}$$

Εἶναι δέ, $E=\mathbf{r}_\theta^2=R^2\eta\mu^2\varphi$, $F=\mathbf{r}_\theta\cdot\mathbf{r}_\varphi=0$, $G=\mathbf{r}_\varphi^2=R^2$

Τό δέ κάθετον διάνυσμα $\mathbf{N}=\frac{\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi|}=-(\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi)\,\mathbf{i}-(\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi)\,\mathbf{j}-(\sigma\upsilon\nu\varphi)\,\mathbf{k}$.

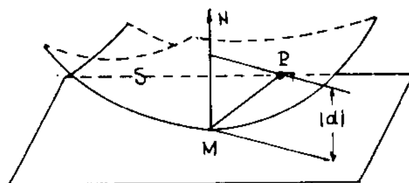
Ὁμοίως, $L=\mathbf{r}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{N}=R\cdot\eta\mu^2\varphi$, $M=\mathbf{r}_{\theta\varphi}\cdot\mathbf{N}=0$, $N=\mathbf{r}_{\varphi\varphi}\cdot\mathbf{N}=R$.

Ὅθεν, $K_n=\frac{L\,d\theta^2+2M\,d\theta\,d\varphi+N\,d\varphi^2}{E\,d\theta^2+2F\,d\theta\,d\varphi+G\,d\varphi^2}=\frac{R\,\eta\mu^2\varphi\,d\theta^2+R\,d\varphi^2}{R^2\eta\mu^2\varphi\,d\theta^2+R^2d\varphi^2}=\frac{1}{R}$.

᾿Εντεῦθεν k_n = σταθερά $= \frac{1}{R}$ εἰς κάθε σημεῖον καί διά κάθε κατεύθυνσιν. Αὐτό ἐπαληθεύει τό γνωστόν, ὅτι, κάθε κάθετος τομή σφαίρας εἰς κάθε σημεῖον αὐτῆς εἶναι ἕνας μέγιστος κύκλος μέ ἀκτῖνα ἴση πρός R.

§ 5. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ-ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑ-ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

῎Εστω $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ μία ἐπιφάνεια S, M ἕνα σημεῖον κείμενον ἐπ᾿ αὐτῆς καί P ἕνα σημεῖον κείμενον εἰς μίαν περιοχήν τοῦ M. ῎Εστω δέ $d=\overrightarrow{MP}\cdot \mathbf{N}$ τό μέτρον (σχετικόν) τῆς προβολῆς τοῦ $\overrightarrow{MP}$ ἐπί τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{N}$. Παρατηροῦμεν, ὅτι τό ἐν λόγῳ μέτρον d θά εἶναι θετικόν ἤ ἀρνητικόν ἐξαρτώμενον ἀπό τήν θέσιν τοῦ σημείου P ὡς πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τό M καί ἐπί πλέον ἡ ἀπόλυτος τιμή |d| παριστᾷ τήν ἀπόστασιν τοῦ P ἀπό τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τό M (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

῎Ηδη ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τά σημεῖα M καί P εἶναι τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ τά ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τιμάς (u,v) καί $(u+du,\, v+dv)$. Συμφώνως δέ πρός τόν τύπον τοῦ Taylor διά διανυσματικάς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν θά ἔχωμεν:

$$\mathbf{r}(u+du,\, v+dv) = \mathbf{r}(u,v) + d\mathbf{r}(u,v) + \frac{1}{2}\, d^2\mathbf{r}(u,v) + O(du^3+dv^3)$$

Οὕτω,

$$\begin{aligned} d = \overrightarrow{MP}\cdot\mathbf{N} &= \left\{ \mathbf{r}(u+du,\, v+dv) - \mathbf{r}(u,v) \right\}\cdot\mathbf{N} \\ &= \left\{ d\mathbf{r}(u,v) + \frac{1}{2}\, d^2\mathbf{r}(u,v) + O(du^3+dv^3) \right\}\cdot\mathbf{N} \\ &= d\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} + \frac{1}{2}\, d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} + O(du^3+dv^3) \qquad (1) \end{aligned}$$

Εἶναι ὅμως, $d\mathbf{r}\cdot\mathbf{N}=0$ (2). Διαφορίζοντες ταύτην λαμβάνομεν $d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{N}+d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{N}=0$, ἐξ ἧς $d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} = -d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{N} = \mathrm{II}$. (3). Λόγῳ τῶν (2) καί (3) ἡ (1) γίνεται:

$$d = \frac{1}{2}\,\mathrm{II} + O(du^3+dv^3) \qquad (4).$$

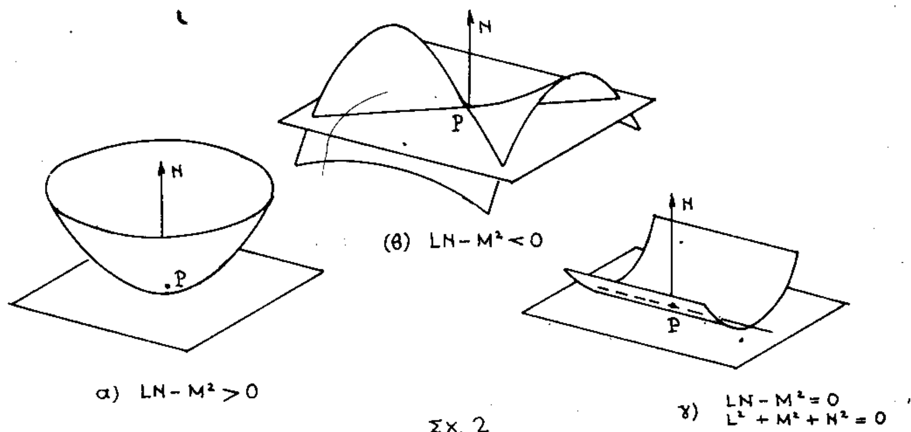
῾Η συνάρτησις

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2}\left(Lu^2 + 2Mu\cdot v + Nv^2\right)} \qquad (5)$$

εἰς τόν Εὐκλείδειον χῶρον u, v, ρ παριστᾷ μίαν ἐπιφάνειαν δευτέρου βαθμοῦ – συντεταγμέναι εἶναι αἱ u, v, ρ – ἡ ὁποία καλεῖται *ἐγγύτατον παραβολοειδές* τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ μορφή αὐτοῦ τοῦ παραβολοειδοῦς προσδιορίζει εἰς ἕναν ἱκανοποιητικόν βαθμόν τήν μορφήν τῆς ἐπιφανείας εἰς τήν περιοχήν τοῦ σημείου M. Αὐτό τό παραβολοειδές μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τό νά διακρίνωμεν τέσσαρας περιπτώσεις ἐξαρτωμένας ἀπό τό σημεῖον τῆς διακρινούσης $LN-M^2$ τῆς δευτέρας θεμελιώδους τετραγωνικῆς μορφῆς.

α) <u>Περίπτωσις ἐλλειπτικῶν σημείων</u>:($LN-M^2>0$). Ἕνα σημεῖον τό ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τήν σχέσιν $LN-M^2>0$ καλεῖται ***ἐλλειπτικόν***. Τό ἐγγύτατον παραβολοειδές εἶναι ἕνα ἐλλειπτικόν παραβολοειδές (βλ. Σχ. 2(α)). Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ρ διατηρεῖ πρόσημον δι' ὅλα τά (u,v). Εἰς τήν περιοχήν ἑνός ἐλλειπτικοῦ σημείου ἡ ἐπιφάνεια κεῖται πρός τήν μίαν πλευράν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς αὐτό τό σημεῖον καί συγκεκριμένως, ἐάν $\mathrm{II}>0$ κεῖται πρός τό μέρος τοῦ **N**, ἐάν δέ $\mathrm{II}<0$ κεῖται πρός τό ἀντίθετον μέρος τοῦ **N** καί ἐπί πλέον τό σχῆμα τῆς ἐπιφανείας "ὁμοιάζει" εἰς τήν περιοχήν τοῦ M μετά τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς. Τοιαῦται ἐπιφάνειαι εἶναι π.χ. ἡ σφαῖρα, τό ἐλλειψοειδές, τό ἐλλειπτικόν παραβολοειδές, τό δίχωνον ὑπερβολοειδές.



Σχ. 2

β) <u>Περίπτωσις Ὑπερβολικῶν σημείων</u>:($LN-M^2<0$). Ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καλεῖται ***ὑπερβολικόν***, ἐάν $LN-M^2<0$. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ συνάρτησις ρ ὡς συνάρτησις τῶν u,v εἰς τόν χῶρον παριστᾷ ἕνα ὑπερβολικόν παραβολοειδές (βλ. Σχ. 2(β)).

Ἐδῶ ὑπάρχουν δύο διακεκριμέναι γραμμαί ἐπί τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου διερχόμεναι διά τοῦ σημείου M καί αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τό ἐπίπεδον εἰς τέσσαρα τμήματα εἰς τά ὁποῖα ἡ ρ ἐναλλάσσει πρόσημον (ἀπό θετική ἀρνητική καί ἀντιστρόφως). Ἐπί τῶν δύο γραμμῶν αὐτῶν θά εἶναι $\rho=0$, δηλ. $L\left(\frac{u}{v}\right)^2+2M\left(\frac{u}{v}\right)+N=0$. Εἰς τήν περιοχήν ἑνός ὑπερβολικοῦ σημείου ἡ ἐπιφάνεια κεῖται ἀμφιπλεύρως τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ὡς δεικνύεται καί εἰς τό Σχῆμα 2(β) καί εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἐλλειπτικοῦ σημείου ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ποιοτικόν χαρακτῆρα μέ ὑπερβολικόν παραβολοειδές. Παραδείγματα ἐπιφανειῶν πού ὅλα τους τά σημεῖα εἶναι ὑπερβολικά εἶναι τό ὑπερβολικόν παραβολοειδές καί τό μονόχωνο ὑπερβολοειδές.

γ) <u>Περίπτωσις Παραβολικῶν σημείων</u> ($LN-M^2=0$). Ἕνα σημεῖον καλεῖται <u>παραβολικόν</u>, ἐάν ἐπαληθεύῃ τάς σχέσεις $LN-M^2=0$, $L^2+M^2+N^2\neq 0$. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ ρ ὡς συνάρτησις τῶν u, υ παριστᾷ ἕναν παραβολικόν κύλινδρον, ὡς δεικνύει τό Σχῆμα 2(γ). Ἐδῶ ὑπάρχει μία εὐθεῖα γραμμή κειμένη ἐπί τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου διερχομένη διά τοῦ σημείου M κατά μῆκος τῆς ὁποίας ἡ $\rho=0$, διά τά ἄλλα σημεῖα τῆς περιοχῆς τοῦ M ἡ ρ διατηρεῖ πρόσημον. Ὁ κύλινδρος ὁλόκληρος κεῖται πρός τό ἕνα μέρος ὡς πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Ἡ δέ ἐπιφάνεια συμπεριφέρεται ἀναλόγως. Πρέπει νά σημειωθῇ ὅτι, εἰς τήν περιοχήν ἑνός παραβολικοῦ σημείου ἡ ἐπιφάνεια δύναται νά κεῖται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου. Εἶναι ἡ περίπτωσις ὅπου ὁ παραβολικός κύλινδρος ἐκφυλίζεται εἰς ἐπίπεδον, βλ. σχετικῶς δ) περίπτωσιν. Παραδείγματα ἐπιφανειῶν πού ἔχουν ὅλα των τά σημεῖα παραβολικά εἶναι οἱ κύλινδροι, κῶνοι καί γενικῶς οἱ εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι.

δ) <u>Περίπτωσις ἐπιπέδου</u> $L=M=N=0$. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν τό ἐγγύτατον παραβολοειδές ἐκφυλίζεται εἰς ἐπίπεδον. Ἐδῶ δι' ὅλα τά u, υ ἔχομεν $\rho\equiv 0$. Ἐδῶ, ὡς λέγομεν ἔχομεν μίαν ἐπαφήν τῆς ἐπιφανείας μετά τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἀνωτέρας τάξεως, σχετικῶς περί ἐπαφῆς δύο ἐπιφανειῶν βλέπε ἄσκ. 58, σελίς 360.

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωροῦμεν τήν σπειροειδῆ ἐπιφάνειαν (τύπου σαμπρέλλας)[1] (βλ. Σχ. 3) μέ ἐξίσωσιν: $\mathbf{r}=(b+a\,\eta\mu\varphi)(\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\mathbf{i}+(b+a\,\eta\mu\varphi)(\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{j}+(a\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\,\mathbf{k}$, $b>a>0$.

---

1). *Αὐτή παράγεται διά περιστροφῆς περιφερείας πέριξ ἑνός ἄξονος κειμένου εἰς τό ἐπίπεδόν της καί μή τέμνουσα ταύτην.*

Νά εὑρεθοῦν τά ἐλλειπτικά, ὑπερβολικά καί παραβολικά σημεῖα ταύτης.

<u>**Λύσις**</u>: Εἶναι $\quad \mathbf{r}_{\theta\theta} = -(\beta+\alpha\eta\mu\varphi)(\sigma\upsilon\nu\theta)\mathbf{i} - (\beta+\alpha\eta\mu\varphi)(\eta\mu\theta)\mathbf{j}$

$$\mathbf{r}_{\theta\varphi} = -(\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{i} + (\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta)\mathbf{j}$$

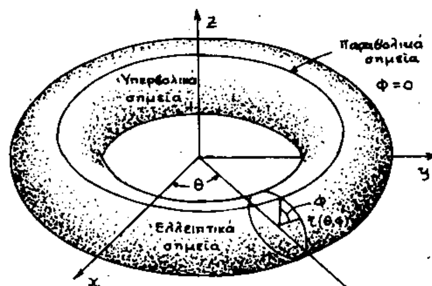
$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = -(\alpha\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta)\mathbf{i} - (\alpha\eta\mu\varphi\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{j} - (\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot\mathbf{k}$$

καί $\quad N = (-\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi)\mathbf{i} - (\eta\mu\theta\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{j} - (\sigma\upsilon\nu\varphi)\mathbf{k}.$

Ὅθεν, $\quad L = \mathbf{r}_{\theta\theta}\cdot N = (\beta+\alpha\eta\mu\varphi)\eta\mu\varphi,\ M = \mathbf{r}_{\theta\varphi}\cdot N = 0,\ N = \mathbf{r}_{\varphi\varphi}\cdot N = \alpha$

καί $\quad LN - M^2 = \alpha(\beta+\alpha\eta\mu\varphi)\eta\mu\varphi.$

Παρατηροῦμεν ὅτι τά θεμελιώδη ποσά τῆς δευτέρας τάξεως ἐξαρτῶνται μόνον ἀπό τό φ. Ταῦτα δέ εἶναι σταθερά κατά μῆκος μιᾶς παραλλήλου $\varphi=\varphi_0$. Ἐπειδή $0<\alpha<\beta$ θά εἶναι $\alpha(\beta+\alpha\eta\mu\varphi)>0$. Ὅθεν τό σημεῖον τῆς ποσότητος $LN-M^2$ εἶναι τό αὐτό μέ τό σημεῖον τοῦ $\eta\mu\varphi$. Οὕτω διά $0<\varphi<\pi$ ἡ $LN-M^2>0$, διά $\varphi=0$ ἤ $\varphi=\pi$ ἡ $LN-M^2=0$ καί διά $\pi<\varphi<2\pi$ ἡ $LN-M^2<0$.



Σχ. 3

Οὕτω, ὡς δεικνύεται καί εἰς τό Σχῆμα 3, τά σημεῖα τά εὑρισκόμενα πρός τό ἐξωτερικόν μέρος τῆς σπειροειδοῦς ἐπιφανείας, δηλ. αὐτά διά τά ὁποῖα $0<\varphi<\pi$ εἶναι ἐλλειπτικά. Ἐδῶ ἡ ἐπιφάνεια παραμένει πρός τό αὐτό μέρος ὡς πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Τά σημεῖα τά εὑρισκόμενα εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς σπειροειδοῦς ἐπιφανείας, δηλ. αὐτά διά τά ὁποῖα εἶναι $\pi<\varphi<2\pi$ εἶναι ὑπερβολικά. Ἐδῶ ἡ ἐπιφάνεια κεῖται ἀμφιπλεύρως ὡς πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τήν περιοχήν ἑκάστου σημείου της. Τέλος τά σημεῖα τῆς κορυφῆς καί τοῦ πυθμένος τῆς σπειροειδοῦς ἐπιφανείας, δηλ. αὐτά διά τά ὁποῖα εἶναι $\varphi=0$ ἤ $\varphi=\pi$ εἶναι παραβολικά σημεῖα.

§ 6. <u>ΔΕΙΚΤΡΙΑ ΤΟΥ DUPIN</u>

Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια $z=f(x,y)$. Ἄς θεωρήσωμεν τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ταύτης εἰς τό σημεῖον Μ. Λαμβάνομεν τοῦτο (τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον) ὡς τό ἐπίπεδον τῶν παραμέτρων u καί v μέ ἀρχήν τό σημεῖον ἐπαφῆς καί μέ $x=u,\ y=v$. Τότε

ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ὁμαλὴ ὅταν τά u,v ληφθοῦν ὡς παράμετροι. Ἡ ἐν λόγῳ ἐπιφάνεια δύναται νά ἔχῃ τήν παράστασιν $\mathbf{r} = u\cdot\mathbf{i} + v\cdot\mathbf{j} + f(u,v)\mathbf{k}$. Οὕτως ἐχόντων ἕπεται ὅτι τά ἐφαπτομενικά διανύσματα $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ εἰς τό σημεῖον $(0,0)$ δίδονται ὑπό τῶν τύπων: $\mathbf{r}_u = (1,0,0) = \mathbf{i}$, $\mathbf{r}_v = (0,1,0) = \mathbf{j}$, (ἐπειδή δέ) Αἱ $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ μηδενίζονται εἰς τήν ἀρχήν, κατά συνέπειαν εἰς τό σημεῖον $(u,v)=(0,0)$ θά ἔχωμεν: $E=1$, $F=0$, $G=1$.

Θεωροῦμεν τήν καμπύλην τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(\ell), v(\ell))$ διερχομένην διά τῆς ἀρχῆς (σημείου ἐπαφῆς). Θά ἔχωμεν δι᾽αὐτήν: $\dot{\mathbf{r}}(\ell) = \mathbf{r}_u\dot{u} + \mathbf{r}_v\dot{v} = \dot{u}\cdot\mathbf{i} + \dot{v}\cdot\mathbf{j}$. Θά εἶναι δέ τότε καί $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 = |\dot{\mathbf{r}}(\ell)|^2 = 1$. Συνεπῶς δυνάμεθα νά θέσωμεν $\dot{u} = \text{συν}\varphi$, $\dot{v} = \text{ημ}\varphi$, ὅπου φ εἶναι μία γωνία εἰς πολικάς συντεταγμένας. Συνεπῶς δι᾽ αὐτήν τήν εἰδικήν ἐκλογήν τῶν παραμέτρων ὁ τύπος $k_n = \frac{\text{II}}{\text{I}}$ γίνεται:

$$k_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{du^2 + dv^2} \qquad (1)$$

Εἶναι δέ $du = \dot{u}(\ell)\cdot d\ell = \text{συν}\varphi\, d\ell$, $dv = \dot{v}(\ell) d\ell = \text{ημ}\varphi\, d\ell$

Ὅθεν, $k_n = L\,\text{συν}^2\varphi + 2M\,\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi + N\,\text{ημ}^2\varphi \qquad (2)$

Θέτομεν $|k_n| = \frac{1}{\rho^2}$, ὅτε ἐκ τοῦ τύπου (2) ἐπιτυγχάνομεν:

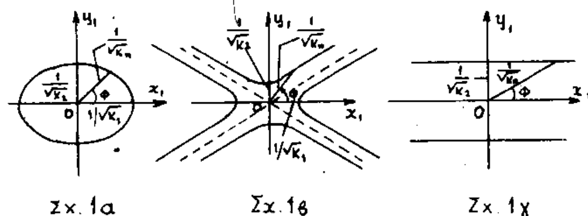
$$\pm 1 = L(\rho\,\text{συν}\varphi)^2 + 2M(\rho\,\text{συν}\varphi)(\rho\,\text{ημ}\varphi) + N(\rho\,\text{ημ}\varphi)^2 \quad \text{ἤ}$$

$$\pm 1 = L x_1^2 + 2M x_1 y_1 + N y_1^2 \qquad (3)$$

ὅπου ἐτέθη $x_1 = \rho\,\text{συν}\varphi$, $y_1 = \rho\,\text{ημ}\varphi$.

Ἡ ἐξίσωσις (3) προσδιορίζει ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ox_1y_1 μίαν κωνικήν τομήν ἡ ὁποία καλεῖται *δείκτρια τοῦ Dupin*. Αὕτη ἔχει τήν ἰδιότητα, ὅτι τό μῆκος κάθε τμήματος ἀπό τό κέντρον τῆς κωνικῆς τομῆς πρός ἕνα σημεῖον αὐτῆς ἰσοῦται πρός τό ἀντίστροφον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς καθέτου καμπυλότητος (δηλ. τῆς $|k_n|$).

Αὕτη ἡ κωνική τομή παρέχεται ὑπό τῶν κάτωθι σχημάτων.



Σχ. 1α Σχ. 1β Σχ. 1γ

Εἶναι προφανές ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) ὅτι ἡ δείκτρια τοῦ Dupin εἶναι "παρομοία,

πρός τάς τομάς τοῦ ἐγγυτάτου παραβολοειδοῦς ὑπό ἐπιπέδων παραλλήλων πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας καί οὕτω τό σχῆμα αὐτῆς (τῆς δεικτρίας τοῦ Dupin) δίδει μίαν προσέγγισιν τοῦ σχήματος τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας ὑπό τῶν προαναφερθέντων ἐπιπέδων.

α) Ἐάν τό $LN-M^2>0$, ἡ δείκτρια εἶναι ἔλλειψις (Σχ. 1α)

β) Ἐάν τό $LN-M^2<0$, ἡ δείκτρια εἶναι ἕνα ζεῦγος συζυγῶν ὑπερβολῶν (Σχ. 1β).

γ) Ἐάν τό $LN-M^2=0$ καί $L^2+M^2+N^2\neq 0$ ἡ δείκτρια εἶναι ἕνα ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν (Σχ. 1γ).

δ) Ἐάν τό $L=M=N=0$ ἡ δείκτρια δέν ὑπάρχει.

§7. ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΑΙ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ - ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΑΙ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΕΣ - ΓΡΑΜΜΑΙ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ

Εἶναι γνωστόν ὅτι ἡ κάθετος καμπυλότης k_n παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \qquad (1)$$

Ἐάν καλέσωμεν τόν λόγον $\frac{du}{dv}=\lambda$, τότε διά κάθε τιμή αὐτοῦ ὁρίζεται καί ἡ διεύθυνσις τῆς καθέτου τομῆς τῆς ἐπιφανείας εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον. Ἡ (1) λοιπόν γράφεται:

$$k_n=\frac{L\lambda^2+2M\lambda+N}{E\lambda^2+2F\lambda+G} \qquad (2)$$

Ἤδη ἄς ἀναζητήσωμεν τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $k_n(\lambda)$. Πρός τοῦτο εὑρίσκομεν τήν παράγωγον αὐτῆς ὡς πρός λ, ἤτοι:

$$\frac{1}{2}\frac{dk_n(\lambda)}{d\lambda}=\frac{(L\lambda+M)(E\lambda^2+2F\lambda+G)-(L\lambda^2+2M\lambda+N)(E\lambda+F)}{(E\lambda^2+2F\lambda+G)^2}=\frac{(FL-ME)\lambda^2+(LG-EN)\lambda+(GM-FN)}{(E\lambda^2+2F\lambda+G)^2}$$

Ἐπειδή εἶναι $E\lambda^2+2F\lambda+G\neq 0$ αἱ ζητούμεναι τιμαί τοῦ λ δίδονται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$(FL-ME)\lambda^2+(LG-EN)\lambda+(GM-FN)=0 \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει δύο ρίζας λ_1, λ_2 καί εἰς αὐτάς ἀντιστοιχοῦν δύο διευθύνσεις καλούμεναι ***πρωτεύουσαι διευθύνσεις*** καί διά τάς ὁποίας ἔχομεν ἀκροτάτας τιμάς τῆς καμπυλότητος. Ἡ συνθήκη (3) γράφεται ὑπό μορφήν ὁριζούσης οὕτω:

$$\begin{vmatrix} E\lambda+F & L\lambda+M \\ F\lambda+G & M\lambda+N \end{vmatrix}=0 \quad (4_\alpha) \quad \text{ἤ} \quad \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0 \quad (4_\beta)$$

Προκειμένου νά ὑπολογίσωμεν τάς πρωτευούσας καμπυλότητας k_n παρατηροῦμεν λόγω τῆς (2) ὅτι αὗται θά πρέπει νά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν:

$$(Ek_n - L)\lambda^2 + 2(Fk_n - M)\lambda + Gk_n - N = 0 \qquad (5)$$

Ἐπειδή ὅμως ἑκάστη τῶν πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων k_n ἀντιστοιχεῖ σέ μίαν διεύθυνσιν ἐπί τῆς ἐπιφανείας, δηλ. εἰς μίαν τιμήν τοῦ λ θά πρέπει ἡ διακρίνουσα τοῦ ἀνωτέρω ὡς πρός λ τριωνύμου νά εἶναι μηδέν, ἤτοι θά πρέπει νά ἔχωμεν:

$$(Fk_n - M)^2 - (Ek_n - L)\cdot(Gk_n - N) = 0 \qquad (6) \quad \text{ἤ}$$

$$(EG - F^2)k_n^2 - (EN - 2FM + GL)k_n + (LN - M^2) = 0 \qquad (7)$$

Ἡ ἐξίσωσις (7) δίδει τάς πρωτευούσας καμπυλότητας τῆς ἐπιφανείας, ἡ δέ ἐξίσωσις (8):

$$(LN - M^2)R_n^2 - (EN - 2FM + GL)R_n + EG - F^2 = 0 \qquad (8)$$

δίδει τάς πρωτευούσας ἀκτῖνας καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

Ἐκ τοῦ τύπου (4β) προκύπτει ὅτι, ἐάν $E = \mu L$, $F = \mu M$, $G = \mu N$, τότε αὕτη καθίσταται ταυτότης καί οὕτω εἰς τά σημεῖα αὐτά, δηλ. διά τά ὁποῖα ἔχομεν $\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N} = \mu$ δέν ὁρίζονται αἱ πρωτεύουσαι διευθύνσεις. Ταῦτα δέ καλοῦνται ***ὀμφαλικά σημεῖα***.[1] Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, πάντα τά σημεῖα μιᾶς σφαίρας, ἑνός ἐπιπέδου εἶναι ὀμφαλικά. Εἶναι δέ καί αἱ μοναδικαί ἐπιφάνειαι μέ αὐτήν τήν ἰδιότητα.

Ἡ διαφορική ἐξίσωσις (4β) γράφεται οὕτω:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{du}{dv} & \left(\frac{du}{dv}\right)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

ἤ ἡ ἰσοδύναμος πρός τήν (4β) διαφ. ἐξίσωσις (3) γράφεται οὕτω:

$$(FL - ME)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (LG - EN)\frac{du}{dv} + (GM - FN) = 0 \qquad (10)$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ἐάν τά θεμελιώδη μεγέθη πρώτης καί δευτέρας τάξεως δίδονται ὡς συναρτήσεις τῶν u καί v ἡ διαφ. ἐξίσωσις (9) ἤ ἡ (10) ὁρίζει δύο οἰκογενείας καμπύλων ἐπί τῆς ἐπιφανείας αἱ ὁποῖαι καλύπτουν τήν ἐπιφάνειαν. Αἱ γραμμαί αὗται καλοῦνται ***γραμμαί καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας***. Ἐπομένως εἰς κάθε σημεῖον μιᾶς γραμμῆς καμπυλότητος ἡ ἐφαπτομένη εἶναι πρωτεύουσα διεύθυνσις.

1) *Ἡ δεικτρια τοῦ Dupin εἶναι τότε κύκλος.*

Ὁ τύπος (14) τῆς § 3 πού δίδει τήν συνθήκην, ἵνα δύο παραμετρικαί γραμμαί τέμνωνται ὀρθογωνίως γράφεται:

$$E\lambda_1 \cdot \lambda_2 + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G = 0 \qquad (11)$$

ὅπου ἐτέθη $\quad \lambda_1 = \dfrac{du_1}{dv_1}$ καί $\lambda_2 = \dfrac{du_2}{dv_2}$.

Ἐξ ἄλλου αἱ δύο ρίζαι λ_1, λ_2 τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (10) πληροῦν ὡς γνωστόν τάς σχέσεις:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{EN-LG}{FL-ME}, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{GM-FN}{FL-ME} \qquad (12)$$

Ἀντικαθιστῶντες τά $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ ἐκ τῶν (12) εἰς τήν (11) λαμβάνομεν

$$F \cdot \frac{EN-LG}{FL-ME} + E \cdot \frac{GM-FN}{FL-ME} + G \equiv 0$$

Ὅθεν, <u>αἱ γραμμαί καμπυλότητος μιᾶς ἐπιφανείας τέμνονται ὀρθογωνίως</u>.

Ἐάν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι λαμβάνομεν τάς γραμμάς καμπυλότητος μιᾶς ἐπιφανείας ὡς παραμετρικάς γραμμάς, δηλ. u= σταθ. καί v= σταθ. τότε, ἐφ' ὅσον αἱ γραμμαί αὗται ὡς γραμμαί καμπυλότητος τέμνονται ὀρθογωνίως, θά πρέπει σύμφωνα πρός τόν τύπον (15) τῆς § 3 νά ἔχωμεν $F=0$. Ἐπί πλέον αὗται θά πρέπει νά πληροῦν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$(FL-ME)du^2 + (LG-EN)\,du\,dv + (GM-FN)dv^2 = 0.$$

Ἀλλά διά u= σταθ. $du=0$ καί ἐκ τῆς ἀνωτέρω διαφ. ἐξισώσεως λαμβάνομεν $GM=0$ (διότι $F=0$). Ὁμοίως διά v= σταθ. $dv=0$ καί ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν $ME=0$. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων λαμβάνομεν $M=0$ (διότι ἐάν $M \neq 0$ θά ἔπρεπε $E=G=F=0$, ὅπερ ἄτοπον). Μέ τάς γραμμάς καμπυλότητος ὡς παραμετρικάς γραμμάς ἡ κάθετος καμπυλότης παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\boxed{K_n = \frac{Ldu^2 + Ndv^2}{Edu^2 + Gdv^2}} \qquad (13)$$

Ἐάν καλέσωμεν R_1 τήν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς γραμμῆς $dv=0$ καί R_2 τήν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς γραμμῆς $du=0$, τότε λόγω τῶν ἀνωτέρω τύπων θά ἔχωμεν:

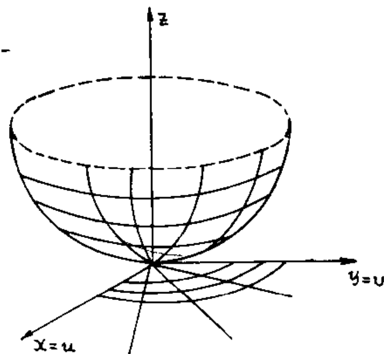
$$\boxed{\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}} \qquad (14)$$

Παράδειγμα: Νά εὑρεθοῦν αἱ γραμμαί καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας μέ ἐξίσωσιν $\mathbf{r} = u\cdot \mathbf{i} + v\cdot \mathbf{j} + (u^2+v^2)\cdot \mathbf{k}$.

Λύσις: Εὐκόλως ὑπολογίζομεν ὅτι: $E = 1+4u^2$, $F = 4uv$, $G = 1+4v^2$, $L = 2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}$, $M=0$, $N = 2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν διαφορ. ἐξίσωσιν (10) τά θεμελιώδη ποσά καί διαιροῦντες διά τοῦ $-8(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}$ ἐπιτυγχάνομεν τελικῶς τήν διαφ. ἐξίσωσιν: $uvdu^2 + (v^2-u^2)dudv - uvdv^2 = 0$ (1).

Ἡ (1) γράφεται: $(udu+vdv)(vdu-udv) = 0$ (2) Ἡ ἐξίσωσις (2) διασπᾶται εἰς τάς διαφ. ἐξισώσεις $udu+vdv=0$ (3) καί $vdu-udv=0$ (4)

Ἡ γενική λύσις τῆς (3) εἶναι $u^2+v^2=C^2$ (ὁμόκεντροι περιφέρειαι) καί ἡ γενική λύσις τῆς (4) εἶναι $u = C^* v$ (εὐθεῖαι διερχόμεναι διά τῆς ἀρχῆς). Αἱ εἰκόνες αὐτῶν τῶν γραμμῶν ἐπί τῆς ἐπιφανείας εἶναι αἱ γραμμαί καμπυλότητος ὡς δεικνύει τό Σχ. 1. Ἄς σημειωθῆ ὅτι εἰς τήν ἀρχήν $u=0$, $v=0$ ἔχομεν $E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=2$, $M=0$, $N=2$. Ἐν τούτοις τά θεμελιώδη ποσά πρώτης καί δευτέρας τάξεως εἶναι ἀνάλογα καί οὕτω τό σημεῖον $u=0$, $v=0$ εἶναι ὀμφαλικόν.



Σχ. 1

Θεώρημα Χ-7-1. (Euler) Εἰς ἕνα σημεῖον Μ μιᾶς ἐπιφανείας ἡ κάθετος καμπυλότης k_n κατά τήν διεύθυνσιν μιᾶς ἐφαπτομένης L δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$k_n = k_1 \sigma\upsilon\nu^2 a + k_2 \eta\mu^2 a,$$

ὅπου k_1, k_2 εἶναι αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες εἰς τό σημεῖον Μ καί a εἶναι ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη L μετά μιᾶς πρωτευούσης διευθύνσεως ἀντιστοιχούσης εἰς τήν καμπυλότητα k_1.

Ἀπόδειξις: Διά τά ὀμφαλικά σημεῖα τό θεώρημα ἰσχύει, διότι $k_1 = k_2 = k_n$. Ἔστω $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ὅπου ἔχομεν λάβει τάς γραμμάς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας ὡς παραμετρικάς γραμμάς, ὅτε $F = M = 0$. Συμφώνως πρός τόν τύπον (13) τῆς § 7 ἔχομεν:

$$k_n = \frac{Ldu^2 + Ndv^2}{Edu^2 + Gdv^2} \qquad (1)$$

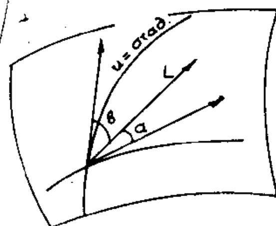
κατά τούς τύπους (14) τῆς ἰδίας § 7 εἶναι:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} \quad \text{καί} \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}$$

Συνεπῶς ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$k_n = k_1 \frac{E du^2}{E du^2 + G dv^2} + k_2 \frac{G dv^2}{E du^2 + G dv^2} \qquad (2)$$

Ἐάν α καί β εἶναι αἱ γωνίαι τῆς διευθύνσεως L μετά τῶν διευθύνσεων τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν v = σταθ. καί u = σταθ. (βλ. Σχ. 1), τότε θά ἔχωμεν διά τά γραμμικά στοιχεῖα πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν διεύθυνσιν L καί τήν διεύθυνσιν τῆς v = σταθ. ἀντιστοίχως:



Σχ. 1

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \quad \text{καί} \quad d\mathbf{r}_{v=c} = \mathbf{r}_u du$$

Ὅθεν: $$\text{συν}\,\alpha = \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}_{v=c}}{|d\mathbf{r}| \cdot |d\mathbf{r}_{v=c}|} = \frac{E du^2}{\sqrt{E du^2 + G dv^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}\, du} =$$

$$= \frac{E du}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \cdot \sqrt{E}}$$. Ὁμοίως $$\text{συν}\,\beta = \frac{G dv}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \cdot \sqrt{G}}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τόν (2) λαμβάνομεν:

$$k_n = k_1 \text{συν}^2\alpha + k_2 \text{συν}^2\beta \qquad (3)$$

Ἀλλά αἱ πρωτεύουσαι διευθύνσεις εἶναι κάθετοι μεταξύ των, ὅτε: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ καί ὁ (3) γίνεται:

$$k_n = k_1 \text{συν}^2\alpha + k_2 \text{ημ}^2\alpha . \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§8. <u>ΜΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ H ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ (ΤΟΥ GAUSS) K</u>.

Θεωροῦμεν τήν ἐξίσωσιν (7) τῆς § 7. Τό ἄθροισμα καί τό γινόμενον τῶν ριζῶν ταύτης παρέχεται ὡς γνωστόν ὑπό τῶν τύπων:

$$k_1 + k_2 = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Τούς ἀριθμούς $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ καί $K = k_1 \cdot k_2$ καλοῦμεν ἀντιστοίχως ***μέση καμπυλότητα*** καί ***ὁλική καμπυλότητα*** ἤ ***καμπυλότητα τοῦ Gauss***. Ἐπειδή $EG - F^2 > 0$ ἔπεται ὅτι τό πρόσημον τῆς K εἶναι τό αὐτό μέ τό πρόσημον τῆς $LN - M^2$.

Ὡς ἐκ τούτου ἕνα σημεῖον μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ἐλλειπτικόν, ἐάν καί μόνον ἐάν $K > 0$, ὑπερβολικόν, ἐάν καί μόνον ἐάν $K < 0$ καί παραβολικόν ἐάν καί μόνον ἐάν $K = 0$.

Ἐπειδή ἡ κάθετος καμπυλότης k_n μιᾶς ἐπιφανειακῆς καμπύλης ἀλλάσσει σημεῖον, ἐάν ἀλλάξῃ προσανατολισμόν ἡ ἐπιφάνεια, αἱ ἀκρότατοι τιμαί k_1, k_2 τῆς k_n παρα-

μένουν ἐπίσης ἀκρότατοι τιμαί ἀλλάσσουσαι πρόσημον καί οὕτω τό μέγιστον γίνεται ἐλάχιστον καί ἀντιστρόφως. Ἡ ὁλική καμπυλότης προφανῶς παραμένει ἀνεξάρτητος τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς ἐπιφανείας καί ἐπί πλέον ὡς ἀποδεικνύεται παραμένει ἀνεξάρτητος τῆς παραμετρικῆς παραστάσεως τῆς ἐπιφανείας.

Μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἔχει μέση καί ὁλική καμπυλότητα μηδέν. Ἡ σφαίρα ἔχει μέση καμπυλότητα εἰς ὅλα τά σημεῖα της $1/R$ (R: ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας) καί ὁλική καμπυλότητα $1/R^2$. Οἱ κύλινδροι καί αἱ κωνικαί ἐπιφάνειαι ἔχουν εἰς πάντα τά σημεῖα των ὁλικήν καμπυλότητα μηδέν.

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως ἕνα βασικόν θεώρημα ἐκφράζον τήν ὁλικήν καμπυλότητα μιᾶς ἐπιφανείας.

Θεώρημα X-B-1. Ἡ ὁλική καμπυλότης μιᾶς ἐπιφανείας δύναται νά ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν πρώτης τάξεως καί τῶν μερικῶν παραγώγων αὐτῶν, ἀκριβέστερον ἰσχύει:

$$(EG-F^2)\cdot k = \begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις καλεῖται *χαρακτηριστική ἐξίσωσις τοῦ Gauss.*

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ὅτι, δύο ἐπιφάνειαι ἔχουσαι τά αὐτά θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξεως E, F, G ἔχουν ἐπίσης τήν αὐτήν καμπυλότητα τοῦ Gauss.

Πρότασις X-B-1. Ἡ ὁλική καμπυλότης k τοῦ Gauss εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου: $K\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)=\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v$.

Ἀπόδειξις: Τά διανύσματα $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v$ εἶναι κάθετα πρός τό $\mathbf{N}$ συνεπῶς κεῖνται ἐπί τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\mathbf{N}_u = a\cdot\mathbf{r}_u + \beta\,\mathbf{r}_v,\quad \mathbf{N}_v = \gamma\cdot\mathbf{r}_u + \delta\cdot\mathbf{r}_v$$

ὅπου τά a, β, γ, δ δύνανται νά προσδιορισθοῦν.

Εἶναι, $N_u \times N_v = (a\mathbf{r}_u + \beta\mathbf{r}_v) \times (\gamma\mathbf{r}_u + \delta\mathbf{r}_v) = (a\delta - \beta\gamma)(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ (1)

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} -L &= \mathbf{r}_u \cdot N_u = \mathbf{r}_u (a\mathbf{r}_u + \beta\mathbf{r}_v) = aE + \beta F \\ -M &= \mathbf{r}_v \cdot N_u = \mathbf{r}_v (a\mathbf{r}_u + \beta\mathbf{r}_v) = aF + \beta G \\ -M &= \mathbf{r}_u \cdot N_v = \mathbf{r}_u (\gamma\mathbf{r}_u + \delta\mathbf{r}_v) = \gamma E + \delta F \\ -N &= \mathbf{r}_v \cdot N_v = \mathbf{r}_v (\gamma\mathbf{r}_u + \delta\mathbf{r}_v) = \gamma F + \delta G \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις δύνανται νά γραφοῦν ὑπό μορφήν γινομένου πινάκων ὡς ἀκολούθως:

$$\begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3), ἐάν λάβωμεν τάς ἀντιστοίχους ὁριζούσας, ἔχομεν:

$$\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{vmatrix} \quad (4) \quad ἤ$$

$$a\delta - \beta\gamma = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K \quad (5)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (5) ἔχομεν τό ἀποδεικτέον.

Παράδειγμα: Νά εὑρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες, ἡ ὁλική καμπυλότης, ἡ μέση καμπυλότης καθώς καί αἱ γραμμαί καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = u\,\sigma\upsilon\nu v \cdot i + u\,\eta\mu v \cdot j + a \log(u + \sqrt{u^2 - a^2})\,k$, ἔνθα $a > 0$.

Λύσις: Εἶναι, $\mathbf{r}_u = \sigma\upsilon\nu v \cdot i + \eta\mu v \cdot j + a(u^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} k$, $\mathbf{r}_v = -u\,\eta\mu v \cdot i + u\,\sigma\upsilon\nu v \cdot j + 0\,k$, $\mathbf{r}_{uu} = 0 \cdot i + 0 \cdot j - au(u^2 - a^2)^{-3/2} k$, $\mathbf{r}_{uv} = -\eta\mu v \cdot i + \sigma\upsilon\nu v \cdot j + 0\,k$, $\mathbf{r}_{vv} = -u\,\sigma\upsilon\nu v \cdot i - u\,\eta\mu v \cdot j + 0 \cdot k$ καί $N = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = -au^{-1}\sigma\upsilon\nu v \cdot i - au^{-1}\eta\mu v \cdot j + u^{-1}(u^2 - a^2)^{1/2}\,k$.

Ὅθεν, $E = \mathbf{r}_u^2 = u^2(u^2 - a^2)^{-1}$, $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$, $G = \mathbf{r}_v^2 = u^2$, $L = \mathbf{r}_{uu} \cdot N = -a(u^2 - a^2)^{-1}$, $M = \mathbf{r}_{uv} \cdot N = 0$, $N = a$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τόν τύπον (7) τῆς § 7 εὑρίσκομεν τήν ἐξίσωσιν, ἥτις δίδει τάς πρωτευούσας καμπυλότητας, ἤτοι: $u^4 k_n^2 - a^2 = 0$, ἐξ ἧς $k_1 = -au^{-2}$, $k_2 = au^{-2}$.

Ἡ μέση καμπυλότης εἶναι $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$ καί ἡ ὁλική καμπυλότης εἶναι $K = k_1 \cdot k_2 = -a^2 \cdot u^{-4}$ (τῆς ἐπιφανείας πάντα τά σημεῖα εἶναι ὑπερβολικά). Τέλος ἐπειδή $F = M = 0$ αἱ παραμετρικαί γραμμαί εἶναι γραμμαί καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

§ 9. ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΠΟΣΑ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ $z=f(x,y)$.

Ἔστω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπό τήν μορφήν $z=f(x,y)$, ὅτε ἡ διανυσματική ἐξίσωσις ταύτης εἶναι $\mathbf{r}=x\cdot \mathbf{i}+y\cdot \mathbf{j}+f(x,y)\cdot \mathbf{k}$. Ἐν προκειμένῳ τά x, y θεωροῦνται ὡς καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι.

Θέτομεν:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial f}{\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Τότε θά ἔχωμεν (βλ. σχετ. παράδειγμα 3ον, § 3):

$$E=1+p^2, \quad F=p\cdot q, \quad G=1+q^2.$$

Ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή γράφεται:

$$I=d\ell^2=(1+p^2)dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)dy^2$$

Ἵνα αἱ παραμετρικαί γραμμαί τέμνωνται ὀρθογωνίως, ἀρκεῖ $p\cdot q=0$.

Τό κάθετον διάνυσμα $\mathbf{N}$ τῆς ἐπιφανείας ἔχει συντεταγμένας:

$$\mathbf{N}=\left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

Τό ἐμβαδικόν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας, συμφώνως πρός τόν τύπον (9) τῆς § 3, εἶναι:

$$\Delta s=\sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Προκειμένου νά ὑπολογίσωμεν τά θεμελιώδη ποσά L, M, N θά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\mathbf{r}''_{xx}=(0,0,r), \quad \mathbf{r}''_{xy}=(0,0,s), \quad \mathbf{r}''_{yy}=(0,0,t)$$

καί ἐπί πλέον θά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τούς τύπους (7) τῆς § 4, ὅτε ἐκτελοῦντες εἰς αὐτούς τόν πολλαπλασιασμόν τῶν ἐσωτερικῶν γινομένων εὑρίσκομεν τελικῶς.

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Ἡ δευτέρα θεμελιώδης μορφή τῆς ἐπιφανείας γράφεται:

$$II=(r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2):\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Αἱ πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καμπυλότητες, βλ. § 7 τύπον (8) δίδονται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$(rt-s^2)R^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\left[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r\right]R+(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Τά δέ ὀμφαλικά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας παρέχονται ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{p\cdot q}=\frac{t}{1+q^2}$$

§ 10. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ RODRIGUES

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $\frac{du}{dv}$ εἶναι μία πρωτεύουσα διεύθυνσις εἰς τό σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας καί ἔστω k_n ἡ ἀντίστοιχος πρωτεύουσα καμπυλότης.

Πρότασις X-10-1. Ἕνας ἀριθμός k_n εἶναι μία πρωτεύουσα καμπυλότης τῆς καμπύλης εἰς τό σημεῖον M κατά τήν διεύθυνσιν $\frac{du}{dv}$ ἐάν, καί μόνον ἐάν, οἱ k_n, du καί dv ἐπαληθεύουν τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}(L-k_nE)\,du+(M-k_nF)\,dv=0\\(M-k_nF)\,du+(N-k_nG)\,dv=0\end{aligned}\right\}(1)\quad \text{ὅπου } du^2+dv^2\neq 0.$$

Ἀπόδειξις: Τό σύστημα (1) ἐπιδέχεται μή μηδενικήν λύσιν ὡς πρός du, dv, ἐάν καί μόνον ἐάν, ἔχωμεν:

$$\begin{vmatrix}L-k_nE & M-k_nF\\ M-k_nF & N-k_nG\end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

Ἀναπτύσσοντες τήν ὁρίζουσαν (2) εὑρίσκομεν:

$$(EG-F^2)\,k_n^2-(EN-2FM+GL)\,k_n+(LN-M^2)=0 \qquad (3).$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἐξίσωσις (3) ὡς γνωστόν (βλ. σελ. 313) ἐξίσωσιν (7)) εἶναι ἡ δίδουσα τάς πρωτευούσας καμπυλότητας καί ἥτις ἱκανοποιεῖται ἐξ ὑποθέσεως, ἐπειδή ἡ k_n ὑπετέθη πρωτεύουσα καμπυλότης. Ἀντιστρόφως, ἐάν τό σύστημα (1) ἐπιδέχεται μή μηδενικήν λύσιν, τότε θά πληροῦται ἡ (2) κατά συνέπειαν καί ἡ (3). Ἄρα ἡ k_n εἶναι πρωτεύουσα καμπυλότης.

- Ἤδη ἄς ἀντικαταστήσωμεν τά θεμελιώδη ποσά πρώτης καί δευτέρας τάξεως τά ἐμφανιζόμενα εἰς τό σύστημα (1) διά τῶν τύπων (7) τῆς §4, ὅτε λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned}(-\mathbf{r}_u N_u-k_n\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u)\,du+(-\mathbf{r}_uN_v-k_n\mathbf{r}_v\mathbf{r}_u)\,dv=0\\(-\mathbf{r}_v N_u-k_n\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)\,du+(-\mathbf{r}_vN_v-k_n\mathbf{r}_v\mathbf{r}_v)\,dv=0\end{aligned}\right\}(4)\qquad \text{ἤ}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[(N_udu+N_vdv)+k_n(\mathbf{r}_udu+\mathbf{r}_vdv)\right]\cdot\mathbf{r}_u=0\\\left[(N_udu+N_vdv)+k_n(\mathbf{r}_udu+\mathbf{r}_vdv)\right]\cdot\mathbf{r}_v=0\end{aligned}\right\}(5)\qquad \text{ἤ}$$

$$(dN+k_nd\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}_u=0,\ (dN+k_nd\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}_v=0 \qquad (6)$$

Ἐπειδή τό N εἶναι μοναδιαῖον θά ἔχωμεν $N\cdot N=1$, ἐξ ἧς $2NdN=0$, ἤτοι τό dN εἶναι

κάθετον πρός το N συνεπώς παράλληλον πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον, ἔστω Μ. Ὁμοίως καί τό $d\mathfrak{r}$ εἶναι παράλληλον πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας κατ' ἀκολουθίαν καί τό διάνυσμα $dN + k_n d\mathfrak{r}$ εἶναι παράλληλον πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας. Ἵνα λοιπόν $(dN + k_n d\mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{r}_u = 0$ θά πρέπει κατ' ἀνάγκην νά εἶναι $dN + k_n d\mathfrak{r} = 0$. Οὕτω, κατά τήν διεύθυνσιν μιᾶς πρωτευούσης διευθύνσεως τό διάνυσμα dN εἶναι παράλληλον πρός τό $d\mathfrak{r}$ καί δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\boxed{dN = -k_n d\mathfrak{r}} \qquad (7)$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος (7) καλεῖται *τύπος τοῦ Rodrigues*.

Ἐάν θεωρήσωμεν τήν πρωτεύουσαν διεύθυνσιν $u = u(t)$, $v = v(t)$, τότε ὁ τύπος (7) γράφεται:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} + k_n \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0} \qquad (8)$$

Κατωτέρω παραθέτομεν μίαν σπουδαίαν ἐφαρμογήν τοῦ τύπου τοῦ Rodrigues.

Ἐφαρμογή: Ἡ μόνη μή ἐπίπεδος ἐπιφάνεια πού ἔχει πάντα τά σημεῖα της ὀμφαλικά εἶναι ἡ σφαίρα.

Ἀπόδειξις: Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν κάθε καμπύλη τῆς ἐπιφανείας εἶναι μία γραμμή καμπυλότητος καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τοῦ Rodriques.

Ἄς συμβολίσωμεν μέ k ἀντί k_n τήν κάθετον καμπυλότητα. Αὐτή (ἡ κάθετος καμπυλότης) συμφώνως πρός τόν τύπον (8) εἰς κάθε σημεῖον εἶναι ἡ αὐτή διά κάθε διεύθυνσιν διερχομένη διά τοῦ ἐν λόγῳ σημείου, δέν γνωρίζομεν ὅμως ἄν παραμένη σταθερά διά τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας.

Κατά μῆκος τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν u καί v τῆς ἐπιφανείας ὁ τύπος (8) γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} N_u + k \cdot \mathfrak{r}_u &= 0 \\ N_v + k \cdot \mathfrak{r}_v &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Διά παραγωγίσεως τῶν (1) ἀντιστοίχως ὡς πρός v καί u λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{array}{l} N_{uv} + k_v \mathfrak{r}_u + k \cdot \mathfrak{r}_{uv} = 0 \\ N_{vu} + k_u \cdot \mathfrak{r}_v + k \cdot \mathfrak{r}_{vu} = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ $\mathfrak{r}$ ἔχει μέχρι τρίτης τάξεως μερικάς παραγώγους συνεχεῖς θά ἔχωμεν $\mathfrak{r}_{uv} = \mathfrak{r}_{vu}$, $N_{uv} = N_{vu}$, καί ὡς ἐκ τούτου ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν

$$k_v \cdot \mathfrak{r}_u - k_u \cdot \mathfrak{r}_v = 0 \quad (3).$$

Ἐπειδή $\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v \neq \mathcal{O}$ θά πρέπει $k_v = k_u = 0$, ἤτοι $k =$ σταθερόν. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) δι' ὁλοκληρώσεως λαμβάνομεν:

$$N + k \cdot \mathfrak{r} = \mathbf{a} \quad (4)$$

ὅπου $\mathbf{a}$ εἶναι ἕνα σταθερόν διάνυσμα ἤ

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathbf{a} - N}{k} \quad (5)$$

Ἡ (5) προσδιορίζει μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος $\frac{1}{k}$ καί κέντρου $\frac{\mathbf{a}}{k}$ διότι,

$$\left| \mathfrak{r} - \frac{\mathbf{a}}{k} \right| = \left| \frac{-N}{k} \right| = \frac{1}{k}.$$

§ 11. ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Μία διεύθυνσις εἰς ἕνα σημεῖον μιᾶς ἐπιφανείας καλεῖται ***ἀσυμπτωτική διεύθυνσις***, ἐάν αὕτη ἐπαληθεύῃ τήν ἐξίσωσιν $\mathrm{II} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0$. (1)

Ἐπειδή δέ $k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$, ἡ διεύθυνσις θά εἶναι ἀσυμπτωτική, ἐάν $k_n = 0$, δηλ. ἡ κάθετος καμπυλότης τῆς καμπύλης εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον εἶναι μηδέν.

Προφανῶς ἕνα ἐλλειπτικόν σημεῖον δέν ἔχει ἀσυμπτωτικάς διευθύνσεις, ἐνῷ ἕνα ὑπερβολικόν σημεῖον ἔχει δύο ἀσυμπτωτικάς διευθύνσεις καί ἕνα παραβολικόν σημεῖον ἔχει μίαν ἀσυμπτωτικήν διεύθυνσιν.

Μία καμπύλη ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας θά καλῆται ***ἀσυμπτωτική καμπύλη***, ἐάν εἰς κάθε σημεῖον της ἡ ἐφαπτομένη ταύτης εἶναι μία ἀσυμπτωτική διεύθυνσις.

(Οὕτω ἐξ ἑκάστου ὑπερβολικοῦ σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχονται δύο ἀσυμπτωτικαί γραμμαί καί ἐξ ἑκάστου παραβολικοῦ σημείου μία.)

Δοθείσης τῆς ἐπιφανείας $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u,v)$ μία καμπύλη ταύτης θά εἶναι ἀσυμπτωτική γραμμή, ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ διεύθυνσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς

καμπύλης εἰς κάθε σημεῖον ἱκανοποιῇ τὴν ἐξίσωσιν (1). Εἰς ἕνα ὑπερβολικόν σημεῖον ἡ ἐξίσωσις (1) διασπᾶται εἰς δύο ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $Adu + Bdv = 0$ αἱ ὁποῖαι εἶναι διαφ. ἐξισώσεις πρώτης τάξεως καί ὁλοκληρώνονται εὐκόλως. Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπό τήν μορφήν $z = f(x,y)$, τότε αἱ ἀσυμπτωτικαί γραμμαί αὐτῆς πληροῦν τήν ἐξίσωσιν:

$$r dx^2 + 2s\, dxdy + t dy^2 = 0 \qquad (1')$$

● Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ u καί v - παραμετρικαί γραμμαί εἶναι ἀσυμπτωτικαί γραμμαί τῆς ἐπιφανείας, τότε θά ἔχωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) $Ldu^2 = 0$ ἐξ ἧς $L = 0$ καί $Ndv^2 = 0$ ἐξ ἧς $N = 0$. Ὅθεν, αἱ u καί v - παραμετρικαί γραμμαί τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἀσυμπτωτικαί, ἐάν καί μόνον ἐάν $L = N = 0$.

● Εἶναι γνωστόν ὅτι, ἡ καμπυλότης k μιᾶς τυχούσης ἐπιφανειακῆς γραμμῆς μετά τῆς καθέτου καμπυλότητος k_n συνδέονται ὑπό τῆς σχέσεως:

$$k\, συν\theta = k_n = \frac{II}{I},$$

ὅπου θ ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ πρώτη κάθετος τῆς καμπύλης μετά τοῦ καθέτου διανύσματος N ἐπί τήν ἐπιφάνειαν (βλ. σελ. 303).

Κατά μῆκος δέ τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν θά ἔχωμεν:

$$k\, συν\theta = 0 \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐπαληθεύεται εἴτε διά $k=0$ (3) εἴτε διά $\theta = \frac{\pi}{2}$ (4). Ἡ συνθήκη (3) πληροῦται ἐφ' ὅσον αἱ ἀσυμπτωτικαί γραμμαί εἶναι εὐθεῖαι. Ἀντιστρόφως, πᾶσα εὐθεῖα γραμμή ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ἀσυμπτωτική γραμμή.

Ἡ συνθήκη (4) πληροῦται, ὅταν τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς σχηματίζῃ ὀρθήν γωνίαν μετά τῆς καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν, δηλ. ὅταν συμπίπτῃ μετά τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας. Τό ἀντίστροφον δίδεται ὑπό τῆς κάτωθι προτάσεως:

Πρότασις X-11-1. Εἰς πᾶν σημεῖον μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον ταύτης συμπίπτει μετά τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἔστω **N** ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας, **τ** τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς καί **ν** ἡ πρώτη κάθετος ταύτης.

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι τά διανύσματα $\boldsymbol{\tau}$ καί $\boldsymbol{\nu}$ εἶναι ὀρθογώνια πρός τό $\mathbf{N}$. Κατά μῆκος τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς ἔχομεν:

$$\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \quad (1)$$

Διά παραγωγίσεως τῆς (1) ὡς πρός τό μῆκος τοῦ τόξου ἔχομεν:

$$\dot{\mathbf{N}}\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathbf{N}\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}} = 0 \quad (2) \qquad \text{ἤ}$$

$$\dot{\mathbf{N}}\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathbf{N}\,(k\cdot\boldsymbol{\nu}) = 0 \quad (3)$$

Εἶναι ὅμως $\mathbf{N}\,(k\cdot\boldsymbol{\nu}) = k_n$ καί ἐπειδή ἔχομεν ἀσυμπτωτική γραμμή θά εἶναι $k_n = 0$. Ὅθεν ἡ (3) γράφεται $\dot{\mathbf{N}}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$ (4).

Ἐκ τῶν (2) καί (4) λαμβάνομεν $\mathbf{N}\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}} = 0$ ἤ $\mathbf{N}\cdot(k\cdot\boldsymbol{\nu}) = 0$. (5).

Ἐάν $k \neq 0$ (ἡ ἀσυμπτωτική δέν εἶναι εὐθεῖα), ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν $\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ (6) ἤτοι τό $\mathbf{N}$ ὀρθογώνιον πρός τό $\boldsymbol{\nu}$. Ἄρα τά $\boldsymbol{\tau}$ καί $\boldsymbol{\nu}$ εἶναι ὀρθογώνια πρός τό $\mathbf{N}$ ἤτοι: <u>τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς συμπίπτει μετά τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας.</u>

• Μία διεύθυνσις $\frac{\delta u}{\delta v}$ εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καλεῖται ***συζυγής*** πρός τήν διεύθυνσιν $\frac{du}{dv}$, ἐάν $d\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\mathbf{N} = 0$ (1).

Ἐπειδή $d\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_u du + \boldsymbol{\tau}_v dv$ καί $\delta\mathbf{N} = \mathbf{N}_u \delta u + \mathbf{N}_v \delta v$ ἀναπτύσσοντες τήν σχέσιν (1) λαμβάνομεν

$$L\,du\,\delta u + M\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0 \quad (2).$$

Δύο οἰκογένειαι καμπύλων μιᾶς ἐπιφανείας θά καλοῦνται ***συζυγεῖς οἰκογένειαι καμπύλων***, ἐάν αἱ διευθύνσεις τῶν ἐφαπτομένων των εἶναι συζυγεῖς εἰς κάθε σημεῖον.

Δοθείσης μιᾶς αὐθαιρέτου διευθύνσεως $\frac{du}{dv}$ ἡ (2) εἶναι μία γραμμική ἐξίσωσις:

$$(L\,du + M\,dv)\,\delta u + (M\,du + N\,dv)\,\delta v = 0 \quad (3)$$

ὡς πρός $\delta u, \delta v$ καί ἡ ὁποία ἐπιδέχεται μία μόνον λύσιν ὡς πρός $\frac{\delta u}{\delta v}$, ἐάν $LN - M^2 \neq 0$. (διατί;). Ἡ (3) δίδει τήν οἰκογένειαν τῶν συζυγῶν διευθύνσεων (βλ. σχετ. ἀσκήσεις).

<u>Παραδείγματα</u>: 1ον/ Θεωροῦμεν τήν κωνικήν ἐπιφάνειαν (βλ. σελ. 301).

$$\boldsymbol{\tau} = (\rho\,\text{συν}\theta)\cdot\mathbf{i} + (\rho\,\text{ημ}\theta)\cdot\mathbf{j} + (\log\rho)\cdot\mathbf{k}, \quad \rho > 0.$$

Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀσυμπτωτικαί γραμμαί αὐτῆς καί ἐν συνεχείᾳ νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις ταύτης μέ παραμετρικάς γραμμάς τάς ἀσυμπτωτικάς της γραμμάς.

Λύσις: Δι' ἑνός ἁπλοῦ ὑπολογισμοῦ εὑρίσκομεν:

$$L=-\rho(1+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad M=0, \quad N=\frac{1}{\rho}(1+\rho^2)^{1/2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν ἐξίσωσιν (1) τά L, M, N καί πολλαπλασιάζοντες ἐπί $(1+\rho^2)^{1/2}$ λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν: $-\rho d\theta^2+\frac{d\rho^2}{\rho}=0$ ἤ $\rho^2 d\theta^2=d\rho^2$. Ἡ τελευταία διασπᾶται εἰς τάς ἐξισώσεις $d\theta=\frac{d\rho}{\rho}$ καί $d\theta=-\frac{d\rho}{\rho}$. Αἱ δύο τελευταῖαι δι' ὁλοκληρώσεως δίδουν $\theta+u=\log\rho$, $\theta+v=-\log\rho$, ὅπου u καί v αὐθαίρετοι σταθεραί. Λαμβάνοντες τά u καί v ὡς παραμέτρους τῆς ἐπιφανείας προφανῶς αὗται θά εἶναι ἀσυμπτωτικαί γραμμαί ταύτης. Δι' ἐπιλύσεως τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ὡς πρός θ καί ρ λαμβάνομεν τελικῶς $\theta=-(u+v)/2$, $\rho=e^{(u-v)/2}$. Οὕτω ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας μέ παραμέτρους τάς ἀσυμπτωτικάς της γραμμάς εἶναι:

$$\mathbf{r}=e^{(u-v)/2}\,\text{συν}\frac{(u+v)}{2}\cdot i+e^{(u-v)/2}\,\text{ημ}\frac{u+v}{2}\,j+\frac{u-v}{2}\cdot k.$$

2ον/. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀσυμπτωτικαί γραμμαί τῆς ἐπιφανείας $z=x^m\cdot y^n$.

Λύσις: Ἔχομεν $r=m(m-1)\cdot x^{m-2}y^n$, $s=m\cdot n\cdot x^{m-1}y^{n-1}$, $t=n(n-1)\cdot x^m y^{n-2}$ καί ἡ διαφορική ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$m(m-1)\cdot\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{dx}{dy}\right)^2+2mn\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{dx}{dy}\right)+n(n-1)=0.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἐξάγομεν δύο τιμάς h_1 καί h_2 διά τόν λόγον $\frac{y}{x}\cdot\frac{dx}{dy}$. Αἱ δύο οἰκογένειαι τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν προβαλόμεναι ἐπί τοῦ ἐπιπέδου oxy παρέχονται ὑπό τῶν ἐξισώσεων $y^{h_1}=c_1x$ καί $y^{h_2}=c_2x$.

§ 12. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ GAUSS - WEINGARTEN

Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι $\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{vv}, N_u, N_v$ καί εἶναι συνεχεῖς. Ἐπειδή τά διανύσματα $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ καί N εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα μεταξύ των, δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^1\mathbf{r}_u+\Gamma_{11}^2\mathbf{r}_v+a_{11}N\\
\mathbf{r}_{uv} &= \Gamma_{12}^1\mathbf{r}_u+\Gamma_{12}^2\mathbf{r}_v+a_{12}N\\
\mathbf{r}_{vv} &= \Gamma_{22}^1\mathbf{r}_u+\Gamma_{22}^2\mathbf{r}_v+a_{22}N\\
N_u &= \beta_1^1\mathbf{r}_u+\beta_1^2\mathbf{r}_v+\gamma_1 N\\
N_v &= \beta_2^1\mathbf{r}_u+\beta_2^2\mathbf{r}_v+\gamma_2 N
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

όπου οἱ συντελεσταί $\Gamma_{ij}^{k}, a_{ij}, \beta_i^j, \gamma_i$ δύνανται νά προσδιορισθοῦν.

Ἐπειδή $N \cdot dN = 0$ θά εἶναι $N \cdot (N_u du + N_v dv) = 0$ καί ἐπειδή τά N_u, N_v εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα θά εἶναι τό N ὀρθογώνιον πρός τό N_u, N_v. Ὅθεν:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= N_u \cdot N = \beta_1^1 \mathbf{r}_u \cdot N + \beta_1^2 \mathbf{r}_v \cdot N + \gamma_1 \cdot N \cdot N \\ 0 &= N_v \cdot N = \beta_2^1 \mathbf{r}_u \cdot N + \beta_2^2 \mathbf{r}_v \cdot N + \gamma_2 \cdot N \cdot N \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Εἶναι ὅμως $\mathbf{r}_u \cdot N = \mathbf{r}_v \cdot N = 0$ καί $N \cdot N = 1$. Ἐκ τῶν σχέσεων (2) προκύπτει ἄμεσα ὅτι θά πρέπει νά εἶναι $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Ἐάν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τάς δύο τελευταίας τῶν σχέσεων (1) ἐσωτερικῶς ἐπί $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$, λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} -L &= \mathbf{r}_u \cdot N_u = \beta_1^1 \mathbf{r}_u \mathbf{r}_u + \beta_1^2 \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = \beta_1^1 E + \beta_1^2 F \\ -M &= \mathbf{r}_v \cdot N_u = \beta_1^1 \mathbf{r}_v \mathbf{r}_u + \beta_1^2 \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \beta_1^1 F + \beta_1^2 G \\ -M &= \mathbf{r}_u \cdot N_v = \beta_2^1 \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u + \beta_2^2 \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = \beta_2^1 E + \beta_2^2 F \\ -N &= \mathbf{r}_v \cdot N_v = \beta_2^1 \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u + \beta_2^2 \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \beta_2^1 F + \beta_2^2 G \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ἐπιλύοντες τάς δύο πρώτας τῶν ἐξισώσεων (3) ὡς πρός β_1^1, β_1^2 καί τάς δύο τελευταίας ὡς πρός β_2^1, β_2^2 λαμβάνομεν:

$$\left.\beta_1^1 = \frac{MF-LG}{EG-F^2}, \quad \beta_1^2 = \frac{LF-ME}{EG-F^2}, \quad \beta_2^1 = \frac{NF-MG}{EG-F^2}, \quad \beta_2^2 = \frac{MF-NE}{EG-F^2}\right\} \quad (4)$$

Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἐσωτερικῶς ἐπί N τάς τρεῖς πρώτας τῶν ἐξισώσεων (1), λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu} \cdot N = \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_u \cdot N + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_v \cdot N + a_{11} N \cdot N = a_{11} \\ M &= \mathbf{r}_{uv} \cdot N = \Gamma_{12}^1 \mathbf{r}_u \cdot N + \Gamma_{12}^2 \mathbf{r}_v \cdot N + a_{12} N \cdot N = a_{12} \\ N &= \mathbf{r}_{vv} \cdot N = \Gamma_{22}^1 \mathbf{r}_u \cdot N + \Gamma_{22}^2 \cdot \mathbf{r}_v \cdot N + a_{22} N \cdot N = a_{22} \end{aligned}$$

Ὅθεν, $\quad a_{11} = L, \quad a_{12} = M, \quad a_{22} = N.$

Ἤδη ἀπομένει νά προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταί Γ_{ij}^k.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_{uu} &= \tfrac{1}{2} (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)_u = \tfrac{1}{2} E_u, \quad \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_{uv} = \tfrac{1}{2} (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)_v = \tfrac{1}{2} E_v, \\ \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_{vv} &= \tfrac{1}{2} (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v)_v = \tfrac{1}{2} G_v, \quad \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_{uv} = \tfrac{1}{2} (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v)_u = \tfrac{1}{2} G_u. \end{aligned}$$

Ἐπί πλέον δέ ἔχομεν:

$$\begin{aligned} F_u &= (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)_u = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_v + \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_v + \tfrac{1}{2} E_v, \\ F_v &= (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)_v = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_v + \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_{vv} = \tfrac{1}{2} G_u + \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_{vv}. \end{aligned}$$

Ὅθεν, $\tau_{uu}\cdot\tau_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$, $\tau_u\cdot\tau_{vv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$.

Λαμβάνοντες δέ τάς ἐξισώσεις (1) καί πολλαπλασιάζοντες ταύτας ἐσωτερικῶς ἐπί τ_u, τ_v καί λόγῳ τῶν ἀνωτέρω συμπερασμάτων ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}E_u &= \tau_u\cdot\tau_{uu} = \Gamma^1_{11}\,\tau_u\cdot\tau_u + \Gamma^2_{11}\,\tau_u\cdot\tau_v = \Gamma^1_{11}\cdot E + \Gamma^2_{11}\cdot F\\
F_u - \tfrac{1}{2}E_v &= \tau_v\cdot\tau_{uu} = \Gamma^1_{11}\,\tau_v\cdot\tau_u + \Gamma^2_{11}\,\tau_v\cdot\tau_v = \Gamma^1_{11}\cdot F + \Gamma^2_{11}\cdot G\\
\tfrac{1}{2}E_v &= \tau_u\cdot\tau_{uv} = \Gamma^1_{12}\,\tau_u\cdot\tau_u + \Gamma^2_{12}\,\tau_u\cdot\tau_v = \Gamma^1_{12}\,E + \Gamma^2_{12}\,F\\
\tfrac{1}{2}G_u &= \tau_v\cdot\tau_{uv} = \Gamma^1_{12}\cdot\tau_v\cdot\tau_u + \Gamma^2_{12}\,\tau_v\cdot\tau_v = \Gamma^1_{12}\cdot F + \Gamma^2_{12}\,G\\
F_v - \tfrac{1}{2}G_u &= \tau_u\cdot\tau_{vv} = \Gamma^1_{22}\cdot\tau_u\cdot\tau_u + \Gamma^2_{22}\,\tau_u\cdot\tau_v = \Gamma^1_{22}\,E + \Gamma^2_{22}\cdot F\\
\tfrac{1}{2}G_v &= \tau_v\,\tau_{vv} = \Gamma^1_{22}\,\tau_v\cdot\tau_u + \Gamma^2_{22}\,\tau_v\cdot\tau_v = \Gamma^1_{22}\,F + \Gamma^2_{22}\,G
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Ἐπιλύοντες τάς δύο πρώτας ἐξισώσεις τῶν (5) ὡς πρός $\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11}$ τήν τρίτην καί τετάρτην ὡς πρός $\Gamma^1_{12}, \Gamma^2_{12}$ καί τάς δύο τελευταίας ὡς πρός $\Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22}$ εὑρίσκομεν:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}\\
\Gamma^2_{11} &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τό θεώρημα:

<u>Θεώρημα X-12-1.</u> <u>Δοθείσης τῆς ἐπιφανείας</u> $\tau = \tau(u,v)$ <u>τά διανύσματα</u> τ_u, τ_v, N <u>καί αἱ παράγωγοι αὐτῶν ἐπαληθεύουν τάς ἐξισώσεις:</u>

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{uu} &= \Gamma^1_{11}\,\tau_u + \Gamma^2_{11}\,\tau_v + L\cdot N\\
\tau_{uv} &= \Gamma^1_{12}\,\tau_u + \Gamma^2_{12}\,\tau_v + M\cdot N\\
\tau_{vv} &= \Gamma^1_{22}\,\tau_u + \Gamma^2_{22}\,\tau_v + N\cdot N\\
N_u &= \beta^1_1\,\tau_u + \beta^2_1\,\tau_v\\
N_v &= \beta^1_2\,\tau_u + \beta^2_2\,\tau_v
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

<u>ὅπου οἱ συντελεσταί</u> β^j_i, Γ^j_{ij} <u>δίδονται ὑπό τῶν ἐξισώσεων</u> (4) <u>καί</u> (6).

Αἱ τρεῖς πρῶται τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (6) καλοῦνται ***ἐξισώσεις τοῦ Gauss***, αἱ δέ δύο τελευταῖαι καλοῦνται ***ἐξισώσεις τοῦ Weingarten***. Οἱ συντελεσταί Γ^k_{ij} καλοῦνται ***σύμβολα τοῦ Christoffel δευτέρου εἴδους***. Παρατηροῦμεν ἐκ τῶν τύπων (6) ὅτι τά Γ^k_{ij} ἐξαρτῶνται μόνον ἀπό τά θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξεως καί τάς παραγώγους αὐτῶν, ἐνῶ τά β^j_i ἐξαρτῶνται ἀπό τά θεμελιώδη ποσά πρώτης καί δευτέρας τάξεως. Τέλος ὁρίζομεν $\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$ καί $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$. Οὕτω $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ διά $i,j,k=1,2$.

Θεωροῦντες τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τῶν (1) καὶ πολλαπλασιάζοντες ταύτην ἐξωτερικῶς ἐπὶ τοῦ $\mathbf{r}_v$ εὑρίσκομεν:

$$\mathbf{r}_{uu} \times \mathbf{r}_v = \Gamma^1_{11} \, (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) + L\,(\mathbf{N} \times \mathbf{r}_v).$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐν συνεχείᾳ ταύτην ἐσωτερικῶς ἐπὶ $\mathbf{N}$ εὑρίσκομεν:

$$(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v, \mathbf{N}) = \Gamma^1_{11} \, (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{N}).$$

Θέτοντες $H = (\mathbf{N}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{H} \, (\mathbf{N}, \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v)$$

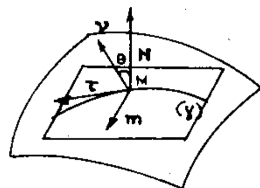
Κατ᾽ ἀναλογίαν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὑρίσκομεν:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{H}\,(\mathbf{N}, \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v)\\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{H}\,(\mathbf{N}, \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v)\\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{H}\,(\mathbf{N}, \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v)\\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{H}\,(\mathbf{N}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu})\\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{H}\,(\mathbf{N}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv})\\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{H}\,(\mathbf{N}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv})
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

§ 13. ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ – ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ ΣΤΡΕΨΙΣ

Ἔστω $M(u,v)$ ἕνα σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S καὶ $\mathbf{N}$ τὸ κάθετον διάνυσμα ταύτης εἰς τὸ M. Ἂς θεωρήσωμεν διὰ τοῦ M διερχομένην μίαν τυχοῦσαν ἐπιφανειακὴν καμπύλην (γ). Συνδέομεν εἰς τὴν (γ) ἕνα τρίεδρον διάφορον τοῦ τριέδρου τοῦ Frenet καὶ τὸ ὁποῖον κατασκευάζομεν ὡς ἀκολούθως:

Ἔστω $\boldsymbol{\tau}$ τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα τῆς (γ) εἰς τὸ M καὶ ἔστω $\mathbf{m}$ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς S εἰς τὸ M

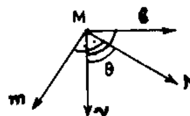


Σχ. 1.

καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ $\mathbf{m}$ νὰ εἶναι κάθετον εἰς τὸ $\boldsymbol{\tau}$ καὶ ἐπὶ πλέον τὸ τρίεδρον $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}, \mathbf{N})$ νὰ εἶναι δεξιόστροφον. Ἔστω $\boldsymbol{\nu}$ ἡ πρώτη κάθετος τῆς καμπύλης (γ) εἰς τὸ M (βλ. Σχ. 1) καὶ θ ἡ μὴ προσανατολισμένη γωνία τῶν $\boldsymbol{\nu}$ καὶ $\mathbf{N}$ μεταβαλομένη ἀπὸ 0 ἕως Π. Τὰ διανύσματα $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{N}, \mathbf{m}$ (καθὼς καὶ τὸ $\boldsymbol{\beta}$) ὡς κάθετα

πρός τό $\boldsymbol{\tau}$ εἶναι συνεπίπεδα, τά δέ $\mathbf{N}$ καί $\mathbf{m}$ εἶναι ὀρθογώνια.

Θεωροῦμεν τό κάθετον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τό Μ· τότε θά ἔχωμεν τήν ἔναντι διάταξιν τούτων (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2.

Ὡς γνωστόν ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N} &= \boldsymbol{\nu}\cdot \text{συν}\theta + \boldsymbol{\beta}\text{ημ}\theta \\ \mathbf{m} &= \boldsymbol{\nu}\,\text{ημ}\theta - \boldsymbol{\beta}\text{συν}\theta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Εἰς τό τρίεδρον $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}, \mathbf{N})$ ἀποδίδομεν τήν ὀνομασίαν γεωδαισιακόν τρίεδρον τῆς καμπύλης (γ) εἰς τό σημεῖον Μ ἤ τρίεδρον τῶν Darboux-Ribaucour. Ἐάν k καί σ εἶναι ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις τῆς ἐπιφανειακῆς καμπύλης (γ) εἰς τό σημεῖον Μ, καλοῦμεν τήν ἔκφρασιν $k_g = k\,\text{ημ}\theta$ (2) ***γεωδαισιακήν καμπυλότητα*** τῆς (γ) εἰς τό Μ, τήν δέ ἔκφρασιν $\sigma_g = \sigma + \frac{d\theta}{d\ell}$ (3) καλοῦμεν ***γεωδαισιακήν στρέψιν*** τῆς (γ) εἰς τό Μ.

Διά παραγωγίσεως τῶν τύπων (1) ὡς πρός ℓ καί ἐφαρμογῆς ἐν συνεχείᾳ τῶν τύπων τοῦ Frenet λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{d\ell} &= \dot{\boldsymbol{\nu}}\,\text{ημ}\theta + \boldsymbol{\nu}\,\text{συν}\theta\frac{d\theta}{d\ell} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\,\text{συν}\theta + \boldsymbol{\beta}\text{ημ}\theta\frac{d\theta}{d\ell} \\ &= (-k\boldsymbol{\tau} + \sigma\cdot\boldsymbol{\beta})\,\text{ημ}\theta + \boldsymbol{\nu}\,\text{συν}\theta\frac{d\theta}{d\ell} + \sigma\cdot\boldsymbol{\nu}\,\text{συν}\theta + \boldsymbol{\beta}\text{ημ}\theta\frac{d\theta}{d\ell} \\ &= -(k\,\text{ημ}\theta)\boldsymbol{\tau} + \sigma(\boldsymbol{\beta}\text{ημ}\theta + \boldsymbol{\nu}\,\text{συν}\theta) + (\boldsymbol{\nu}\,\text{συν}\theta + \boldsymbol{\beta}\,\text{ημ}\theta)\frac{d\theta}{d\ell} \\ &= -(k\,\text{ημ}\theta)\boldsymbol{\tau} + \sigma\cdot\mathbf{N} + \mathbf{N}\frac{d\theta}{d\ell} = -(k\,\text{ημ}\theta)\boldsymbol{\tau} + \left(\sigma + \frac{d\theta}{d\ell}\right)\mathbf{N}. \end{aligned}$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $k\,\text{ημ}\theta = k_g$, $\sigma + \frac{d\theta}{d\ell} = \sigma_g$, θά ἔχωμεν τελικῶς:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{m}}{d\ell} = -k_g\cdot\boldsymbol{\tau} + \sigma_g\cdot\mathbf{N}} \quad (4)$$

Δι' ἀναλόγου τρόπου εὑρίσκομεν:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{N}}{d\ell} = -(k\,\text{συν}\theta)\,\boldsymbol{\tau} + \sigma_g\cdot\mathbf{m}} \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντες τήν (4) ἐσωτερικῶς ἐπί $\boldsymbol{\tau}$ λαμβάνομεν:

$$k_g = -\frac{d\mathbf{m}}{d\ell}\cdot\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\ell} = (\text{διότι } \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{m} = 0) \quad \text{ἤ}$$

$$k_g = (N \times \tau) \cdot \frac{d\tau}{d\ell} = \left(N, \tau, \frac{d\tau}{d\ell}\right) = (N, \dot{\tau}, \ddot{\tau})$$

Ὅθεν,

$$\boxed{k_g = (N, \dot{\tau}, \ddot{\tau})} \qquad (6)$$

Ὁ τύπος (6) δίδων τὴν γεωδαισιακὴν καμπυλότητα εἶναι *ἀξιοσημείωτος*.

Ἐπειδὴ $\dot{\tau} = \tau$, $\ddot{\tau} = k \cdot \nu$ ὁ τύπος (6) γράφεται:

$$\boxed{k_g = k\,(N, \tau, \nu)} \qquad (7)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (5) ἐσωτερικῶς ἐπὶ m λαμβάνομεν:

$$\sigma_g = m \cdot \frac{dN}{d\ell} = (N \times \tau) \cdot \frac{dN}{d\ell} = \left(N, \tau, \frac{dN}{d\ell}\right)$$

Ὅθεν,

$$\boxed{\sigma_g = (N, \dot{\tau}, \dot{N})} \qquad (8)$$

Ὁ τύπος (8) δίδει τὴν γεωδαισιακὴν στρέψιν καὶ εἶναι πολλάκις χρήσιμος εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

<u>Πρότασις X-13-1</u>. <u>Ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν καμπυλότητα ταύτης.</u>

<u>Λύσις</u>: Ἔστω ἡ καμπύλη (γ) $\tau = \tau(t) = x(t)\,i + y(t)\,j$ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου oxy. Θεωροῦμεν λοιπὸν ὡς ἐπιφάνειαν τὸ ἐπίπεδον oxy καὶ ὡς γνωστὸν ἡ καμπυλότης τῆς (γ) θὰ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

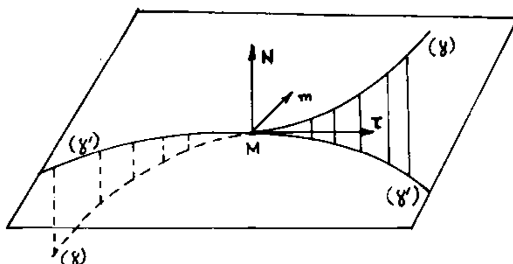
$$k = x'y'' - x''y' = \begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k, \tau', \tau'') = k_g,$$

ὅπου $k = i \times j$.

<u>Πρότασις X-13-2</u>. <u>Ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης εἰς ἕνα σημεῖον</u> Μ <u>μιᾶς ἐπιφανειακῆς καμπύλης</u> (γ) <u>ἰσοῦται πρὸς τὴν καμπυλότητα τῆς προβολῆς τῆς</u> (γ) <u>ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον</u> Μ.

<u>**Ἀπόδειξις**</u>: Ἐὰν θεωρήσωμεν εἰς τὸ σημεῖον Μ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν διά

τῆς ὁποίας προβάλεται ἡ καμπύλη (γ) ἐπί τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 1), αἱ γενέτειραι ταύτης θά ἔχουν τήν διεύθυνσιν τῆς καθέτου N, ἡ δέ κάθετος τῆς προβολῆς (γ') τῆς καμπύλης (γ) θά ἔχῃ τήν διεύθυνσιν τοῦ διανύσματος m. Ἡ γεωδαισιακή καμπυλότης λοιπόν θά ἰσοῦται πρός τήν κάθετον καμπυλότητα τῆς καθέτου



Σχ. 1

τομῆς τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἰς τό σημεῖον M καί ἥτις κάθετος τομή εἶναι ἡ καμπύλη (γ'). Ὅθεν, ἡ γεωδαισιακή καμπυλότης τῆς (γ) ἰσοῦται πρός τήν καμπυλότητα (ἐπίπεδος καμπύλη) τῆς προβολῆς της (γ') εἰς τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τό κάτωθι θεώρημα:

<u>Θεώρημα X-13-1.</u> <u>Δοθείσης τῆς ἐπιφανείας</u> $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ <u>καί τῆς καμπύλης ἡ ὁποία ἔχει τήν φυσικήν παράστασιν</u> $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\ell)=\mathbf{r}(u(\ell),v(\ell))$ <u>ἡ γεωδαισιακή καμπυλότης</u> k_g <u>ταύτης παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:</u>

$$k_g=\Big[\Gamma_{11}^2\Big(\frac{du}{d\ell}\Big)^3+\big(2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1\big)\Big(\frac{du}{d\ell}\Big)^2\Big(\frac{dv}{d\ell}\Big)+\big(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1\big)\Big(\frac{du}{d\ell}\Big)\Big(\frac{dv}{d\ell}\Big)^2-$$
$$-\Gamma_{22}^1\Big(\frac{dv}{d\ell}\Big)^3+\frac{du}{d\ell}\cdot\frac{d^2v}{d\ell^2}-\frac{d^2u}{d\ell^2}\cdot\frac{dv}{d\ell}\Big]\cdot\sqrt{EG-F^2}\,.$$

Διά τήν ἀπόδειξιν τούτου βλ. Differential Geometry, M. Lipschutz, ἐd McGraw-Hill, σελ. 250.

Ἡ γεωδαισιακή καμπυλότης δέν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς παραμ. παραστάσεως τῆς ἐπιφανείας.

Ἄς εὕρωμεν ἤδη τήν γεωδαισιακήν καμπυλότητα τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας. Οὕτω κατά μῆκος μιᾶς u-παραμετρικῆς γραμμῆς τό v-σταθ. καί τό $\frac{dv}{d\ell}=0$ καί $d\ell^2=E\,du^2$ ἐξ ἧς $\frac{du}{d\ell}=\frac{1}{\sqrt{E}}$. Ὁμοίως κατά μῆκος μιᾶς v-παραμετρικῆς γραμμῆς τό $\frac{du}{d\ell}=0$ καί $\frac{dv}{d\ell}=\frac{1}{\sqrt{G}}$. Συνεπῶς ὁ ἀνωτέρω τύπος ὁ διδων τήν γεωδαισιακήν καμπυλότητα γίνεται ἐν προκειμένῳ:

$$(k_g)_{v=\sigma\tau\alpha\vartheta}=\Gamma_{11}^2\Big(\frac{du}{d\ell}\Big)^3\sqrt{EG-F^2}=\Gamma_{11}^2\,\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\cdot\sqrt{E}} \qquad (1)$$

$$(k_g)_{u=\sigma\tau\alpha\vartheta}=-\Gamma_{22}^1\Big(\frac{dv}{d\ell}\Big)^3\sqrt{EG-F^2}=-\Gamma_{22}^1\,\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}} \qquad (2)$$

Ἐάν τέλος ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ παραμετρικαί γραμμαί τέμνονται ὀρθογωνίως

τότε $F=0$ καί οἱ τύποι (1) καί (2) γίνονται:

$$(k_g)_{v=\sigma\tau\alpha\theta} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \quad (3) \qquad (k_g)_{u=\sigma\tau\alpha\theta} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \qquad (4)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά εὑρεθῇ ἡ γεωδαισιακή καμπυλότης τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν τοῦ παραβολοειδοῦς $\mathbf{r}=(\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta)\,\mathbf{i}+(\rho\,\eta\mu\theta)\,\mathbf{j}+\rho^2\,\mathbf{k}$, ἔνθα $0<\rho<\infty$, $-\infty<\theta<+\infty$.

<u>Λύσις</u>: Εἶναι $\mathbf{r}_\rho=(\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\mathbf{i}+(\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{j}+2\rho\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_\theta=(-\rho\,\eta\mu\theta)\,\mathbf{i}+(\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\mathbf{j}$

$$E=\mathbf{r}_\rho\cdot\mathbf{r}_\rho=1+4\rho^2,\quad F=\mathbf{r}_\rho\cdot\mathbf{r}_\theta=0,\quad G=\mathbf{r}_\theta\cdot\mathbf{r}_\theta=\rho^2$$

$$N=\frac{\mathbf{r}_\rho\times\mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\rho\times\mathbf{r}_\theta|}=(1+4\rho^2)^{-1/2}\,(-2\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta)\,\mathbf{i}-2\rho\,(\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

Αἱ θ-παραμετρικαί καμπύλαι μέ $\rho=\rho_0$ εἶναι

$$\mathbf{r}=(\rho_0\,\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\mathbf{i}+(\rho_0\,\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{j}+\rho_0^2\cdot\mathbf{k}$$

Κατά μῆκος αὐτῆς τῆς καμπύλης εἶναι:

$$\mathbf{r}'=(-\rho_0\,\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{i}+(\rho_0\,\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\mathbf{j},\quad \mathbf{r}''=(-\rho_0\,\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\mathbf{i}+(-\rho_0\,\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{j}$$

καί $\dfrac{d\ell}{d\theta}=|\mathbf{r}'|=\rho_0$. Εἶναι ὅμως γνωστόν $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''):\left(\dfrac{d\ell}{d\theta}\right)^3$

Κ → β' κάθετο της ρ=ρ₀
μ → ακτίς καμπυλότητος ρ=ρ₀

<u>Ὅθεν, $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=\dfrac{\mathbf{k}}{\rho_0}$</u>. Εἶναι δέ, $k_g=(N,\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})=$

$$=N\cdot(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})=(1+4\rho_0^2)^{-1/2}\left[-2\rho_0(\sigma\upsilon\nu\theta)\,\mathbf{i}-2\rho_0\,(\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{j}+\mathbf{k}\right]\cdot\frac{\mathbf{k}}{\rho_0}=\frac{(1+4\rho_0^2)^{-1/2}}{\rho_0}.$$

Ἐξ ἄλλου ἐάν ἐφαρμόσωμεν τούς τύπους (3) καί (4) ($F=0$) καταλήγομεν εἰς τό αὐτό ἀποτέλεσμα.

§14. <u>ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ</u>

Θεωροῦμεν τήν ἐπιφάνειαν $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ καί μίαν γραμμήν $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\ell)=\mathbf{r}(u(\ell)),v(\ell))$ ἐπ' αὐτῆς.

<u>Ὁρισμός X-14-1</u>. *Καλοῦμεν γεωδαισιακήν γραμμήν μιᾶς ἐπιφανείας πᾶσαν ἐπ' αὐτῆς καμπύλην εἰς κάθε σημεῖον τῆς ὁποίας ἡ πρώτη κάθετος συμπίπτει μετά τῆς καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν.*

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (7) τῆς § 13 συμπεραίνομεν ὅτι:

<u>Κατά μῆκος μιᾶς γεωδαισιακῆς γραμμῆς ἡ γεωδαισιακή καμπυλότης εἶναι ἴση πρός μηδέν, ἤτοι</u>: $k_g=(N,\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})=0$ (1).

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης λαμβάνεται ὡς βάσις διά τόν ὁρισμόν τῶν γεωδαισιακῶν γραμ-

κῶν. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας εἶναι γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ αὐτῆς. Αἱ παράγωγοι τῆς συνθήκης (1) ἔχουν ληφθῆ ὡς πρὸς τὸ τόξον ℓ. Λόγῳ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁριζουσῶν ἡ αὐτὴ συνθήκη ἰσχύει καὶ ὡς πρὸς τυχοῦσαν μεταβλητὴν t.

• Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ ἔχομεν τὴν καμπύλην $u=u(t)$ καὶ $v=v(t)$. Ὡς γνωστὸν ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}_u\cdot u' + \mathbf{r}_v\cdot v' \\ \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}_{uu}\cdot(u')^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\cdot u'v' + \mathbf{r}_{vv}(v')^2 + \mathbf{r}_u\cdot u'' + \mathbf{r}_v\cdot v'' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (2) ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$(\mathbf{N},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)(u'v''-u''v') + (\mathbf{N},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_{uu})(u')^3 + (\mathbf{N},\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_{vv})(v')^3 + u'(v')^2\left[(\mathbf{N},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_{vv}) + 2(\mathbf{N},\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_{uv})\right] + (u')^2 v'\left[(\mathbf{N},\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_{uu}) + 2(\mathbf{N},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_{uv})\right] = 0 \qquad (3)$$

Τῇ βοηθείᾳ τῶν συμβόλων τοῦ Christoffel (βλ. τύπους (7) § 12) ἡ (3) γράφεται:

$$u'\left[v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2\right] - v'\left[u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2\right] = 0 \qquad (4)$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν καμπύλην $u=u(v)$, λαμβάνοντες οὕτω ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν v, τότε θὰ ἔχωμεν: $v'=1$, $v''=0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται:

ΘΕΩΡ. ΥΠΑΡΞΗΣ

$$\boxed{\frac{d^2u}{dv^2} = \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{dv}\right)^3 + \left(2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \left(\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12}\right)\frac{du}{dv} - \Gamma^1_{22}} \qquad (5)$$

Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (5), ἥτις εἶναι δευτέρας τάξεως, ἔχει πάντοτε λύσιν ἐντὸς φυσικὰ τῶν ἀνωμάλων σημείων τῆς ἐπιφανείας.

• Ἤδη ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν καμπύλην $u=u(\ell)$, $v=v(\ell)$ τότε, ἐὰν αὕτη εἶναι γεωδαισιακὴ καμπύλη, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν: $\mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\ell^2} = \frac{d\mathbf{t}}{d\ell} = k\cdot\mathbf{v} = k\cdot\mathbf{N}$.

Ὁ δεύτερος τῶν τύπων (2) γράφεται:

$$k\cdot\mathbf{N} = \mathbf{r}_u\frac{d^2u}{d\ell^2} + \mathbf{r}_v\frac{d^2v}{d\ell^2} + \mathbf{r}_{uu}\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\left(\frac{du}{d\ell}\right)\left(\frac{dv}{d\ell}\right) + \mathbf{r}_{vv}\left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2 \qquad (5).$$

Ἐὰν σχηματίσωμεν τὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (5) πολλαπλασιάζοντες πρῶτον ἐπὶ $\mathbf{r}_u$ καὶ δεύτερον ἐπὶ $\mathbf{r}_v$ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι: $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_u = \mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_v = 0$, καταλήγομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} E\frac{d^2u}{d\ell^2} + F\frac{d^2v}{d\ell^2} + \frac{1}{2}E_u\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + E_v\frac{du}{d\ell}\cdot\frac{dv}{d\ell} + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right)\left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2 &= 0 \\ F\frac{d^2u}{d\ell^2} + G\frac{d^2v}{d\ell^2} + \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + G_u\frac{du}{d\ell}\,\frac{dv}{d\ell} + \frac{1}{2}G_u\left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ἐάν ἐπιλύσωμεν τό σύστημα (6) ὡς πρός $\frac{d^2u}{d\ell^2}$, $\frac{d^2v}{d\ell^2}$ καί λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τούς τύπους (6) τῆς § 12 οἵτινες μᾶς δίδουν τά σύμβολα τοῦ Christoffel, καταλήγομεν εἰς τάς διαφορικάς ἐξισώσεις:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{d\ell^2} + \Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{d\ell}\cdot\frac{dv}{d\ell} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2v}{d\ell^2} + \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{d\ell}\cdot\frac{dv}{d\ell} + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Κατά τήν θεωρίαν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τό ἀνωτέρω σύστημα ἔχει μίαν λύσιν εἰς τήν περιοχήν τοῦ $\ell=0$, ἔστω τήν $u=u(\ell)$, $v=v(\ell)$.

Ἔστω $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καί $u=u(\ell)$, $v=v(\ell)$ μία λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (7). Ἔστω ὅτι μᾶς δίδονται αἱ ἀρχικαί συνθῆκαι:

$$u(0)=u_0,\ v(0)=v_0,\ \frac{du}{d\ell}(0)=\left(\frac{du}{d\ell}\right)_0,\ \frac{dv}{d\ell}(0)=\left(\frac{dv}{d\ell}\right)_0$$ ΘΕΩΡ. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤ

Τότε διά τοῦ σημείου $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ διέρχεται μία καί μόνον μία γεωδαισιακή γραμμή ἡ $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u(\ell), v(\ell))$ κατά τήν διεύθυνσιν $\left(\frac{du}{d\ell}\right)_0 : \left(\frac{dv}{d\ell}\right)_0$. Οὕτω εἰς τήν περιοχήν ἑνός σημείου M μιᾶς ἐπιφανείας ὑπάρχει μία καί μόνον μία γεωδαισιακή γραμμή διερχομένη διά τοῦ M κατά μίαν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπό τήν μορφήν $z=f(x,y)$, τότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τά λεχθέντα εἰς τήν § 9, ἡ ἐξίσωσις (5) μετά τήν ἀντικατάστασιν τῶν Γ^k_{ij} (τά ὁποῖα ὑπολογίζονται ὑπό τῶν τύπων (6) τῆς § 12) γίνεται:

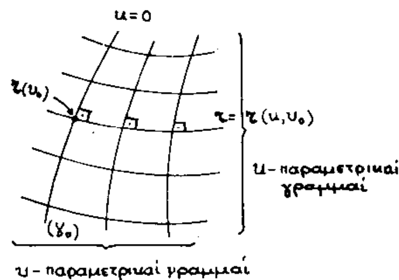
$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2} = \left(p\frac{dy}{dx} - q\right)\left[t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r\right].$$

Δι' ὁλοκληρώσεως ταύτης εὑρίσκομεν ὡς γενικήν λύσιν $\phi(y,x,c_1,c_2)=0$. Αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί προσδιορίζονται ἐκ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν.

Θά εἰσαγάγωμεν ἤδη ὡς συντεταγμένας μιᾶς ἐπιφανείας παραμετρικάς γραμμάς πού ἔχουν μίαν εἰδικήν ἰδιότητα. Ἐάν αἱ παραμετρικαί γραμμαί εἶναι ὀρθογώνιοι ἀφ' ἑνός ($F=0$) καί ἀφ' ἑτέρου ἡ μία οἰκογένεια τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν εἶναι γεωδαισιακή· τό σύνολον τοῦτο καλεῖται ***σύστημα γεωδαισιακῶν συντεταγμένων***. Γεωδαισιακαί συντεταγμέναι δύνανται νά εἰσαχθοῦν ἐπί

μιᾶς ἐπιφανείας κατ' ἀπείρους τρόπους. Ἔστω $\mathbf{r} = \mathbf{r}(v)$ εἶναι ἕνα αὐθαίρετον τόξον (γ_0) ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ (βλ. Σχ. 1).

Ἀπό τό σημεῖον $\mathbf{r}(v_0)$ διέρχεται, συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω, μία καί μόνον μία γεωδαισιακή γραμμή ὀρθογώνιος πρός τήν (γ_0) κατά μῆκος τῆς ὁποίας τό u ἰσοῦται πρός τό μῆκος τοῦ τόξου καί τοιοῦτον ὥστε: $\mathbf{r}(0,v_0) = \mathbf{r}(v_0)$.



Σχ. 1

• Ἐκ τῶν (7) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμή $v =$ σταθ. εἶναι γεωδαισιακή ἐάν $\Gamma_{11}^2 = 0$, ἤτοι $\frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = 0$

Ἐάν τό δίκτυον εἶναι ὀρθογώνιον τότε $F = 0$ καί ἡ ἀνωτέρω συνθήκη γίνεται $\frac{E_v}{G} = 0$ ἤ $E_v = 0$, ἤτοι ὁ συντελεστής E πρέπει νά ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τό u, δηλ. $E = E(u)$. Οὕτω τό γραμμικόν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας γράφεται ἐν προκειμένῳ:

$$d\ell^2 = E(u)\,du^2 + G(u,v)\,dv^2 = I \quad (8)$$

Τώρα κατά μῆκος μιᾶς γεωδαισιακῆς $v =$ σταθ., $dv = 0$, τό μῆκος τοῦ τόξου ταύτης μεταξύ τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν $u = u_1$, $u = u_2$ θά εἶναι λόγῳ τῶν (8):

$$\ell = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u)}\,du$$

→ Παρατηροῦμεν ὅτι τό μῆκος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ v κατά συνέπειαν καί τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι τό μῆκος τοῦ τόξου δύναται νά εἰσαχθῇ πάντοτε ὡς μία παράμετρος κατά μῆκος τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν ἐπί τοῦ συνόλου τῶν γεωδαισιακῶν συντεταγμένων, εἰσάγοντες οὕτω τόν παραμετρικόν μετασχηματισμόν:

$$\rightarrow u^* = \int_{u_1}^{u} \sqrt{E(t)}\,dt = \ell, \quad v = v \quad \leftarrow$$

Ἐάν λοιπόν ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ ἐκφράζεται εἰς τό σύνολον τῶν γεωδαισιακῶν συντεταγμένων τοιούτων, ὥστε ἡ παράμετρος u εἶναι μία φυσική παράμετρος κατά μῆκος τῶν γεωδαισιακῶν, τότε $E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = 1$ καί ὁ τύπος (8) γράφεται:

$$\boxed{d\ell^2 = du^2 + G(u,v)\,dv^2} \quad (9)$$

Ὁ τύπος (9) εἶναι μεγάλης σημασίας καί ἐκφράζει τό γραμμικόν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας εἰς γεωδαισιακάς συντεταγμένας, ὅπου ἡ u εἶναι φυσική παράμετρος.

• Ἔστωσαν (u_0, v_0), (u_1, v_1) αἱ γεωδαισιακαί συντεταγμέναι τῶν σημείων M_0 καί M_1 τῆς ἐπιφανείας μέ ἐξίσωσιν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, ὅπου u φυσική παράμετρος. Ἕνα τυχόν τόξον διερχόμενον διά τῶν σημείων M_0 καί M_1 ὁρίζεται ὑπό μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $v = \theta(u)$ εἰς τό ἀνωτέρω σύστημα τῶν συντεταγμένων μέ τάς ἀρχικάς συνθήκας $v_0 = \theta(u_0)$ καί $v_1 = \theta(u_1)$. Τό γραμμικόν στοιχεῖον $d\ell^2$ τῆς ἐπιφανείας, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, τίθεται ὑπό τήν μορφήν:

$$d\ell^2 = du^2 + G(u,v)\,dv^2$$

Ἐπί τῆς θεωρηθείσης καμπύλης θά ἔχωμεν:

$$(\overset{\frown}{M_0M_1}) = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{du^2 + G(u,\theta(u))\,\theta'^2(u)\,du^2} = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + G(u,\theta(u))\,\theta'^2(u)}\,du$$

Συνεπῶς $(\overset{\frown}{M_0M_1}) \geq |u_1 - u_0|$ καί $\min(\overset{\frown}{M_0M_1}) = |u_1 - u_0|$, συμβαίνει δέ τό ἐλάχιστον ὅταν $\theta'(u) = 0$, δηλ. ἡ θεωρηθεῖσα καμπύλη $v = \theta(u)$ νά εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ u, δηλ. v = σταθ. Ἀλλά μέ v = σταθ. ἔχουν ληφθῆ αἱ γεωδαισιακαί καμπύλαι εἰς τό σύστημα τῶν γεωδαισιακῶν συντεταγμένων. Ἤτοι, ἵνα τό τόξον $\overset{\frown}{M_0M_1}$ ἔχῃ ἐλάχιστον μῆκος, ἀρκεῖ νά εἶναι τοῦτο τόξον γεωδαισιακῆς γραμμῆς (τῆς v = σταθ.) διερχομένης διά τῶν σημείων M_0 καί M_1.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ κάτωθι <u>σπουδαία ἰδιότης</u> τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν:

<u>**Θεώρημα X-14-1.**</u> <u>Ἐπί ἑνός τμήματος μιᾶς ἐπιφανείας ἡ γραμμή ἐλαχίστου μήκους πού ἑνώνει δύο σημεῖα</u> M_0, M_1, <u>ἀποτελεῖται ἀπό τόξα γεωδαισιακῶν γραμμῶν (Εἶναι μία γεωδαισιακή ἐάν ἡ ὁλική καμπυλότης εἶναι παντοῦ ἀρνητική).</u>

Συμφώνως πρός τήν ἀνωτέρω ἰδιότητα αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί τοῦ ἐπιπέδου εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί.

<u>**Ἐφαρμογαί**</u> 1η/ Ἐπί μιᾶς σφαίρας δείξατε ὅτι: ἡ γεωδαισιακή ἡ διερχομένη ἔκ τινος σημείου καί τῆς ὁποίας δίδεται ἡ ἐφαπτομένη εἰς αὐτό εἶναι ὁ μέγιστος κύκλος τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον ὁρίζεται ὑπό τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καί τῆς ἐν λόγῳ ἐφαπτομένης.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνοντες ὡς ἀρχήν τῶν συντεταγμένων τό κέντρον τῆς σφαίρας ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν εἶναι:

$$(N,\dot{r},\ddot{r})=0 \qquad (2)$$

Εἰς τήν σφαίραν ὅμως ἔχομεν:

$$r=R\cdot N \qquad (3)$$

Ἡ (2), λόγῳ τῆς (3), γίνεται:

$$(r,\dot{r},\ddot{r})=0 \qquad (4) \qquad \text{ἤ}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0 \quad (5) \qquad \text{ἤ}$$

$$\begin{vmatrix} Ax+By+\Gamma z & y & z \\ d(Ax+By+\Gamma z) & dy & dz \\ d^2(Ax+By+\Gamma z) & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

..α Α,Β,Γ σταθεραί. Ἡ ἐξίσωσις (6) πληροῦται διά $Ax+By+\Gamma z=0$ (7) καί τυχού-..ις τιμάς τῶν σταθερῶν Α,Β,Γ. Ἡ (7) παριστᾷ ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ κέ-..ρου τῆς σφαίρας καί τό ὁποῖον τέμνει, ὡς γνωστόν, ταύτην κατά μέγιστον κύ-..κλον. Τό ἐπίπεδον τοῦτο καθορίζεται πλήρως, ἐάν δοθῇ τό σημεῖον ἐπί τῆς σφαίρας καθώς καί ἡ διεύθυνσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς αὐτό.

..ον Δείξατε ὅτι αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἕλικες.

Ἀπόδειξις: Ἔστω **b** τό μοναδιαῖον διάνυσμα συγγραμμικόν πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Ἔστω (γ) μία γραμμή ἐπ' αὐτοῦ καί τ, ν τό ἐφαπτομενικόν καί τό κάθετον διάνυσμα ταύτης καί **N** τό κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ γραμμή (γ) θά εἶναι γεωδαισιακή ἐάν, καί μόνον ἐάν, $\nu=N$. Εἶναι δέ $N\cdot b=0$ καί λόγῳ τῆς προηγουμένης σχέσεως $\nu\cdot b=0$. Ἐξ ἄλλου $\nu=\frac{\dot{\tau}}{k}$ (k: καμπυλότης τῆς γραμμῆς) Ὅθεν $\dot{\tau}\cdot b=0$ ἤ $\frac{d}{d\ell}(\tau\cdot b)=0$, ἐξ ἧς $\tau\cdot b=c$ (c: σταθερά) Ἡ τελευταία ὅμως εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἕλικος (βλ. σελ. 239, ἄσκ. 28).

3ον/ Νά προσδιορισθοῦν αἱ γεωδαισιακαί τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου: $r=(u\eta\mu a\sigma\upsilon\nu\theta)i+(u\eta\mu a\eta\mu\theta)j+(u\sigma\upsilon\nu a)k$, $a=$σταθερά, $0<a<\frac{\pi}{2}$, $u>0$ μέ τήν βοήθειαν τῶν ἐξισώσεων (7).

<u>Λύσις:</u> Εἶναι $E=r_u\cdot r_u=1$, $F=r_u\cdot r_\theta=0$, $G=r_\theta\cdot r_\theta=u^2\eta\mu^2 a$ καί $\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}=0$, $\Gamma^1_{22}=-u\eta\mu^2 a$, $\Gamma^2_{12}=\frac{1}{u}$. Οὕτω ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων (7) γίνεται: $\frac{d^2\theta}{d\ell^2}=-\left(\frac{2}{u}\right)\frac{du}{d\ell}\cdot\frac{d\theta}{d\ell}$. Θέτοντες $\phi=\frac{d\theta}{d\ell}$ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\frac{1}{\phi}\cdot\frac{d\phi}{d\ell}=-\frac{2}{u}\cdot\frac{du}{d\ell}$. Ἐντεῦθεν $\log\phi=-2\log u+k$ ἤ $\phi=\frac{d\theta}{d\ell}=\frac{c}{u^2}/\eta\mu^2 a$, ὅπου $c=e^k\eta\mu^2 a$. Ἐπειδή τό ℓ εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου θά ἔχωμεν:

$$1=\left|\frac{dr}{d\ell}\right|^2=\left|r_u\cdot\frac{du}{d\ell}+r_v\cdot\frac{d\theta}{d\ell}\right|^2=E\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2+2F\frac{du}{d\ell}\cdot\frac{d\theta}{d\ell}+G\left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2 \quad \text{ἤ}$$

$1=\left(\frac{du}{d\ell}\right)^2+u^2\eta\mu^2 a\left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2$. Ἀντικαθιστῶντες $\frac{d\theta}{d\ell}=\frac{c}{u^2}/\eta\mu^2 a$ λαμβάνομεν:

$$\frac{du}{d\ell}=\sqrt{u^2\eta\mu^2 a-c^2}/u\eta\mu a.$$

Ὅθεν, $\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{c}\cdot u\cdot\eta\mu a\cdot\sqrt{u^2\eta\mu^2 a-c^2}$ ἤ $u=A\tau\epsilon\mu[(\eta\mu a)\theta+B]$, ὅπου A, B σταθεραί.

4ον/ Νά εὑρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας $r=u\sigma\upsilon\nu v\cdot i+u\eta\mu v\cdot j+f(u)\cdot k$.

<u>Λύσις</u>: Διά τήν ἐπιφάνειαν ἔχομεν:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{f'f''}{1+f'^2},\ \Gamma^1_{12}=0,\ \Gamma^1_{22}=-\frac{u}{1+f'^2},\ \Gamma^2_{11}=0,\ \Gamma^2_{12}=\frac{1}{u},\ \Gamma^2_{22}=0$$

Ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων (7) γίνεται: $\frac{d^2v}{d\ell^2}+2u^{-1}\cdot\frac{du}{d\ell}\cdot\frac{dv}{d\ell}=0$ (1)
Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί u^2, ὅτε αὕτη καθίσταται τέλειον διαφορικόν καί ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν: $u^2\frac{dv}{d\ell}=c_1$ (2)

Εἶναι δέ $d\ell^2=(1+f'^2)du^2+u^2dv^2$ (3)

Δι' ἀπαλειφῆς τοῦ $d\ell$ μεταξύ τῶν (2) καί (3) λαμβάνομεν:
$u^4dv^2=c_1^2(1+f'^2)du^2+c_1^2u^2dv^2$ (4). Ἐπιλύοντες τήν (4) ὡς πρός dv εὑρίσκομεν:

$$dv=\pm c_1 u^{-1}\sqrt{(1+f'^2):(u^2-c_1^2)}\,du \quad (5)$$

Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς (5) εὑρίσκομεν:

$$v=\pm c_1\int\frac{1}{u}\cdot\sqrt{\frac{1+f'^2}{u^2-c^2}}\,du+c_2,\ c_2:\text{σταθερά}$$

Αἱ δύο σταθεραὶ c_1, c_2 δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν, ἐὰν ὁρίσωμεν : α) Εἴτε δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται ἡ γεωδαισιακή, β) Εἴτε ἕνα σημεῖον καὶ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τῆς $v = c'$ (ἢ ἄλλης σταθερᾶς διευθύνσεως διερχομένης δι' αὐτοῦ).

§ 15. ΑΝΑΠΤΥΚΤΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ.

Εἰς τὴν §1 ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας καὶ εὕρωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ταύτης εἶναι :

$$\mathfrak{r} = \rho(u) + v \cdot g(u) \qquad (1)$$

ὅπου $\rho = \rho(u)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ὁδηγοῦ καὶ $g(u)$ δεδομένη διανυσματικὴ συνάρτησις τοῦ u, μὲ $|g(u)| = 1$. Ἐὰν εἰς τὸ u δώσωμεν τὴν τιμὴν $u = u_0$, λαμβάνομεν τὴν γενέτειραν :

$$\mathfrak{r} = \rho(u_0) + v \cdot g(u_0) \qquad (2)$$

<u>Ὁρισμὸς X-15-1</u>. *Μία εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια θὰ καλῆται ἀναπτυκτή, ἐὰν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας της παραμένῃ σταθερόν.*

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἀκόλουθον:

Ἀναπτυκτὴ εἶναι ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια εἰς τὴν ὁποίαν κατὰ μῆκος κάθε γενετείρας της τὸ κάθετον διάνυσμα παραμένει σταθερόν.

Ἤδη ἂς αναζητήσωμεν τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα μία εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτή. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἕνα σημεῖον τῆς γενετείρας $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u_0, v)$ περιέχει τὰ διανύσματα $\mathfrak{r}_u(u_0, v) = \rho'_u(u_0) + v\, g'_u(u_0)$ καὶ $\mathfrak{r}_v(u_0, v) = g(u_0)$. Διὰ $v = 0$ αὐτὰ τὰ διανύσματα εἶναι : $\mathfrak{r}_u(u_0, 0) = \rho'_u(u_0)$ καὶ $\mathfrak{r}_v(u_0, 0) = g(u_0) = \mathfrak{r}_v(u_0, v)$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας, ἔστω ἤδη τῆς $u = u_0$ παραμένει σταθερόν, <u>ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, τὰ τρία διανύσματα</u> $\rho'_u(u) + v g'_u(u)$, $g(u)$ <u>καὶ</u> $\rho'_u(u)$ <u>εἶναι συνεπίπεδα, δηλ.</u> $(\rho'_u + v\, g'_u, g, \rho'_u) = 0 \quad (3)$.

Δι' ἀναλύσεως τοῦ ἀνωτέρω μικτοῦ γινομένου λαμβάνομεν :

$$\boxed{(\rho'_u, g, g'_u) = 0} \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται :

Πρότασις X-15-1. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r}=\rho(u)+v\mathbf{q}(u)$ εἶναι ἀναπτυκτή, εἶναι νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη (4) ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν $\rho'_u \times q \neq \mathcal{O}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι: Κάθε ἐπιφάνεια παραγομένη ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς στρεβλῆς καμπύλης εἶναι ἀναπτυκτή.

Πράγματι, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶναι $r=\rho(u)+v\cdot\rho'(u)$, ὅπου ἡ u θεωρεῖται φυσικὴ παράμετρος τῆς καμπύλης $\rho=\rho(u)$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ (4) γίνεται: $(\rho'_u,\ \rho'_u,\ \rho''_u)=0$, ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτή.

Πρότασις X-15-2. Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r}=\rho(u)+v\cdot q(u)$, ὅπου $|q(u)|=1$ καὶ $a<u<b$ εἶναι ἀναπτυκτή, τότε τὸ διάστημα $a<u<b$ δύναται νὰ ὑποδιαιρεθῇ εἰς ὑποδιαστήματα $a_{i-1}<u<b_{i-1}$ τοιαῦτα, ὥστε εἰς ἕκαστον τούτων ἡ ἐπιφάνεια εἶναι εἴτε ἕνα ἐπίπεδον, εἴτε ἕνας κύλινδρος, εἴτε ἕνας κῶνος εἴτε τέλος ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς καμπύλης.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτή, συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα ἀνωτέρω (βλ. τύπον (4)), τὰ διανύσματα: $\rho'_u,\ q,\ q'_u$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα καὶ ὡς ἐκ τούτου ὑπάρχουν τρεῖς συναρτήσεις $k_1(u)$, $k_2(u)$, $k_3(u)$, ὅπου $k_1^2+k_2^2+k_3^2\neq 0$ τοιαῦται, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $k_1\cdot\rho'_u+k_2\cdot q+k_3\, q'_u=\mathcal{O}$ (1)

α). Ἔστω ὅτι εἰς κάποιο διάστημα $a_{i-1}<u<b_{i-1}$ εἶναι $k_1(u)=0$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ σχέσις (1) γίνεται:

$$k_2 q+k_3 q'=\mathcal{O},\ (2),\ \text{ὅπου } k_2^2+k_3^2\neq 0.$$

Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $|q(u)|=1$, ἤτοι $q^2(u)=1$ καὶ ὡς ἐκ τούτου $q\cdot q'_u=0$. Πολλαπλασιάζοντες τὴν (2) ἐσωτερικῶς ἐπὶ q λαμβάνομεν:

$$k_2\cdot q\cdot q+k_3\cdot q\cdot q'_u=0 \ \text{ ἤ } \ k_2|q|^2=0 \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) συνάγεται $k_2(u)\equiv 0$ διὰ $a_{i-1}<u<b_{i-1}$. Ἐπειδὴ $k_3(u)\neq 0$ διὰ $a_{i-1}<u<b_{i-1}$ ἐκ τῆς (2) ἕπεται ὅτι $q'=\mathcal{O}$ ἢ $q=\text{σταθ}=a$ (4) διὰ $a_{i-1}<u<b_{i-1}$.

Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως προκύπτει ὅτι αἱ γενέτειραι τῆς ἐπιφανείας εἶναι παράλληλοι μεταξύ των καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἕνας κύλινδρος καὶ ὡς μερικὴ περίπτωσις ἕνα τμῆμα ἐπιπέδου.

β) Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι $k_1(u) \neq 0$ διά $a_{i-1} < u < b_{i-1}$, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$\rho'(u) = \lambda_1 \cdot g(u) + \lambda_2\, g'(u) \quad (5)$$

ὅπου ἐτέθη $\lambda_1 = -\frac{k_2}{k_1}$ καί $\lambda_1 = -\frac{k_3}{k_1}$.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δύναται νά γραφῇ οὕτω:

$$\tau = \rho(u) - \lambda_2 \cdot g + v_1 g \ (6), \text{ ὅπου } v_1 = v + \lambda_2$$

Ἄς θέσωμεν $\rho_1(u) = \rho(u) - \lambda_2 \cdot g$ καί ἡ (6) γράφεται:

$$\tau = \rho_1(u) + v_1 \cdot g \quad (7)$$

Εἶναι δέ: $\rho_1'(u) = \rho'(u) - \lambda_2' \cdot g - \lambda_2 g'$ (8) καί λόγῳ τῆς (5) ἡ (8) δίδει:

$$\rho_1'(u) = \lambda_1 g + \lambda_2 g' - \lambda_2' g - \lambda_2 g' = (\lambda_1 - \lambda_2') g \quad (9).$$

i) Ἔστω $\lambda_1 - \lambda_2' \equiv 0$ διά $a_{i-1} < u < b_{i-1}$, τότε ἐκ τῆς (8) λαμβάνομεν $\rho_1'(u) = 0$, ἐξ ἧς $\rho_1(u) = \text{σταθ.} = a$.

Ἡ ἐξίσωσις (7) τῆς ἐπιφανείας γράφεται:

$$\tau = a + \left\{ v + \lambda_2(u) \right\} \cdot g \quad (10)$$

Ἡ (10) παριστᾷ ἕναν κῶνον ἤ ἕνα ἐπίπεδον (διατί;).

ii) Ἔστω $\lambda_1 - \lambda_2' \neq 0$ διά $a_{i-1} < u < b_{i-1}$, τότε ἐκ τῆς (9) λαμβάνομεν:

$\rho_1'(u) = (\lambda_1 - \lambda_2') \cdot g$, ὅτε ἡ ἐξίσωσις (7) τῆς ἐπιφανείας γράφεται:

$$\tau = \rho_1(u) + \frac{(v + \lambda_2(u))}{\lambda_1 - \lambda_2'} \cdot \rho_1'(u) \quad (11)$$

Ἡ (11) παριστᾷ τήν ἐπιφάνειαν τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης $\rho = \rho_1(u)$.

Ἡ ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια ὡς ἡ περιβάλλουσα μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιπέδων.

Ἄς θεωρήσωμεν τήν μονοπαραμετρικήν οἰκογένειαν τῶν ἐπιπέδων:

$$A(a)\,x + B(a)\,y + \Gamma(a)\,z + \Delta(a) = 0 \ (1) \quad a: \text{παράμετρος}:$$

Ὡς γνωστόν (βλ. Κεφ. VI § 3) ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας (1) προκύπτει δι' ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου a μεταξύ τῶν ἐξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} A(a)x + B(a)y + \Gamma(a)z + \Delta(a) = 0 \\ A'(a)x + B'(a)y + \Gamma'(a)z + \Delta'(a) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Δι' ἕν σταθερόν α αἱ ἐξισώσεις (2) δίδουν τάς ἐξισώσεις μιᾶς εὐθείας γραμμῆς (Lα) καλουμένης ***χαρακτηριστικῆς εὐθείας*** – καθότι ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων παριστᾷ ἕνα ἐπίπεδον – καί ὡς ἐκ τούτου ἡ ἐπιφάνεια S πού εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς ἀνωτέρω οἰκογενείας (1) θεωρεῖται ὁ γ.τ. τῶν εὐθειῶν (Lα), ἤτοι: ἡ S εἶναι μία εὐθειογενής ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια S διά α=σταθ. ἐφάπτεται κάποιου ἐπιπέδου ἐκ τῆς οἰκογενείας μέ ἐξίσωσιν τήν (1) κατά μῆκος τῆς εὐθείας (Lα), δηλ. ἡ S ἔχει τό αὐτό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατά μῆκος τῆς γενετείρας (Lα). Ἤτοι, ἡ S εἶναι μία ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια. Οὕτω, μία οἰκογένεια ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς S ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς παραμέτρου α καί ἡ ὁποία (παράμετρος) προσδιορίζει, λόγῳ τῶν (2), τάς γενετείρας (Lα), ἐνῷ ἐν γένει μία οἰκογένεια ἐφαπτομένων ἐπιπέδων μιᾶς τυχούσης οἰκογενείας ἐξαρτᾶται, ὡς γνωστόν, ἐκ δύο παραμέτρων.

Θά δείξωμεν ὅτι: Πᾶσαι αἱ χαρακτηριστικαί εὐθεῖαι (Lα) εἶναι ἐφαπτόμεναι μιᾶς καμπύλης (γ) τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας S.

Πρός τούτοις διαφορίζομεν ὡς πρός α μίαν φοράν εἰσέτι τήν δευτέραν τῶν (2), ὅτε λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν:

$$A''(a)x + B''(a)y + \Gamma''(a)z + \Delta''(a) = 0 \quad (3).$$

Ἡ (3) εἶναι μία ἐξίσωσις ἐπιπέδου καί ὁρίζει ἐπί τῆς (Lα) ἕνα σημεῖον M_a (τομή εὐθείας καί ἐπιπέδου). Ὁ γ.τ. τῶν σημείων M_a, ὅταν τό α μεταβάλλεται, εἶναι μία καμπύλη, ἔστω (γ), κειμένη ἐπί τῆς ἐπιφανείας καί ἡ ὁποία καλεῖται ***γραμμή ἀνακάμψεως***. Δι' ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καί (3) ὡς πρός x, y, z εὑρίσκομεν τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις ταύτης ἤτοι: $x=\varphi(a), y=f(a), z=\sigma(a)$, ὅπου τό α εἶναι παράμετρος.

Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν τό ἐφαπτομενικόν στοιχεῖον $d\tau$ τῆς γραμμῆς ἀνακάμψεως (γ) καί ἔστω (dx, dy, dz) αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ. Διά διαφορίσεως τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} A(a)dx + B(a)dy + \Gamma(a)dz = 0 \\ A'(a)dx + B'(a)dy + \Gamma'(a)dz = 0 \end{aligned}\right\} (4)$$

Αἱ σχέσεις (4) καί (2) ἐκφράζουν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης (γ) εἶναι παράλληλος πρός τήν γενέτειρα (L_a) καί ἐπειδή αὗται ἔχουν κοινόν σημεῖον θα συμπίπτουν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι: Κάθε ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπό τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς καμπύλης τοῦ χώρου.

Ἡ γραμμή ἀνακάμψεως δύναται νά ἐκφυλισθῇ εἰς ἕνα σημεῖον πεπερασμένον ἤ καί μή, ὅτε ἡ ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια γίνεται μία κωνική ἤ κυλινδρική ἐπιφάνεια.

Ἔστω, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας πού ὁρίζεται ὡς ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων μέ ἐξίσωσιν τήν (1) δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν $z = f(x,y)$. Τά διευθύνοντα συνημίτονα τῆς καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν θά εἶναι συναρτήσεις τοῦ a, ἤτοι:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = W_1(a), \quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = W_2(a), \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = W_3(a) \qquad (1)$$

ὅπου $W_1^2(a) + W_2^2(a) + W_3^2(a) = 1$.

Ἀπαλείφοντες τό a μεταξύ τῶν δύο πρώτων τῶν (1) (ἡ τρίτη εἶναι συνέπεια αὐτῶν) θά λάβωμεν μίαν σχέσιν τῶν p καί q, ἔστω τήν $q = \varphi(p)$ (2). Ἡ (2) δύναται νά ἱκανοποιῆται ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας. Διαφορίζοντες τήν (2) ὡς πρός x καί y λαμβάνομεν:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = s = \varphi'(p)\frac{dp}{dx} = \varphi'(p)\cdot r, \quad \text{ἤτοι: } s = \varphi'(p)\cdot r \qquad (3)$$

$$\text{Ὁμοίως: } \frac{dq}{dy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = \varphi'(p)\frac{dp}{dy} = \varphi'(p)\cdot s, \quad \text{ἤτοι: } t = \varphi'(p)\cdot s \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) καί (4), δι' ἀπαλείψεως τῆς $\varphi'(p)$, λαμβάνομεν:

$$\boxed{rt - s^2 = 0} \qquad (5)$$

Ὅθεν, τά σημεῖα τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων (1), ἱκανοποιοῦν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν (5).

Ἐκ τῆς (5) προκύπτει, ὅτι πάντα τά σημεῖα τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας εἶναι παραβολικά.

Μέ τήν βοήθειαν τῶν Διαφ. ἐξισώσεων μετά μερικῶν παραγώγων ἀποδεικνύεται ὅτι, ἡ (5) παριστᾶ οἰκογένειαν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν.

῾Ως γνωστόν ἡ ὁλική καμπυλότης μιᾶς ἐπιφανείας παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου: $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ (βλ. σχετικῶς σελ. 316, § 8).

᾿Εξ ἄλλου, ἐάν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως $z=f(x,y)$, ἔχοντες ὑπ᾿ὄψιν τάς ἐκφράσεις τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν πρώτης καί δευτέρας τάξεως, συναρτήσει τῶν p, q, r, s, t (βλ. § 9), θά ἔχωμεν: $k=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=rt-s^2$

᾿Ισχύει καί τό ἀντίστροφον τοῦ ἀνωτέρω.

<u>Πρότασις X-15-3.</u> <u>Μία ἐπιφάνεια μέ ὁλική καμπυλότητα μηδέν εἰς ὅλα της τά σημεῖα εἶναι ἀναπτυκτή.</u>

<u>᾿Απόδειξις</u>: Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια S μέ ἐξίσωσιν : $r = r(u,v)$, ὅπου ὑποθέτομεν $k\equiv 0$ εἰς ὅλα της τά σημεῖα. ᾿Επειδή $k=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$, θά ἔχωμεν: $LN-M^2=0$ ὡς πρός u, v. ᾿Επειδή ὑποθέτομεν ὅτι δέν ὑπάρχουν ἐπίπεδα τμήματα τῆς ἐπιφανείας, ἕπεται ὅτι ἕκαστον σημεῖον της εἶναι παραβολικόν καί οὕτω σέ κάθε σημεῖον της ἀντιστοιχεῖ <u>μία</u> μόνον ἀσυμπτωτική διεύθυνσις $\frac{dv}{du}$ ἱκανοποιοῦσα τήν ἐξίσωσιν $II=Ldu^2+2M\,du\,dv+Ndv^2=0$, ἤ τήν $N\left(\frac{dv}{du}\right)^2+2M\frac{dv}{du}+L=0$. ᾿Εξ αὐτῆς λαμβάνομεν τήν λύσιν: $\frac{dv}{du}=-\frac{M}{N}=-\frac{L}{M}$. Οὕτως ἔχομεν ἐπί τῆς ἐπιφανείας S ὡρισμένον μονοσημάντως ἕνα πεδίον διευθύνσεων, τό ὁποῖον δημιουργεῖ μίαν οἰκογένειαν γραμμῶν γ_a ἐπί τῆς S καί ἡ ὁποία (οἰκογένεια) καλύπτει τήν S.

᾿Εκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς διαφ. ἐξισώσεως $Ndv+Mdu=0$ εἰς τό πεδίον τῶν (u,v) ἀποκτῶμεν μίαν οἰκογένειαν ὁλοκληρωτικῶν γραμμῶν $v=v(u,c)$, τῶν ὁποίων αἱ εἰκόνες ἐπί τῆς S εἶναι ἀσυμπτωτικαί γραμμαί τῆς ἐπιφανείας. Λέγομεν, ὅτι κατά μῆκος μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς, ἔστω γ_{a}, τῆς ἐπιφανείας, τό κάθετον διάνυσμα $N=N(u,v(u))$ ἔχει σταθεράν τιμήν, ἔστω $\vec{C}_a$. ᾿Επειδή ἡ διεύθυνσις εἶναι ἀσυμπτωτική, ἡ κάθετος καμπυλότης $k_n=\frac{II}{I}$ κατά μῆκος αὐτῆς εἶναι μηδέν. ᾿Εφαρμόζοντες δέ τόν τύπον τοῦ Rodrigues (βλ. § 10, τύπον (7)), ἤτοι $dN=-k_n\,dr$ ἔχομεν ὅτι, $dN(u,v(u))=0$, δηλ. $N(u,v(u))=\vec{C}_a$ κατά μῆκος τῆς γ_a. ᾿Εξ αὐτοῦ ἕπεται, ὅτι ἡ γ_a κεῖται ἐφ᾿ ἑνός ἐπιπέδου, ἔστω Π_a, διότι πάντα τά ἐφαπτομενικά διανύσματα τῆς γ_a εἶναι κάθετα πρός τό σταθερόν διάνυσμα $\vec{C}_a$. Τά ἐπίπεδα Π_a ἀποτελοῦν μίαν μονοπαραμετρικήν οἰκογένειαν ἐπιπέδων, τά ὁποῖα ἔχουν διά περιβάλλουσαν τήν S, διότι ἡ S ἐφάπτεται κάθε ἐπιπέδου Π_a κατά μῆκος τῆς γραμμῆς γ_a, παράγεται δέ ἀπό

τάς γραμμάς γ_a. Ὅθεν, συμφώνως πρός τά λεχθέντα ἀνωτέρω εἰς τήν παροῦσαν §, ἡ S ὡς παραγομένη ὑπό μιᾶς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιπέδων εἶναι ἀναπτυκτή καί αἱ γραμμαί γ_a, κατά μῆκος τῶν ὁποίων τό ἐφαπτομενικόν ἐπίπεδον Π_a παραμένει σταθερόν, θά εἶναι εὐθεῖαι, θά εἶναι δέ αὗται αἱ καλούμεναι ***χαρακτηριστικαί γραμμαί*** τῶν Π_a

<u>Παραδείγματα</u>: 1ον/ Προσδιορίσατε τήν συνάρτησιν $\varphi(u)$ εἰς τρόπον ὥστε ἡ εὐθειογενής ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπό τῆς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν $x=5+2u\varphi(u)+u\cdot z$, $y=u\varphi^2(u)-5z$ νά εἶναι ἀναπτυκτή.

<u>Λύσις</u>: Θέτομεν $z=v$ καί ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας γράφεται:

$$\mathbf{r} = (5+2u\varphi(u)+uv)\mathbf{i} + (u\varphi^2(u)-5v)\cdot \mathbf{j} + v\cdot \mathbf{k} =$$
$$= \{(5+2u\varphi(u))\mathbf{i} + u\varphi^2(u)\mathbf{j}\} + v\{u\cdot \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}\} = \rho(u) + v\cdot q(u).$$

Εἶναι: $\rho'_u = 2(\varphi(u)+u\varphi'(u))\mathbf{i} + (\varphi^2(u)+2u\varphi(u)\varphi'(u))\mathbf{j}$, $q'_u = \mathbf{i}$.

Ἀρκεῖ τό μικτόν γινόμενον (ρ'_u, q, q'_u) νά ἰσοῦται πρός μηδέν, ἤτοι ἀρκεῖ νά ἔχωμεν:

$$\begin{vmatrix} 2(\varphi(u)+u\varphi'(u)) & \varphi^2(u)+2u\varphi(u)\varphi'(u) & 0 \\ u & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ἀναπτύσσοντες τήν ἀνωτέρω ὁρίζουσαν λαμβάνομεν:

$$\varphi^2(u)+2u\varphi(u)\varphi'(u)=0, \quad \text{ἡ ἐάν } \varphi(u)\neq 0$$

ἔχομεν:
$$2u\frac{d\varphi}{du} + \varphi = 0.$$

Ἐκ τῆς ὁλοκληρώσεως τῆς τελευταίας διαφ. ἐξισώσεως λαμβάνομεν: $\varphi(u)=c\cdot u^{-\frac{1}{2}}$, $u>0$ καί c: *αὐθαίρετος σταθερά*.

2ον/ Νά εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ πρῶται κάθετοι μιᾶς καμπύλης σχηματίζουν ἀναπτυκτήν ἐπιφάνειαν.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω $\rho=\rho(\ell)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης. Ἡ εὐθειογενής ἐπιφάνεια πού σχηματίζουν αἱ πρῶται κάθετοι θά ἔχῃ ὡς ἐξίσωσιν:

$$\mathbf{r} = \rho(\ell) + v\cdot \mathbf{v} \quad (1).$$

θά εὕρωμεν, λοιπόν, πότε πληροῦται ἡ συνθήκη :

$$(\dot{\rho}, \ell), \nu, \dot{\nu}) = 0 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων τοῦ Frenet ἔχομεν :

$$\dot{\rho} = \tau, \ \dot{\nu} = -k\tau + \sigma\cdot\beta \text{ καί ὁ (2) γίνεται:}$$

$$(\tau, \nu, -k\tau + \sigma\cdot\beta) = 0 \quad (3) \text{ ἤ}$$

$$(\tau, \nu, \sigma\cdot\beta) = 0 \qquad (4)$$

Ἵνα ἰσχύῃ ἡ (4), ἀρκεῖ τό $\sigma = 0$, δηλ. ὅταν ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος.

3ον/ Νά εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπό τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων τῆς καμπύλης: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

<u>Λύσις</u>: Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἶναι: $t^3 - 3t^2X + 3tY - Z = 0$. (1). Ἡ (1) παριστᾷ μίαν μονοπαραμετρικήν οἰκογένειαν ἐπιπέδων (t: παράμετρος). Διά νά εὕρωμεν τήν ἀναπτυκτήν ἐπιφάνειαν τήν παραγομένην ὑπό τῆς οἰκογενείας (1) παραγωγίζομεν ταύτην ὡς πρός t, ὅτε λαμβάνομεν:

$$t^2 - 2tX + Y = 0 \qquad (2)$$

Δι' ἀπαλειφῆς τῆς t μεταξύ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν:

$$(XY - Z)^2 - 4(X^2 - Y)(Y^2 - XZ) = 0.$$

<u>Αἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) ἄς σημειωθῇ ὅτι παριστοῦν τήν ἐφαπτομένην τῆς θεωρηθείσης καμπύλης.</u>

§ 16. <u>ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ</u>

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον δίδομεν, λίαν συντόμως, τινά περί τῆς ἀπεικονίσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Πληρεστέραν μελέτην βλ. "Θεωρία Ἐπιφανειῶν", Μ. Μπρίκα, Τεῦχος Ι, Κεφ. 4ον.

I. <u>Ἰσομετρική ἀπεικόνισις</u>. Ἔστωσαν αἱ ἐπιφάνειαι S καί S^* τῶν ὁποίων αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις εἶναι $\tau = \tau(u,v)$ καί $\tau^* = \tau^*(u^*, v^*)$ (1).

Μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τῆς ἐπιφανείας S ἐπί τῆς ἐπιφανείας S^* θά δίδεται ὑπό τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων: $u^* = u^*(u,v)$, $v^* = v^*(u,v)$ (2), τό ὁποῖον ὑποθέτομεν μονοσημάντως ἐπιλύσιμον ὡς πρός u, v. Οὕτω, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας S^* ὡς πρός τάς καμπυλογράμμους συντεταγμένας u, v εἶναι: $\tau^* = \tau^*(u^*(u,v), v^*(u,v))$.

Κατ' αὐτόν τόν τρόπον εἰς τό σημεῖον $M(u,v)$ τῆς S ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖον $M^*(u^*(u,v), v^*(u,v))$ μέ τό αὐτό ζεῦγος τιμῶν (u,v)

Ἐάν ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τῆς S ἐπί τῆς S^*, ὡς ὡρίσθη ἀνωτέρω (δηλ. τά ἀντίστοιχα σημεῖα νά χαρακτηρίζονται ἀπό τό αὐτό ζεῦγος (u,v)), ἔχῃ τήν ἰδιότητα νά διατηρῇ τά μήκη τῶν γραμμῶν, δηλ. τό μῆκος κάθε γραμμῆς γ τῆς S νά ἰσοῦται μέ τό μῆκος τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς γ^* ἐπί τῆς S^*, τότε ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις καλεῖται *ἰσομετρική*.

Ἔστω ἡ γραμμή $\gamma: u=u(t),\ v=v(t)$ ἐπί τῆς S καί ἡ ἀντίστοιχός της ἐπί τῆς S^* ἡ $\gamma^*:\ u^*=u^*(u(t),v(t))=u^*(t),\ v^*=v^*(u(t),v(t))=v^*(t)$.

Ἐάν ἡ ἀπεικόνισις ὑποτεθῇ ἰσομετρική, διά τά μήκη τῶν τόξων τῶν ἐν λόγῳ γραμμῶν θά ἔχωμεν: $\ell=\ell^*$ ἤ ἐκφράζοντες ταῦτα συναρτήσει τῆς πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικῆς μορφῆς ἔχομεν:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^{1/2}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[E^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F^*\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+G^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^{1/2}dt \quad (3)$$

Διαφορίζοντες τήν (3), ὅτε διά κάθε ζεῦγος (u,v) θά ἔχωμεν:

$$E(u,v)du^2+2Fdudv+Gdv^2=E^*(u,v)du^2+2F^*dudv\ G^*dv^2 \qquad (4)$$ οἱουδήποτε ὄντος

τοῦ λόγου du/dv. Συνεπῶς ἵνα ἰσχύῃ ἡ (4), ἀρκεῖ νά ἔχωμεν:

$$E(u,v)=E^*(u,v),\quad F(u,v)=F^*(u,v),\quad G(u,v)=G^*(u,v) \qquad (5).$$

Ὅθεν, ἐάν ἡ ἀπεικόνισις τῶν ἐπιφανειῶν S καί S^* εἶναι ἰσομετρική, θά ἰσχύουν αἱ σχέσεις (5) καί ἀντιστρόφως.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ καμπύλαι ἐπί τῶν ἐπιφανειῶν S καί S^* εἶναι προσανατολισμέναι. Ὑπό τόν ὅρον γωνία τῶν καμπύλων $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(t),\ \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}(t)$ ἐπί τῆς ἐπιφανείας S ἐννοοῦμεν τήν γωνίαν θ τῶν διανυσμάτων $\boldsymbol{\tau}'(t),\ \boldsymbol{\xi}'(t)$, ἤτοι: $\theta=\measuredangle(\boldsymbol{\tau}'(t),\boldsymbol{\xi}'(t))$. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (15) τῆς §3 πού δίδει τήν γωνίαν δύο ἐπιφανειακῶν γραμμῶν καθώς καί τούς τύπους (5) κατά τήν ἰσομετρικήν ἀπεικόνισιν συμπεραίνομεν ὅτι: Κατά τήν ἰσομετρικήν ἀπεικόνισιν ἡ γωνία δύο προσανατολισμένων γραμμῶν γ_1,γ_2 τεμνομένων εἰς τό σημεῖον M ἰσοῦται πρός τήν γωνίαν τῶν εἰκόνων των γ_1^*,γ_2^* εἰς τό ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς τομῆς των M^*.

Κατά τήν ἰσομετρικήν ἀπεικόνισιν αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες k_1,k_2 εἰς τά διάφορα σημεῖα M τῆς S δέν παραμένουν ἀναλλοίωτοι, δηλ. τά ἀντίστοιχα σημεῖα M^* τῆς S^* δέν ἔχουν ὡς πρωτευούσας καμπυλότητας τάς k_1,k_2.

Ἐνῷ ἡ ὁλική καμπυλότης K εἰς τά διάφορα σημεῖα τῆς S κατά τήν ἰσομετρικήν ἀπεικόνισιν παραμένει ἀναλλοίωτος. Τό ἀνωτέρω ἕπεται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Gauss (βλ. θεώρημα X-8-1). Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι: i) Μία σφαῖρα (ὁλική καμπυλότης σταθερά καί ἴση πρός $K=\frac{1}{R^2}$) δέν εἶναι ἰσομετρικά ἀπεικονίσιμος ἐπί ἑνός ἐπιπέδου (ὁλική καμπυλότης σταθερά καί ἴση πρός $K=0$). ii) Μία σφαῖρα δέν ἀπεικονίζεται ἰσομετρικά ἐπί μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας πού ἔχει ὁλικήν καμπυλότητα μηδέν.

iii) Εἰς τό ἐπίπεδον μόνον αἱ ἀναπτυκταί ἐπιφάνειαι ἐνδέχεται νά ἀπεικονίζωνται ἰσομετρικῶς πού ἔχουν ἀμφότεραι ὁλικήν καμπυλότητα μηδέν.

Ἐπειδή κατά τήν ἰσομετρικήν ἀπεικόνισιν τά σύμβολα τοῦ Christoffel Γ_{ij}^{k} παραμένουν ἀναλλοίωτα (βλ. τύπους (5') § 6), λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν καί τόν τύπον τόν διδόντα τήν γεωδαισιακήν καμπυλότητα k_g (βλ. θεώρημα X-13-1), ἕπεται ὅτι: Κατά τήν ἰσομετρικήν ἀπεικόνισιν ἡ γεωδαισιακή καμπυλότης παραμένει κατ' ἀπόλυτον τιμήν ἀναλλοίωτος, αἱ δέ γεωδαισιακαί γραμμαί τῆς μιᾶς ἐπιφανείας ἀπεικονίζονται εἰς τάς γεωδαισιακάς γραμμάς τῆς ἄλλης ἐπιφανείας. !

II. **Σύμμορφος ἀπεικόνισις**. Μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f μιᾶς ἐπιφανείας S ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας S^* καλεῖται **σύμμορφος**, ἐάν ὑπάρχῃ μία συνάρτησις $\lambda(u,v)$ τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$E=\lambda^2\cdot E^*,\ F=\lambda^2\cdot F^*,\ G=\lambda^2 G^* \quad (1)$$

ὅπου τά E, F, G καί E^*, F^*, G^* εἶναι τά θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξεως τῶν ἐπιφανειῶν S καί S^* μέ ἀντιστοίχους ἐξισώσεις: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}^*(u,v)$.

Πρότασις X-16-1 Κατά τήν σύμμορφον ἀπεικόνισιν δύο ἐπιφανειῶν διατηρεῖται ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζουν εἰς τό σημεῖον τῆς τομῆς των δύο προσανατολισμέναι γραμμαί τῶν ἐπιφανειῶν (διά τοῦτο ἡ ἀπεικόνισις αὕτη καλεῖται καί *ἰσογώνιος*).

Ἀπόδειξις: Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια S μέ ἐξίσωσιν: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$. Θεωροῦμεν δύο προσανατολισμένας γραμμάς ἐπ' αὐτῆς αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

$$u=u_1(t),\ v=v_1(t),\ u=u_2(\tau),\ v=v_2(\tau),$$

τοιαῦται ὥστε $u_1(0)=u_2(0)$ καί $v_1(0)=v_2(0)$. Ἔστω δέ M τό σημεῖον τῆς τομῆς των.

Ἡ γωνία τούτων εἰς τό σημεῖον M εἶναι ἡ γωνία θ τῶν ἐφαπτομενικῶν διανυσμάτων: $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}$ (δηλ. ἡ $\theta = \sphericalangle\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}\right)$) καί τά ὁποῖα (ἐφαπτομενικά διανύσματα) ὡς γνωστόν εἶναι:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{r}_u \cdot \frac{du_1}{dt} + \mathfrak{r}_v \frac{dv_1}{dt}, \quad \frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \mathfrak{r}_u \cdot \frac{du_2}{d\tau} + \mathfrak{r}_v \cdot \frac{dv_2}{d\tau}$$

Κατά τόν τύπον (13) τῆς § 3 θά ἔχωμεν:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{Eu_1' \cdot u_2' + F(u_1' \cdot v_2' + u_2' \cdot v_1') + G\, v_1' \cdot v_2'}{\left[Eu_1'^2 + 2Fu_1' \cdot v_1' + G \cdot v_1'^2\right]^{1/2} \cdot \left[Eu_2'^2 + 2Fu_2' \cdot v_2' + G \cdot v_2'^2\right]^{1/2}} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐάν θ^* εἶναι ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομενικῶν διανυσμάτων: $\frac{d\mathfrak{r}^*}{dt} = \mathfrak{r}_u^* \frac{du_1}{dt} + \mathfrak{r}_v^* \frac{dv_1}{dt}$ καί $\frac{d\mathfrak{r}^*}{d\tau} = \mathfrak{r}_u^* \frac{du_2}{d\tau} + \mathfrak{r}_v^* \cdot \frac{dv_2}{d\tau}$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\sigma\upsilon\nu\theta^* = \frac{E^* u_1' \cdot u_2' + F^*(u_1' \cdot v_2' + u_2' \cdot v_1') + G^* v_1' \cdot v_2'}{\left[E^* u_1'^2 + 2F^* u_1' \cdot v_1' + G^* v_1'^2\right]^{1/2} \left[E^* u_2'^2 + 2F^* u_2' \cdot v_2' + G^* v_2'^2\right]^{1/2}} \qquad (2)$$

Ἐξ ὑποθέσεως $E = \lambda^2 E^*$, $F = \lambda^2 \cdot F^*$, $G = \lambda^2 \cdot G^*$ καί λόγω τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν: $\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta^*$ ἤ $\theta = \theta^*$.

Προφανῶς ἡ ἰσομετρική ἀπεικόνισις εἶναι μία σύμμορφος ἀπεικόνισις.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι: Κατά τήν σύμμορφον ἀπεικόνισιν διά τά μήκη τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν θά ἔχωμεν:

$$\boxed{\frac{d\ell^*}{d\ell} = \frac{1}{\lambda^2}} \qquad (3)$$

Τόν λόγον $\frac{1}{\lambda^2}$ καλοῦμεν ***κλίμακα ἀπεικονίσεως*** ἤ ***συντελεστήν διαστολῆς***.

III. Ἰσεμβαδική ἀπεικόνισις: Ἔστω ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τῆς ἐπιφανείας S μέ ἐξίσωσιν $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u,v)$ ἐπί τῆς ἐπιφανείας S^* μέ ἐξίσωσιν $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}^*(u,v)$. Ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις θά καλεῖται *ἰσεμβαδική*, ἐάν οἱονδήποτε τμῆμα μιᾶς ἐπιφανείας ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα τμῆμα ἴσου ἐμβαδοῦ τῆς ἄλλης ἐπιφανείας.

Ὡς γνωστόν, τό ἐμβαδικόν στοιχεῖον μιᾶς ἐπιφανείας δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Delta S = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \quad (1) \quad \text{βλ. τύπον (9), § 3.}$$

τό δέ ἀντίστοιχον ἐμβαδικόν στοιχεῖον τῆς S^* εἶναι:

$$\Delta S^* = \sqrt{E^* G^* - F^{*2}}\, du\, dv \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) προκύπτει ὅτι: Ἡ ἰσομετρικὴ ἀπεικόνισις εἶναι καὶ ἰσεμβαδική.

Ὁμοίως, λόγῳ τῶν σχέσεων (1) τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως καὶ τῶν σχέσεων (3), προκύπτει ὅτι: Ἐάν μία σύμμορφος ἀπεικόνισις εἶναι ἰσεμβαδική, τότε αὐτὴ θὰ εἶναι καὶ ἰσομετρική.[1)]

● Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια S:

$$x=\varphi(u,v),\ y=f(u,v),\ z=\sigma(u,v),$$

τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν νὰ ἀπεικονίσωμεν ἰσεμβαδικῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου:

$$X=\Phi(u,v),\ Y=\psi(u,v)\cdot \text{(σύστημα συντεταγμένων } oXY).$$

Τὸ ἐμβαδικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας S εἶναι $\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ (4)

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ (τμήματος) τοῦ θεωρηθέντος ἐπιπέδου εἰς τὸ σύστημα (OXY) εἶναι $\tau^*=\Phi(u,v)\cdot i+\psi(u,v)\cdot j$ (τὰ i,j εἶναι τὰ μοναδιαῖα τῶν ἀξόνων OX, OY).

Ἔχομεν λοιπόν: $E^*=\tau_u^{*2}\cdot=(\Phi_u\cdot i+\psi_u\cdot j)^2=\Phi_u^2+\psi_u^2,$

$F^*=\tau_u^*\cdot\tau_v^*=(\Phi_u\cdot i+\Phi_u\cdot j)\cdot(\Phi_v\cdot i+\Phi_v\,j)=\Phi_u\cdot\Phi_v+\psi_u\cdot\psi_v$

καὶ $G^*=\tau_v^{*2}=(\Phi_v\cdot i+\psi_v\cdot j)^2=\Phi_v^2+\psi_v^2.$

Εἶναι λοιπὸν $\sqrt{E^*G^*-F^{*2}}\,du\,dv=(\Phi_u\ \Phi_v-\Phi_v\ \psi_u)\,du\,dv$ (5)

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) προκύπτει: ἵνα ἔχωμεν ἰσεμβαδικὴ ἀπεικόνισιν ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{\Phi_u\cdot\psi_v-\Phi_v\cdot\psi_u=\sqrt{EG-F^2}}\qquad(6)$$

Ἐφαρμογαί 1η/. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι $\tau=u\cdot i+\eta\mu v\cdot j+(1-\sigma\upsilon\nu v)\,k$ καὶ $\tau^*=u\cdot i+v\cdot j$ ἀπεικονίζονται ἰσομετρικῶς ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Λύσις: Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι ἀναφέρονται εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα παραμέτρων, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ γραμμικὰ των στοιχεῖα εἶναι ἴσα, ἤτοι $d\ell=d\ell^*$. Εἶναι $\tau_u=i$, $\tau_v=\sigma\upsilon\nu v\cdot j+\eta\mu v\cdot k$ καὶ $E=\tau_u^2=1$, $F=\tau_u\cdot\tau_v=0$, $G=\tau_v^2=1$. Διὰ τὴν δευτέραν ἐπιφάνειαν θὰ ἔχωμεν: $\tau_u^*=i$, $\tau_v^*=j$ καὶ $E=\tau_u^{*2}=1$, $F^*=\tau_u^*\cdot\tau_v^*=0$, $G^*=\tau_v^*=1$. Ὅθεν, $d\ell=d\ell^*$. Ἡ πρώτη τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἕνας κύλινδρος τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις εἶναι $y^2+(z-1)^2=1$ καὶ ἡ δευτέρα, ὅπου ἀπεικονίζεται ἰσομετρικῶς, εἶναι προφανῶς τὸ ἐπίπεδον xoy.

1) Μεταξὺ δύο ἐπιφανειῶν ὑπάρχει πάντοτε μία σύμμορφος ἀντιστοιχία, ὄχι ὅμως καὶ μία ἰσομετρικὴ τοιαύτη.

2ª/ Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἀπεικόνισις :

$$X=\int u\sqrt{1+\varphi'^2}\,du,\ Y=v$$

τῆς ἐπιφανείας $x=u\,\text{συν}v,\ y=u\,\text{ημ}v,\ z=\varphi(u)$ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου OXY εἶναι ἰσεμβαδική.

Λύσις: Ἔχομεν $x_u=\text{συν}v,\ y_u=\text{ημ}v,\ z_u=\varphi',\ x_v=-u\,\text{ημ}v,\ y_v=u\,\text{συν}v,\ z_v=0$. Εἶναι $E=1+\varphi'^2,\ F=0,\ G=u^2$ καί $\sqrt{EG-F^2}=u\cdot\sqrt{1+\varphi'^2}$ (1). Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $X_u=u\sqrt{1+\varphi'^2}$, $X_v=0,\ Y_u=0,\ Y_v=1$. Εἶναι δέ, $X_uY_v-X_vY_u=u\sqrt{1+\varphi'^2}$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καί (2) παρατηροῦμεν ὅτι πληροῦται ἡ συνθήκη (6) τῆς ἰσεμβαδικῆς ἀπεικονίσεως καί ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις εἶναι ἰσεμβαδική.

3ª/ Νά εὑρεθῇ μία σύμμορφος ἀπεικόνισις μιᾶς σφαίρας ἐπί ἑνός ἐπιπέδου.

Λύσις: Ἔστωσαν εἰς πολικάς συντεταγμένας αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς μοναδιαίας σφαίρας:

$$x=\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\theta,\ y=\text{ημ}\varphi\,\text{ημ}\theta,\ z=\text{συν}\varphi \quad (1).$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν: $d\ell^2=d\varphi^2+\text{ημ}^2\varphi\,d\theta^2$ (2)

Εἰς Καρτεσιανάς συντεταγμένας τό γραμμικόν στοιχεῖον γράφεται:

$$d\ell^2=dx^2+dy^2 \quad (3).$$

Διά νά ἔχωμεν σύμμορφον ἀπεικόνισιν ἀρκεῖ νά εὕρωμεν μίαν συνάρτησιν: $\lambda(\varphi,\theta)$ τοιαύτην, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$dx^2+dy^2=\lambda^2(\varphi,\theta)(d\varphi^2+\text{ημ}^2\varphi\,d\theta^2) \quad (4).$$

Τό πρῶτον μέλος τῆς (4) γράφεται: $(dx+i\,dy)(dx-i\,dy)$, διά νά θέσωμεν καί τό δεύτερον μέλος ὑπό τήν αὐτήν μορφήν ἀρκεῖ νά εὕρωμεν ἕναν ὁλοκληρώνοντα παράγοντα δι' ἕκαστον τῶν διαφορικῶν: $d\varphi+i\,\text{ημ}\varphi\,d\theta,\ d\varphi-i\,\text{ημ}\varphi\,d\theta$.

Εἶναι φανερόν, π.χ., ὅτι ἕνας ὁλοκληρώνων παράγων εἶναι ὁ $\frac{1}{\text{ημ}\varphi}$ καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά θέσωμεν: $\lambda(\varphi,\theta)=\frac{1}{\text{ημ}\varphi}$. Θά ἔχωμεν λοιπόν μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν λαμβάνοντες $\lambda^2(\varphi,\theta)=\frac{1}{\text{ημ}^2\varphi}$, ὅτε θά ἔχωμεν: $dx\pm i\,dy=\frac{d\varphi}{\text{ημ}\varphi}\pm i\,d\theta$, δηλ. $x=\log\text{εφ}\frac{\varphi}{2},\ y=\theta$.

Οὕτω εἰς τούς μεσημβρινούς $\theta=C$ (σταθερόν) ἀντιστοιχοῦν αἱ παράλληλοι

πρός τόν ἄξονα τῶν x καί εἰς τούς παραλλήλους $\varphi = c$ (σταθερόν) αἱ παράλληλοι πρός τόν ἄξονα τῶν y. Ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις καλεῖται *ἀπεικόνισις κατά Mercator*.

Διά τῆς ἀνωτέρω ἀπεικονίσεως δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν τόν γεωγραφικόν χάρτην τῆς Γῆς. ἤ καί γενικώτερον μιᾶς ἐπιφανείας.

§17 ΠΕΡΙ ΕΠΑΦΩΝ

I. **Ἐπαφή καμπύλης καί ἐπιφανείας**: Θεωροῦμεν τήν καμπύλην $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\cdot\mathbf{k}$ καθώς καί τήν ἐπιφάνειαν $F(x,y,z)=0$. Θά λέγωμεν ὅτι διά τήν τιμήν $t=t_0$ ἡ καμπύλη καί ἡ ἐπιφάνεια ἔχουν ***ἐπαφήν n- τάξεως***, ἐάν ἡ συνάρτησις $f(t) \equiv F(x(t), y(t), z(t))$ πληροῖ τάς κάτωθι συνθήκας:

$$f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = \cdots = f^{(n)}(t_0) = 0 \quad \text{ἐνῶ} \quad f^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

• Ἄς θεωρήσωμεν μίαν καμπύλην μέ ἐξίσωσιν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$ (1), ὅπου ℓ φυσική παράμετρος καί ἔστω $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\ell_0)$ τυχόν σημεῖον ταύτης. Ἐάν θεωρήσωμεν τυχόν ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ σημείου $\mathbf{r}_0$, τοῦτο ὀφείλει νά πληροῖ τήν ἐξίσωσιν $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,N = 0$ (2), ὅπου τό N εἶναι τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. Θεωροῦμεν ἤδη τήν συνάρτησιν

$$f(\ell) = (\mathbf{r}(\ell) - \mathbf{r}_0)\cdot N \qquad (3)$$

καί διά παραγωγίσεως δίς αὐτῆς λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$f'(\ell) = \dot{\mathbf{r}}(\ell)\cdot N = \boldsymbol{\tau}\cdot N \qquad (4)$$

$$f''(\ell) = \dot{\boldsymbol{\tau}}(\ell)\cdot N = k\cdot\boldsymbol{\nu}\cdot N \qquad (5)$$

Εἶναι δέ, $f(\ell_0) = 0$ (6). Ἤδη ἐξετάζομεν τήν περίπτωσιν, πότε ἔχομεν $f'(\ell_0) = \boldsymbol{\tau}(\ell_0)\cdot N = 0$ (7). Ἡ σχέσις (7) ἰσχύει τότε καί μόνον τότε ἐάν, τό $N \perp \boldsymbol{\tau}(\ell_0)$. Ὅθεν, ἕνα ἐπίπεδον ἔχει μετά τῆς δοθείσης καμπύλης ἐπαφήν 1-τάξεως ἐάν καί μόνον ἐάν περιέχῃ τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα $\boldsymbol{\tau}$ τῆς καμπύλης.

Ἔστω, ὅτι $K(\ell_0) \neq 0$ καί ζητοῦμεν πότε ἐκτός τῶν (6) καί (7) νά ἰσχύῃ καί ἡ σχέσις $f''(\ell) = k\cdot\boldsymbol{\nu}\cdot N = 0$ (8). Ἡ (8) ἰσχύει τότε καί μόνον τότε ἐάν $N \perp \boldsymbol{\nu}$, τότε ὅμως πληρουμένων τῶν (6), (7) καί (8) θά ἔχωμεν ἐπαφήν 2-τάξεως. Ὅθεν, ἕνα ἐπίπεδον ἔχει μετά τῆς καμπύλης εἰς ἕνα σημεῖον ἐπαφήν 2-τάξεως ἐάν, καί μόνον ἐάν, τό ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρός τό διάνυσμα $\mathbf{b}$ καί διέρχεται διά τοῦ $\mathbf{r}$. Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω τό ἐν λόγῳ ἐπίπεδον εἶναι τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης. Ἄρα: Τό

ἐπίπεδον μέ τάξιν ἐπαφῆς $\eta=2$ εἰς ἕνα ὁμαλόν σημεῖον τῆς καμπύλης (δηλ. σημεῖον ὅπου ὑπάρχῃ ἡ ἐφαπτομένη) εἶναι τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον.

{ Ἐάν τό σημεῖον δέν εἶναι ὁμαλόν, ἡ ἐλαχίστη τάξις ἐπαφῆς τοῦ ἐπιπέδου καθορίζει πάλι τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης. Ἡ τάξις εἶναι τότε $n>2$. }

II. Ἐπαφή δύο καμπύλων: Αἱ καμπύλαι $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{K}$ καί $(F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0)$ ἔχουν ***ἐπαφήν n-τάξεως*** διά $t=t_0$, ἐάν αἱ συναρτήσεις:

$$f(t)\equiv F(x(t),y(t),z(t))$$

$$g(t)\equiv G(x(t),y(t),z(t))$$

ἱκανοποιοῦν τάς συνθήκας

$$f(t_0)=f'(t_0)=f''(t_0)=\cdots=f^{(n)}(t_0)=0 \quad \text{ἐνῶ } f^{(n+1)}(t_0)\neq 0.$$

$$g(t_0)=g'(t_0)=g''(t_0)=\cdots=g^{(n)}(t_0)=0 \quad \text{ἐνῶ } g^{(n+1)}(t_0)\neq 0.$$

• Ἔστω ἡ καμπύλη $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\ell)$ (1) καί $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ ἕνα σημεῖον αὐτῆς ἀντιστοιχοῦν διά $\ell=\ell_0$. Ἕνας κύκλος κέντρου $K(\boldsymbol{u})$ καί ἀκτῖνος R, ὡς γνωστόν, ἔχει ἐξίσωσιν $(\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{u})^2=R^2$ (2). Ἵνα ὁ κύκλος ἔχῃ εἰς τό σημεῖον M_0 ἐπαφήν 2-τάξεως, ἀρκεῖ θέτοντες $f(\ell)\equiv(\boldsymbol{r}(\ell)-\boldsymbol{u})^2-R^2$ νά πληροῦνται αἱ ἐξισώσεις:

$\longrightarrow f(\ell_0)\equiv(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{u})^2-R^2=0$ (3), $f'(\ell_0)\equiv 2(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{u})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0=0$ (4) καί

$$f''(\ell_0)\equiv 2\dot{\boldsymbol{r}}_0^2+2(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{u})\ddot{\boldsymbol{r}}=0 \quad (5)$$

Ἐκ τῆς (4) ἕπεται $(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{u})\perp\dot{\boldsymbol{r}}_0 \Longrightarrow (\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{u})\,/\!/\,\boldsymbol{\nu}_0$ (διότι ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος). Ὅθεν, $\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{u}=\lambda\cdot\boldsymbol{\nu}_0$ (6). Ἡ (5) λόγῳ τῆς (6) γίνεται: $2\boldsymbol{t}_0^2+2\cdot\lambda\cdot\boldsymbol{\nu}_0\cdot k\cdot\boldsymbol{\nu}_0=0$ ἤ $1+K\cdot\lambda=0$ ἤ $\lambda=-\frac{1}{K}$ ὅτε λόγῳ τῆς (6) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}_0+\frac{\boldsymbol{\nu}_0}{K}$ (7). Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως προκύπτει, ὅτι τό κέντρον τοῦ κύκλου συμπίπτει μέ τό κέντρον καμπυλότητος τῆς γραμμῆς εἰς τό M_0. Λόγῳ τῆς (3), ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου εἶναι $\left(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_0-\frac{\boldsymbol{\nu}_0}{K}\right)^2=R^2$ ἤ $R=\frac{1}{K}$ (8). Ἐκ τῶν σχέσεων (7) καί (8) συμπεραίνομεν ὅτι: <u>ὁ κύκλος ὅστις ἔχει μετά τῆς καμπύλης εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον</u> M_0 ***ἐπαφήν 2-τάξεως*** <u>εἶναι ὁ ἐγγύτατος κύκλος τῆς καμπύλης εἰς τό</u> M_0.

Λόγῳ τῆς (2) ἡ ἀναλυτική ἐξίσωσις τοῦ κύκλου θά εἶναι:

$$(\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{u})^2=\frac{1}{K^2} \quad (9) \quad \text{ὅπου } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}_0+\frac{\boldsymbol{\nu}_0}{K}.$$

III. Ἐπαφή δύο ἐπιφανειῶν: Αἱ ἐπιφάνειαι $\boldsymbol{r}=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k}$ καί $F(x,y,z)=0$

ἔχουν **ἐπαφήν** n-τάξεως διά $u=u_0$ καί $\upsilon=\upsilon_0$, ἐάν ἡ συνάρτησις

$$F(u,\upsilon) \equiv F(x(u,\upsilon), y(u,\upsilon), z(u,\upsilon))$$

ἔχῃ πάσας τάς μερικάς παραγώγους μέχρι n τάξεως ἴσας πρός μηδέν διά $u=u_0$ καί $\upsilon=\upsilon_0$ καί τουλάχιστον μίαν μερικήν παράγωγον $(n+1)$-τάξεως διάφορον τοῦ μηδενός.

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις.

1. Αἱ τετραγωνικαί ἐπιφάνειαι ὁρίζονται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{41}x+2a_{42}y+2a_{43}z+a_{44}=0 \qquad (1)$$

Εἰς τήν ἀναλυτικήν Γεωμετρίαν ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐάν ἐκτελέσωμεν εἰς τήν ἐξίσωσιν (1) δύο μετασχηματισμούς, ἤτοι μίαν παράλληλον μεταφοράν καί μίαν στροφήν, αὐτή δύναται νά λάβῃ μία τῶν κάτωθι μορφῶν:[1]

α) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, ἥτις παριστᾶ ἐλλειψοειδές βλ. Σχ. 1_α.

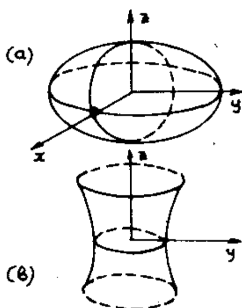
β) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, » » Μονόχωνον ὑπερβολοειδές, βλ. Σχ. 1_β.

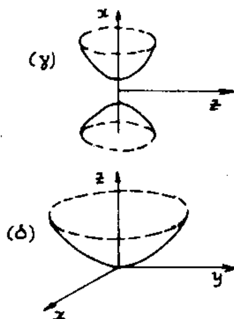
γ) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, » » Δίχωνον ὑπερβολοειδές, βλ. Σχ. 1_γ

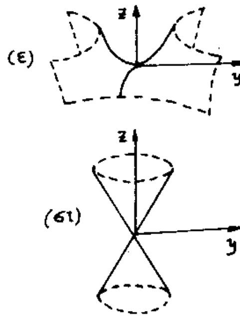
δ) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$, » » Ἐλλειπτικόν παραβολοειδές, βλ. Σχ. 1_δ.

ε) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$ » » Ὑπερβολικόν παραβολοειδές, βλ. Σχ. 1_ε

στ) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ » » Κῶνον βλ. Σχ. $1_{\sigma\tau}$.







Σχ. 1.

2. Δείξατε ὅτι, πάντα τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας $\tau = u\cdot i + \upsilon\cdot j + f(u,\upsilon)\,k$ εἶναι ὁμαλά. Ὁμοίως τῆς ἐπιφανείας $\tau = (\alpha\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta)\,i + (\beta\,\eta\mu\varphi\,\eta\mu\theta)\,j + (\gamma\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot k$, $\alpha,\beta,\gamma>0$ καί $-\infty<\theta<+\infty$, $0<\varphi<\pi$.

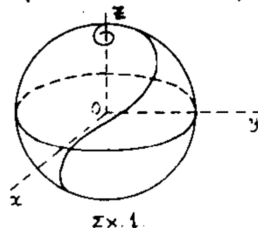
---

1) *Αἱ μορφαί ἐνδέχεται νά ἐκφυλίζωνται εἰς κυλίνδρους ἤ ἐπίπεδα.*

3. Νά εὑρεθῇ τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας $z = x^3 - y^2 + a$ εἰς τό σημεῖον $M(-1, 1, a)$. Ποῖα τά διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ καθέτου διανύσματος εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον;

• 4. Δίδεται ἡ κωνική ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = u\,\sigma\upsilon\nu v \cdot \mathbf{i} + u\,\eta\mu v \cdot \mathbf{j} + \sigma(v)\,\mathbf{k}$.
Νά εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀπό τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἕνα σημεῖον τῆς θεωρηθείσης ἐπιφανείας.

5. Δίδεται ἡ σφαῖρα $\mathbf{r} = (\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi)\,\mathbf{i} + (\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi)\,\mathbf{j} + (\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot\mathbf{k}$. Θεωροῦμεν ἐπί τῆς ἐπιφανείας τήν καμπύλην $\theta = \log t$, $\varphi = 2\,\tau o\xi\epsilon\varphi\, t$, $t > 0$. Δείξατε ὅτι ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη τέμνει τούς μεσημβρινούς τῆς σφαίρας, δηλ. τάς φ-παραμετρικάς καμπύλας ὑπό μίαν σταθεράν γωνίαν καί ἴσην πρός $\frac{\pi}{4}$ (βλ. ἔναντι Σχῆμα 1).



Σχ. 1

6. Δίδεται ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = (u^2 + v)\,\mathbf{i} + (u + v)\cdot\mathbf{j} + 2uv\cdot\mathbf{k}$ καί αἱ παραμετρικαί γραμμαί ἐπ' αὐτῆς $u = t$, $v = t^2$ καί $u = 1 - \tau^2$, $v = 1 + \tau$. Νά εὑρεθῇ ἡ γωνία τούτων εἰς τό σημεῖον τῆς τομῆς των πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τάς τιμάς $t = 0$ καί $\tau = -1$.

7. Δείξατε ὅτι, τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον παραμένει σταθερόν κατά μῆκος μιᾶς γενετείρας τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = \mathbf{p}(t) + v\cdot\mathbf{q}$, ὅπου $\mathbf{q}$ = σταθερόν $\neq \mathbf{0}$ καί $\mathbf{p}' \times \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$.

• (8) Δίδεται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = (f(t)\,\sigma\upsilon\nu\theta)\,\mathbf{i} + (f(t)\,\eta\mu\theta)\cdot\mathbf{j} + \sigma(t)\cdot\mathbf{k}$, $f(t) > 0$. Νά εὑρεθῇ τό κάθετον διάνυσμα $\mathbf{N}$ αὐτῆς.

9. Δίδεται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = (f(t)\,\sigma\upsilon\nu\varphi)\,\mathbf{i} + (f(t)\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{j} + \varphi(t)\,\mathbf{k}$. Νά προσδιορισθῇ ἡ πρώτη καί ἡ δευτέρα θεμελιώδης τετραγωνική μορφή αὐτῆς.

(10) Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς πρώτης καθέτου καθώς καί τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου μιᾶς καμπύλης τοῦ χώρου.

11. Δείξατε ὅτι πάντα τά σημεῖα τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας $\mathbf{r}=\mathbf{p}(\ell)+v\cdot\mathbf{q}(\ell)$ μέ $|\dot{\mathbf{p}}(\ell)|=1$ καί $|\mathbf{q}(\ell)|=1$, ὅπου $\dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{q}\neq\mathcal{O}$, εἶναι ὁμαλά.

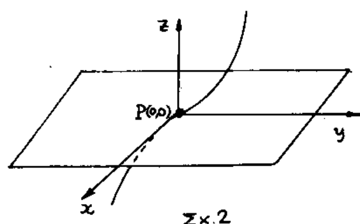
12. Δίδεται ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r}=\varphi(u,v)\,\sigma\upsilon\nu v\;\mathbf{i}+\varphi(u,v)\,\eta\mu v\cdot\mathbf{j}+\beta v\cdot\mathbf{k}$.
Ζητεῖται νά προσδιορισθῆ ἡ συνάρτησις φ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ παραμετρικαί γραμμαί ταύτης νά τέμνωνται ὑπό σταθεράν γωνίαν, ἔστω θ. Εἰδική περίπτωσις $\theta=\frac{\pi}{2}$.

(13.) Δίδεται ἡ εὐθειογενής ἐπιφάνεια $\mathbf{r}=\mathbf{p}(u)+v\cdot\mathbf{q}(u)$.
Νά εὑρεθῆ ἡ πρώτη καί ἡ δευτέρα θεμελιώδης τετραγωνική μορφή αὐτῆς καθώς καί τό γραμμικόν καί τό ἐμβαδικόν στοιχεῖον ταύτης. Νά εὑρεθῆ ἡ γωνία τῶν συντεταγμένων καμπύλων.

14. Θεωροῦμεν τήν σφαῖραν $\mathbf{r}=(\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi)\,\mathbf{i}+(\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi)\cdot\mathbf{j}+(\sigma\upsilon\nu\varphi)\,\mathbf{k}$ καί τήν καμπύλην αὐτῆς $\theta=\ell o g\,\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$, $\varphi=\frac{\pi}{2}-t$, $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$. Νά εὑρεθῆ τῇ βοηθείᾳ τῆς πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικῆς μορφῆς τό μῆκος τοῦ τόξου τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης.

15. Δίδεται ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r}=u\cdot\mathbf{i}+v\cdot\mathbf{j}+(u^2+v^2)\,\mathbf{k}$ καί ἡ καμπύλη ἐπ' αὐτῆς $u=t^2$, $v=t$.
Νά εὑρεθῆ ἡ κάθετος καμπυλότης τῆς θεωρηθείσης καμπύλης εἰς τό σημεῖον $t=1$.

(16.) Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r}=u\cdot\mathbf{i}+v\cdot\mathbf{j}+(u^2+v^2)\,\mathbf{k}$ ἔχει τά σημεῖα της ἐλλειπτικά ἐάν $v>0$, ὑπερβολικά ἐάν $v<0$ καί παραβολικά ἐάν $v=0$. Ἐν συνεχείᾳ δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια κεῖται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς κάθε περιοχήν τοῦ παραβολικοῦ σημείου $p(0,0)$. (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2

17. Νά εὑρεθῆ ἡ δείκτρια τοῦ Dupin τῆς ἐπιφανείας: $\mathbf{r}=(u+v)\,\mathbf{i}+(u-v)\cdot\mathbf{j}+u\cdot v\cdot\mathbf{k}$.

18. Θεωροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν $\mathbf{r} = u \cdot \mathbf{i} + v \cdot \mathbf{j} + (u^2 - v^2)\,\mathbf{k}$. Νά εὑρεθῇ ἡ κάθετος καμπυλότης K_n τῆς ἐπιφανείας εἰς τό σημεῖον $u=0$, $v=0$ (εἰς τήν ἀρχήν) καί νά δειχθῇ, ὅτι αὕτη μεταβάλλεται μεταξύ τῶν τιμῶν -2 καί $+2$.

19. Νά εὑρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = u \cdot \mathbf{i} + v \cdot \mathbf{j} + (u^2 + v^2) \cdot \mathbf{k}$.

20. Νά εὑρεθοῦν αἱ γραμμαί καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας $e^z = \text{συν}x \cdot \text{συν}y$.

21. Νά εὑρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες τῆς ἐπιφανείας $xyz = 1$.

• 22. Νά εὑρεθῇ ἡ διαφορική ἐξίσωσις τῶν ἐπιφανειακῶν γραμμῶν αἱ ὁποῖαι τέμνουν ὑπό σταθεράν γωνίαν, ἔστω θ, τάς v-παραμετρικάς γραμμάς τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, ὅταν τό δίκτυον τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν ταύτης εἶναι ὀρθογώνιον ($F=0$).

23. Δίδεται ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = (u+v)\,\mathbf{i} + (u-v) \cdot \mathbf{j} + u \cdot v \cdot \mathbf{k}$.
Εὕρετε τήν μέσην καμπυλότητα H καί τήν ὁλικήν καμπυλότητα K αὐτῆς εἰς τό σημεῖον $u=1$ καί $v=1$.

24. Νά εὑρεθῇ ἡ ὁλική καμπυλότης καθώς καί ἡ διαφ. ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = u\,\text{συν}v \cdot \mathbf{i} + u\,\text{ημ}v \cdot \mathbf{j} + v^2 \cdot \mathbf{k}$.

• 25. Δείξατε ὅτι, ἡ μέση καμπυλότης H εἰς κάθε σημεῖον τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = (\cosh u\,\text{συν}\theta)\,\mathbf{i} + (\cosh u\,\text{ημ}\,\theta) \cdot \mathbf{j} + u \cdot \mathbf{k}$ εἶναι μηδέν.

26. Ἐάν τό δίκτυον τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ὀρθογώνιον, τότε θά ἔχωμεν:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]$$

27. Δείξατε ὅτι, ἡ ἐξίσωσις τοῦ Gauss δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν:

$$\sqrt{EG-F^2}\,K=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\cdot E_v-EG_u}{2E\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2EF_u-FE_u-EE_v}{2E\sqrt{EG-F^2}}\right).$$

28. Δείξατε, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς:

$$r=u(\sigma\upsilon\nu\theta)\,i+u(\eta\mu\theta)\cdot j+f(v)\cdot k$$

ὅπου $u=c_1\cdot e^{v/a}+c_2\cdot e^{-\frac{v}{a}}$ καί $f(v)=\int\sqrt{1-\left(\frac{du}{dv}\right)^2}\,dv$ εἶναι μια ἐπιφάνεια με σταθερά ὁλική ἀρνητική καμπυλότητα καί ἴση πρός $K=-1/a^2$.

29. Προσδιορίσατε τάς πρωτευούσας διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας $r=u\cdot i+v\cdot j+(u^2+v^2)\cdot k$ εἰς τό σημεῖον $u=1,\ v=1$ καί ἐν συνεχείᾳ ἐπαληθεύσατε τόν τύπον τοῦ Rodrigues εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω διευθύνσεων.

30. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀσυμπτωτικαί γραμμαί τῆς ἐπιφανείας $r=(1+u)\sigma\upsilon\nu v\cdot i+(1-u)\eta\mu v\cdot j+u\cdot k$.

31. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀσυμπτωτικαί γραμμαί τῆς σπειροειδοῦς ἐπιφανείας (τύπου σαμπρέλας) παραγομένης ὑπό ἑνός κύκλου στρεφομένου πέριξ μιᾶς ἐφαπτομένης του.

32. Δείξατε, ὅτι αἱ ἀσυμπτωτικαί διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας $f(x,y,z)=C$ ἐπαληθεύουν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν $\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy+\frac{\partial f}{\partial z}\,dz=0$. Ἐν συνεχείᾳ εὕρετε τάς ἀσυμπτωτικάς γραμμάς τῆς ἐπιφανείας $z=x\eta\mu y$.

33. Δείξατε ὅτι, ἐάν μιᾶς ἐπιφανείας αἱ ἀσυμπτωτικαί γραμμαί εἶναι ὀρθογώνιοι οἰκογένειαι καμπύλων, ἡ μέση καμπυλότης θά εἶναι μηδέν.

34. Δείξατε ὅτι, ἐάν δυό ἐπιφάνειαι τέμνωνται κατά μῆκος μιᾶς καμπύλης ἡ ὁποία εἶναι γραμμή καμπυλότητος ἀμφοτέρων, τότε αἱ ἐπιφάνειαι τέμνονται ὑπό σταθεράν γωνίαν κατά μῆκος αὐτῆς τῆς καμπύλης. (Θεώρημα τοῦ Bonnet). (Ὑπόδ: Ἔστωσαν S_1 καί S_2 αἱ ἐπιφάνειαι καί N_1 καί N_2 τά κάθετα διανύσματα αὐτῶν εἰς ἕνα σημεῖον τῆς τομῆς των. Θά εἶναι $N_1\cdot N_2=\sigma\tau\alpha\theta$. Διά παραγωγίσεως

τῆς ἀνωτέρω σχέσεως λαμβάνομεν: $0=\frac{d}{dt}(N_1 \cdot N_2)=\frac{dN_1}{dt}\cdot N_2+\frac{dN_2}{dt}\cdot N_1$. Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόσατε τόν τύπον τοῦ Rodriques, καθότι ἡ τομή εἶναι γραμμή καμπυλότητος κ.τ.λ.).

35. Δείξατε ὅτι, ἕνα ἐπίπεδον ἢ μία σφαῖρα τέμνει μίαν ἐπιφάνειαν ὑπό μίαν σταθεράν γωνίαν, ἐάν καί μόνον ἐάν, ἡ καμπύλη εἶναι γραμμή καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

36. Δείξατε ὅτι ἡ u καί v – παραμετρικαί γραμμαί μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι συζυγεῖς ἐάν καί μόνον ἐάν εἰς κάθε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας εἶναι $M=0$.
(Λύσις: Ἡ ἐξίσωσις (3) τῆς σελ. 324 πρέπει νά ἱκανοποιῆται διά $du=1, dv=0$ καί $\delta u=0$, $\delta v=1$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν $M=0$. Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφον).

37. Δείξατε ὅτι αἱ παραμετρικαί καμπύλαι τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}_1(u)+\boldsymbol{\rho}_2(v)$ εἶναι συζυγεῖς οἰκογένειαι καμπύλων.

38. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ παραμετρικαί γραμμαί τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r}=(\text{συν}u+\text{συν}v)\,\mathbf{i}+(\text{ημ}u+\text{ημ}v)\cdot\mathbf{j}+\frac{c}{2}(\text{ημ}2u+\text{ημ}2v)\,\mathbf{k}$ εἶναι συζυγές.

39. Ὁρίζομεν ὡς *τρίτην θεμελιώδη τετραγωνικήν μορφήν τήν* $\text{III}=d\mathbf{N}\cdot d\mathbf{N}$. Δείξατε ὅτι $\text{III}-2H\cdot\text{II}+K\cdot\text{I}=0$, ὅπου H καί K εἶναι ἡ μέση καί ἡ ὁλική καμπυλότης ἀντιστοίχως.
(Ὑπόδ: Θεωρήσατε ἕνα σημεῖον M ἐπί τῆς ἐπιφανείας καί ὑποθέσατε ὅτι αἱ u καί v - παραμετρικαί γραμμαί εἶναι πρωτεύουσαι διευθύνσεις. Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόσατε τό τύπον τοῦ Rodriques, ὅτε θά λάβετε $\mathbf{N}_u=-k_1\mathbf{r}_u$ καί $\mathbf{N}_v=-k_2\cdot\mathbf{r}_v$ κ.τ.λ.)

40. Δείξατε ὅτι, εἰς κάθε σημεῖον μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία δέν εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ἡ στρέψις δίδεται ὑπό τοῦ τύπου $\sigma^2=-K$ (Θεώρημα τῶν Beltrami - Enneper).

(41.) Νά εὑρεθῇ ἡ διαφ. ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας $z=f(x,y)$ καθώς καί ἡ στρέψις αὐτῶν.

42. Νά εὑρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου τοῦ ὁποίου αἱ γενέτειραι σχηματίζουν μέ τόν ἄξονα αὐτοῦ γωνίαν ω.

(43) Νά εὑρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν.

44. Νά εὑρεθῇ ἡ διαφ. ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν τῆς σπείρας (κοινῶς σαμπρέλλας).

45. Νά εὑρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί: α) τοῦ ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδοῦς β) τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς, γ) τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, δ) τῆς ἁλυσσοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς.

• 46. Νά δειχθῇ, ὅτι μία ἐπίπεδος γεωδαισιακή γραμμή εἶναι καί γραμμή καμπυλότητος. Ἀντιστρόφως. Πᾶσα γραμμή καμπυλότητος εἶναι ἐπίπεδος.

(<u>Ἀποδ.</u> Ἐάν ἡ γεωδαισιακή γραμμή εἶναι ἐπίπεδος θά εἶναι καί γραμμή καμπυλότητος, διότι ἡ στρέψις τῆς γεωδαισιακῆς ἔχει ὡς ἔκφρασιν:

$$\sigma=\frac{1}{d\ell^2}\,(N,dN,d\tau) \qquad (1)$$

Ὅταν ἡ γεωδαισιακή εἶναι ἐπίπεδος τότε θά ἔχωμεν $\tau=0$, ἑπομένως $(N,dN,d\tau)=0$ (2). Ἡ τελευταία ἔκφρασις μᾶς δίδει τήν ἐξίσωσιν τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.

Ἐάν ἡ γεωδαισιακή εἶναι καί γραμμή καμπυλότητος, θά εἶναι ἐπίπεδος, διότι θά ἐπαληθεύῃ τήν (2) καί κατά συνέπειαν, λόγῳ τῆς (1), θά εἶναι $\sigma=0$.

• 47. Νά δειχθῇ, ὅτι ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας αἱ ἀσυμπτωτικαί γραμμαί, πού εἶναι συγχρόνως καί γεωδαισιακαί, εἶναι εὐθεῖαι.

48. Νά εὑρεθοῦν αἱ γραμμαί καμπυλότητος τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων $z=ax+y\varphi(a)+R\cdot\sqrt{1+a^2+\varphi^2(a)}$, ὅπου

a εἶναι παράμετρος καί $\varphi(a)$ μία παραγωγίσιμος συνάρτησις τοῦ a καί R μία σταθερά.

49. Δείξατε ὅτι τά σημεῖα μιᾶς εὐθειογενοῦς, ἐπιφανείας εἶναι ἤ ὑπερβολικά ἤ παραβολικά.

50. Δίδεται ἡ κυκλική στερεά ἕλιξ $\mathbf{r}=(a\,\text{συν}t)\,\mathbf{i}+(a\,\text{ημ}t)\cdot\mathbf{j}+(bt)\cdot\mathbf{k}$, $b>0$. Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῶν πρώτων καθέτων εἰς τά σημεῖα τῆς καμπύλης δέν εἶναι ἀναπτυκτή (αὕτη καλεῖται *ἑλικοειδής* ἐπιφάνεια).

51. Δίδεται ἡ γραμμή $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\ell)$ εἰς τόν χῶρον. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων ταύτης.

52. Δείξατε ὅτι αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἕλικες.

53. Δείξατε ὅτι αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν δύνανται νά ὑπολογισθοῦν δι' ὁλοκληρώσεως.

54. Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς $S:\mathbf{r}=(\text{συν}\theta\cosh v)\,\mathbf{i}+(\text{ημ}\theta\cosh v)\,\mathbf{j}+v\cdot\mathbf{k}$, $0<\theta<2\pi$, $-\infty<v<+\infty$

καί ἡ κωνοειδής $S^*:\mathbf{r}^*=(u\,\text{συν}\varphi)\,\mathbf{i}+(u\,\text{ημ}\varphi)\cdot\mathbf{j}+\varphi\cdot\mathbf{k}$, $0<\varphi<2\pi$, $-\infty<u<+\infty$

ἀπεικονίζεται ἰσομετρικῶς.

55. Νά εὑρεθῇ ἡ σύμμορφος ἀπεικόνισις τῆς σπείρας (κοινῶς σαμπρέλλας) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (βλ. παράδειγμα 3ον, σελ. 351).

(Ὑπόδ.: Ἔχομεν $d\ell^2=(b+a\,\text{συν}\varphi)^2\left[d\theta^2+\frac{a^2d\varphi^2}{(b+a\,\text{συν}\varphi)^2}\right]$; ἐν συνεχείᾳ θέσατε:

$$X=\theta,\; Y=\int_0^{\varphi}\frac{a\,d\varphi}{b+a\,\text{συν}\varphi}\quad \text{κ.τ.λ.}$$

56. Ὑπό ποίας συνθήκας αἱ ἐξισώσεις $X=a_1x+a_2y+a_3$, $Y=b_1x+b_2y+b_3$ ὁρίζουν ἰσεμβαδικήν ἀπεικόνισιν τοῦ ἐπιπέδου (x,y) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (X,Y).

(Ἀπάντ. πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $(a_1b_2-a_2b_1)^2=1$).

57. Δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἐξισώσεων τοῦ Weingarten δείξατε ὅτι: $\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v=K(EG-F^2)\cdot\mathbf{N}$.

(57) (<u>Θεώρημα τοῦ Catalan</u>). Ἔστω S μία ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια ἰσομετρικῶς ἀπεικονίσιμος εἰς τό ἐπίπεδον Π. Μία γραμμή γ τῆς S μετασχηματίζεται εἰς μίαν ἐπίπεδον γραμμήν γ^* ἴσου μήκους ἐπί τοῦ Π. Ἡ γ^* καλεῖται ***μετασχηματισμένη*** τῆς γ. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τῆς γ καί φ_M ἡ γωνία τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς γ εἰς τό Μ καί τῆς καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν εἰς τό αὐτό σημεῖον. Ἐάν R_M καί R^*_M εἶναι αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν γ καί γ^* εἰς τό Μ δείξατε ὅτι: $R^*_M = R_M/\text{συν}\varphi_M$ (Συγκρίνατε μέ τό θεώρημα τοῦ Meusnier). Ἀκολούθως δείξατε ὅτι ὀρθός κυκλικός κῶνος ἀκτῖνος βάσεως ρ καί ὕψους h, εἶναι ἰσομετρικῶς ἀπεικονίσιμος εἰς τό ἐπίπεδον. Εὕρετε τήν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς μετασχηματισμένης τῆς βάσεως, εἰς τυχόν σημεῖον αὐτῆς.
Μέ τήν βοήθειαν τῶν προτάσεων Euler, Meusnier, Catalan δώσατε τόν τρόπον κατασκευῆς τῆς ἐφαπτομένης τῆς μετασχηματισμένης τυχούσης καμπύλης ἐπί τοῦ κώνου εἰς τυχόν σημεῖον αὐτῆς.

58. Νά εὑρεθῆ ἡ τάξις τῆς ἐπαφῆς τῆς καμπύλης $r = t\cdot i + t^2\cdot j + t^3\cdot k$ μετά τῆς ἐπιφανείας $x^2+z^2-y^2=0$ (παραβολοειδές) εἰς τό σημεῖον $t=0$.

• 59. Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς γραμμῆς ὑποθέτοντες ὅτι αὕτη ἔχει ἐπαφήν πρώτης τάξεως μετά τῆς γραμμῆς.

• 60. Δείξατε ὅτι τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον ἔχει ἐπαφήν 3-τάξεως μέ μίαν καμπύλην εἰς ἕνα σημεῖον Μ ἐάν καί μόνον ἐάν, εἴτε ἡ καμπυλότης εἴτε ἡ στρέψις τῆς καμπύλης μηδενίζονται εἰς τό Μ.

61. Δίδεται ἡ κυκλοειδής $x = a\,(\varphi - \text{ημ}\varphi)$, $y = a\,(1-\text{συν}\varphi)$. Ζητεῖται νά εὑρεθῆ ἡ παραβολή ἡ ὁποία ἔχει μετά τῆς καμπύλης ἐπαφήν 3-τάξεως εἰς τό σημεῖον $\varphi = \pi$.

62. Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας μιᾶς γραμμῆς ὑποθέτοντες ὅτι αὕτη ἔχει ἐπαφήν 3-τάξεως μετά τῆς γραμμῆς.

(63) Δείξατε ὅτι, ἐάν μία ἐπιφάνεια S ἐφάπτεται ἑνός ἐπιπέδου P κατά μίαν καμπύλην (γ) τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τυχόν σημεῖον αὐτῆς ἔχει ἐπαφήν 3-τάξεως μετά τῆς ἐπιφανείας.

) Δίδεται ἡ καμπύλη (γ) εἰς τόν χῶρον μέ ἐξίσωσιν $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\ell)$. Ζητεῖται νά εὑρεθοῦν:

1ον/ Ἡ περιβάλλουσα τῆς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν καθέτων ἐπιπέδων αὐτῆς.

2ον/ Ἡ περιβάλλουσα τῆς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων αὐτῆς.

3ον/. Ἐξετάσατε τό εἶδος τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας τοῦ 1ου ἐρωτήματος.

Λύσις: 1ον/ Ὡς γνωστόν ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης (γ) εἰς τό τυχόν σημεῖον $M(\mathbf{r})$ αὐτῆς εἶναι $(\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\tau}=0$ (1), ὅπου ἡ διανυσματική ἀκτίς $\mathbf{r}^*$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τυχόν σημεῖον τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης.

Ἐπειδή τά $\mathbf{r}$ καί $\boldsymbol{\tau}$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ τόξου ℓ, ἡ (1) παριστᾷ μίαν μονοπαραμετρικήν οἰκογένειαν ἐπιπέδων. Διά τήν εὕρεσιν τῆς περιβαλλούσης τῆς οἰκογενείας ταύτης, παραγωγίζομεν τήν (1) ὡς πρός ℓ καί εὑρίσκομεν:

$$(\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}-\dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\tau}=0 \iff (\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\frac{1}{R}\mathbf{v}-1=0 \implies (\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}=R \quad (2)$$

Ἡ (2) παριστᾷ ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τήν πρώτην κάθετον εἰς τό σημεῖον $M(\mathbf{r})$ τῆς (γ) ἀπέχον τούτου ἀπόστασιν R, ἄρα διερχομένου διά τοῦ ἀντιστοίχου κέντρου καμπυλότητος. Ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων (1) καί (2) εἶναι προφανῶς ὁ πολικός ἄξων τῆς (γ). Συνεπῶς ἡ περιβάλλουσα ἐπιφάνεια τῶν (1) θά εἶναι ἡ πολική ἐπιφάνεια τῆς καμπύλης (γ).

Διά τήν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς περιβαλλούσης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (1) γράφεται $(\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\beta})=0$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι τά διανύσματα $\mathbf{r}^*-\mathbf{r},\mathbf{v},\boldsymbol{\beta}$ εἶναι συνεπίπεδα δηλ. θά εἶναι:

$\mathbf{r}^*-\mathbf{r}=t\mathbf{v}+u\boldsymbol{\beta}$. (3), ὁπότε ἡ (2) θά εἶναι: $(\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau})=R$ ἐκ τῆς ὁποίας, λόγῳ τῆς (3), $(t\mathbf{v}+u\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\tau})=R$ ἤ $(t\mathbf{v},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\tau})+(u\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\tau})=R$ ἤ $t(\mathbf{v},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\tau})=R$ ἤ $t=R$.

Ὅθεν, ἡ (3) θά εἶναι τελικῶς $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}(\ell)+R\mathbf{v}+u\boldsymbol{\beta}$ (4) ἡ ὁποία εἶναι καί ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης ὅπου τά ℓ καί u θεωροῦνται αἱ παράμετροι τῆς ἐπιφανείας.

2ον/ Ἡ ἐξίσωσις τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων ὡς γνωστόν εἶναι:

$$(\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}=0 \quad \text{ἤ} \quad (\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau})=0 \quad \text{ἤ} \quad (\mathbf{r}^*-\mathbf{r},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\tau})=0 \quad (1)$$

Ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα θά πληροῖ ὡς γνωστόν τάς ἐξισώσεις (1) καί τήν ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαν διά παραγωγίσεως ὡς πρός ℓ δηλ. τήν $(-\dot{\mathbf{r}},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\tau})+(\mathbf{r}^*-\mathbf{r},\dot{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\tau})+(\mathbf{r}^*-\mathbf{r},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\tau}})=0$, ἡ ὁποία ἐκ τῶν τύπων τοῦ Frenet λαμβάνει τήν μορφήν: $(-\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\tau})+(\mathbf{r}^*-\mathbf{r},-\sigma\mathbf{v},\boldsymbol{\tau})+(\mathbf{r}^*-\mathbf{r},\boldsymbol{\beta},k\mathbf{v})=0$ ἤ $(\mathbf{r}^*-\mathbf{r},\mathbf{v},\sigma\boldsymbol{\tau})+$ $+(\mathbf{r}^*-\mathbf{r},\mathbf{v},k\boldsymbol{\beta})=0$ ἤ $(\mathbf{r}^*-\mathbf{r},\mathbf{v},\sigma\boldsymbol{\tau}+k\cdot\boldsymbol{\beta})=0$ ἡ τήν ἰσοδύναμον $\mathbf{r}^*-\mathbf{r}=t\mathbf{v}+u(\sigma\cdot\boldsymbol{\tau}+k\boldsymbol{\beta})$ (2)

Δυνάμει τῆς (2) ἡ (1) γράφεται $(t\nu+\upsilon\sigma\tau+\upsilon k\beta,\beta,\tau)=0$ ἢ $t(\nu,\beta,\tau)+\upsilon\sigma(\tau,\beta,\tau)+$ $+\upsilon k(\beta,\beta,\tau)=0$ ἢ $t(\nu,\beta,\tau)=0 \Rightarrow t=0$.

Ὅθεν, ἡ (2) λαμβάνει τελικῶς τὴν μορφήν: $\tau^*=\tau(\ell)+\upsilon(\sigma\tau+k\beta)$. ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης.

3ον. Ἡ ἐξίσωσις (4) τοῦ 1ου ἐρωτήματος παριστᾷ προφανῶς εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν διότι λαμβάνει τὴν μορφήν $\tau^*=\rho(\ell)+\upsilon g(\ell)$, ὅπου $\rho(\ell)=\tau+R\nu$ καί $g(\ell)=\beta$. Παραγωγίζομεν αὐτὴν ὡς πρὸς ℓ λαμβάνομεν:
$\dot{\rho}_\ell=\dot{\tau}+\dot{R}\nu+R\dot{\nu}=\tau+\dot{R}\nu+R(-k\tau+\sigma\beta)=\tau+\dot{R}\nu-\tau+R\sigma\beta=\dot{R}\nu+\sigma\beta$ καί $\dot{g}_\ell=\dot{\beta}=-\sigma\nu$.
Θεωροῦντες τὸ μικτὸ γινόμενο $(\dot{\rho}_\ell, g, \dot{g}_\ell)=(\dot{R}\nu+R\sigma\beta,\beta,-\sigma\nu)=(\dot{R}\nu,\beta,-\sigma\nu)+(R\sigma\beta,\beta,-\sigma\nu)=0$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτή.

(65.) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων τῆς καμπύλης μὲ ἐξίσωσιν $\tau=\tau(\ell)$. Τί εἴδους ἐπιφάνεια εἶναι αὐτή;

(66.) Δίδεται ἡ γραμμὴ μὲ ἐξίσωσιν $\tau=\tau(\ell)$ καί θεωροῦμεν τὴν περιβάλλουσα τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ $\tau=\tau(\ell)$ εἶναι γεωδαισιακή τῆς περιβαλλούσης.

Ὑπόδ: Συμφώνως πρὸς τὴν ἄσκησιν 64 (ἐρωτ. 2ον) ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης εἶναι $\tau^*=\tau(\ell)+\upsilon(\sigma\tau+k\beta)$, ὅπου παράμετροι εἶναι τὰ ℓ καί υ. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι, τὸ κάθετον διάνυσμα N τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς $\upsilon=0$ δηλ. τῆς $\tau=\tau(\ell)$ εἶναι τὸ $-k\nu$. Ἐν συνεχείᾳ δείξατε ὅτι, πληροῦται ἡ ἐξίσωσις $k_g\equiv(N,\dot{\tau},\ddot{\tau})=0$ τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν διὰ τὴν γραμμὴν $\tau=\tau(\ell)$ τὴν κειμένην ἐπὶ τῆς περιβαλλούσης.

67. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας $z=\phi\left(\frac{y}{x}\right)$.
Λύσις: Θέτομεν $x=u$, $y=u\upsilon$, ὁπότε $z=\phi(\upsilon)$ καὶ ἡ ἐξίσωση τῶν ἀσυμπτ. γραμμῶν γίνεται: $u\phi''(\upsilon)d\upsilon^2-2\phi'(\upsilon)dud\upsilon=0$ (1). Μία λύσις αὐτῆς εἶναι: $d\upsilon=0\to\upsilon=c$ (u–παραμετρικὴ γραμμή. Ἐπὶ πλέον ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $\frac{\phi''(\upsilon)d\upsilon}{\phi'(\upsilon)}=\frac{2du}{u}\to u^2=c\phi'(\upsilon)$. Αἱ προβολαὶ τῶν τελευταίων ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν εἰς τὸ Oxy ἐπίπεδον ἔχουν ἐξίσωσιν: $x^2=c\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

§1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ (Α^{ου} ΕΙΔΟΥΣ)

Ἔστω (γ) μία λεία καμπύλη τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$ μέ ἀρχήν τό σημεῖον $A(a_1, a_2, a_3)$ καί πέρας τό σημεῖον $B(b_1, b_2, b_3)$. Ἔστωσαν δέ $x=\varphi(\ell), y=f(\ell), z=\sigma(\ell)$, $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$ αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης μέ παράμετρον τό μῆκος τοῦ τόξου αὐτῆς. Ἡ καμπύλη (γ) ὑποθέτομεν ὅτι διαγράφεται κατά μίαν ὡρισμένην φοράν. Ἐπειδή ἡ (γ) ὑπετέθη λεία, αἱ συναρτήσεις $\varphi(\ell), f(\ell), \sigma(\ell)$ ἔχουν, ὡς πρός ℓ, παραγώγους α' τάξεως συνεχεῖς, διά $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$.

Ἔστω ἐπί πλέον ἡ πραγματική συνάρτησις $F(M) \equiv F(x,y,z)$ ὡρισμένη καί συνεχής ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τῆς καμπύλης (γ).

Θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν $\mathcal{D}$ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ διά τῶν σημείων $A \equiv M_0, M_1, M_2, \dots, M_n \equiv B$. Ἄς παραστήσωμεν διά $\Delta\ell_\rho$ τό μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{M_{\rho-1}M_\rho}$. Ἐφ' ἑκάστου τόξου $\widehat{M_{\rho-1}M_\rho}$ λαμβάνομεν καί ἀπό ἕνα τυχόν σημεῖον $N_\rho(x_\rho, y_\rho, z_\rho)$ καί ἀκολούθως σχηματίζομεν τό ἄθροισμα:

$$\sum_{\rho=1}^{n} F(N_\rho)\Delta\ell_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} F(x_\rho, y_\rho, z_\rho)\Delta\ell_\rho \qquad (1)$$

τό ὁποῖον καλεῖται ***ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα*** ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν F καί τήν διαμέρισιν $\mathcal{D}$.

Ἔστω $x_\rho=\varphi(\ell_\rho^*)$, $y_\rho=f(\ell_\rho^*)$, $z_\rho=\sigma(\ell_\rho^*)$, ὅπου $\ell_\rho^* \in [\ell_{\rho-1}, \ell_\rho]$, τότε τό ἄθροισμα (1) γράφεται:

$$\sum_{\rho=1}^{n} F(\varphi(\ell_\rho^*), f(\ell_\rho^*), \sigma(\ell_\rho^*))\Delta\ell_\rho \qquad (2).$$

Ἐπειδή αἱ F, $\varphi(\ell), f(\ell), \sigma(\ell)$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, ἕπεται ὅτι καί ἡ συνάρτησις $F(\varphi(\ell), f(\ell), \sigma(\ell))$ εἶναι συνεχής συνάρτησις τοῦ ℓ.

Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν μίαν ἀκολουθίαν διαμερίσεων τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τοιαύτην, ὥστε $\max_{1\leq\rho\leq n}\Delta\ell_\rho \to 0$, ὅταν $n \uparrow \infty$, τότε τό ἄθροισμα (2) ἔχει πάντοτε ὅριον καί ἐξ ὁρισμοῦ καλεῖται τοῦτο *ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα* α' **εἴδους**

τῆς συναρτήσεως $F(x,y,z)$ *ἐπί τοῦ τόξου* $\widehat{AB}$ *τῆς καμπύλης* (γ) καί συμβολίζεται οὕτω: $\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)\,d\ell$.

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)\,d\ell \overset{\text{ὁρ}}{=} \lim_{\substack{\max\Delta\ell_\rho \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{\rho=1}^{n} F(\varphi(\ell_\rho^*), f(\ell_\rho^*), \sigma(\ell_\rho^*))\Delta\ell_\rho \qquad (3)$$

Ἡ $F(x,y,z)$ θά καλῆται τότε *ὁλοκληρώσιμος* κατά μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

Ἐξ ἄλλου, τό ὅριον τοῦ ἀνωτέρω ἀθροίσματος εἶναι:

$$\lim_{\substack{\max\Delta\ell_\rho \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{\rho=1}^{n} F(\varphi(\ell_\rho^*), f(\ell_\rho^*), \sigma(\ell_\rho^*))\Delta\ell_\rho = \int_{\ell_1}^{\ell_2} F(\varphi(\ell), f(\ell), \sigma(\ell))\,d\ell \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) καί (4) λαμβάνομεν:

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)\,d\ell = \int_{\ell_1}^{\ell_2} F(\varphi(\ell), f(\ell), \sigma(\ell))\,d\ell} \qquad (5)$$

Ἐάν ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος ἔχουσα ἐξισώσεις: $x=\varphi(\ell)$, $y=f(\ell)$, τότε ὁ τύπος (5) γράφεται:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y)\,d\ell = \int_{\ell_1}^{\ell_2} F(\varphi(\ell), f(\ell))\,d\ell \qquad (6)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι ἡ κλειστή καμπύλη (γ), τότε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα θά τό συμβολίζωμεν οὕτω: $\oint_{\gamma} F(x,y,z)\,d\ell$.

§2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ $A^{ου}$ ΕΙΔΟΥΣ

Θεώρημα XI-2-1. Ἔστω ἡ λεία καμπύλη (γ) ἔχουσα τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις:

$$x=\varphi(t),\quad y=f(t),\ z=\sigma(t),\quad t_1\le t\le t_2$$

καί ἡ $F(x,y,z)$ μία συνάρτησις ὡρισμένη καί συνεχής ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τῆς (γ). Τότε ἔχομεν:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)\,d\ell = \int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t), f(t), \sigma(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+f'^2(t)+\sigma'^2(t)}\,dt \qquad (1).$$

Τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει ἐάν, καί μόνον ἐάν, τό ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους ὑπάρχῃ.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδή τό τόξον $\widehat{AB}$ ὑπετέθη λεῖο, αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$, $f(t)$, $\sigma(t)$ εἶναι παραγωγίσιμοι καί μέ συνεχεῖς παραγώγους εἰς τό διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$.

Ἐπί πλέον δέ θά εἶναι: $\qquad \varphi'^2(t)+f'^2(t)+\sigma'^2(t)>0$

Θεωροῦντες τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης, τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα (1) γράφεται:

$$\sum_{\rho=1}^{n} F(x_\rho, y_\rho, z_\rho)\,\Delta\ell_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} F\big(\varphi(t_\rho^*), f(t_\rho^*), \sigma(t_\rho^*)\big)\sqrt{\varphi'^2(\tau_\rho)+f'^2(\tau_\rho)+\sigma'^2(\tau_\rho)}\,.\,\Delta t_\rho$$

ὅπου $t_\rho^* \in [t_{\rho-1}, t_\rho]$ καί εἶναι τοιαῦται, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$x_\rho=\varphi(t_\rho^*),\ y_\rho=f(t_\rho^*),\ z_\rho=\sigma(t_\rho^*),\ \text{τό δέ } \tau_\rho\in[t_{\rho-1}, t_\rho].$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι $\max\limits_{1\leq\rho\leq n}\Delta\ell_\rho \longrightarrow 0 \Longrightarrow \max\limits_{1\leq\rho\leq n}\Delta t_\rho \longrightarrow 0$, ὅτε καί $n\uparrow\infty$, τότε τό πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος τείνει πρός τό $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,y,z)\,d\ell$, ἐνῶ τό δεύτερον μέλος τείνει πρός τό $\int_{t_1}^{t_2} F\big(\varphi(t), f(t), \sigma(t)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+f'^2(t)+\sigma'^2(t)}\,dt$.

Ὅθεν, $\displaystyle\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,y,z)\,d\ell = \int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t), f(t), \sigma(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+f'^2(t)+\sigma'^2(t)}\,dt.$

- Ἐάν ἡ καμπύλη (γ) εἶναι ἐπίπεδος ἔχουσα ἐξίσωσιν $y=y(x)$, $\alpha\leq x\leq\beta$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,y)\,d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} F(x, y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \qquad (2)$$

- Ἐάν ἡ καμπύλη (γ) εἶναι ἐπίπεδος ἔχουσα ἐξίσωσιν $\rho=\rho(\theta)$, $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,y)\,d\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\rho\,\text{συν}\theta, \rho\,\text{ημ}\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta \qquad (3)$$

- Ἐάν $F(x,y)\equiv 1$ καί ἡ καμπύλη (γ) εἶναι λεία, τότε σύμφωνα μέ τόν τύπον (3), §1, τό δεύτερον μέλος τούτου θά παριστᾶ τό μῆκος τῆς καμπύλης (γ), διότι $\lim\limits_{\substack{\max\Delta\ell_\rho\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{\rho=1}^{n}\Delta\ell_\rho = L$, δηλαδή θά ἔχωμεν $L=\int\limits_{(\gamma)} d\ell$.

Εἰδικῶς, τὸ μῆκος L μιᾶς κλειστῆς καμπύλης γ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\boxed{L = \oint_{\gamma} d\ell} \qquad (4)$$

Ἰδιότητες τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος α^ου εἴδους.

Αἱ βασικαὶ ἰδιότητες τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος α^ου εἴδους προκύπτουν ἐκ τοῦ τύπου (5) §1. Εἶναι δὲ αὗται ἀνάλογοι πρὸς αὐτὰς τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, θὰ ἀναφέρωμεν δὲ ἁπλῶς αὐτὰς ἄνευ ἀποδείξεως.

Πρὸς τούτοις ἔστω ἡ συνάρτησις $F(x,y,z)$ τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὁλοκληρώσιμον κατὰ μῆκος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ τῆς λείας καμπύλης (γ). Ἰσχύουν αἱ κάτωθι ἰδιότητες:

I. Ἐάν C_1, C_2 εἶναι σταθεραὶ καὶ αἱ $F(x,y,z) = F(M)$ καὶ $\phi(x,y,z) = \phi(M)$, $M = (x,y,z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπὶ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \{C_1 F(M) + C_2 \phi(M)\} d\ell = C_1 \int_{\overset{\frown}{AB}} F(M) d\ell + C_2 \int_{\overset{\frown}{AB}} \phi(M) d\ell.$$

II. Ἐάν $F(M) \geq 0$ καὶ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τότε $\int_{\overset{\frown}{AB}} F(M) d\ell \geq 0$.

III. Ἐάν τὸ $\overset{\frown}{AB}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma B}$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(M) d\ell = \int_{\overset{\frown}{A\Gamma}} F(M) d\ell + \int_{\overset{\frown}{\Gamma B}} F(M) d\ell$$

IV. Ἐάν ἡ $F(M)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ $\overset{\frown}{AB}$, τότε καὶ ἡ $|F(M)|$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ καὶ ἰσχύει:

$$\left| \int_{\overset{\frown}{AB}} F(M) d\ell \right| \leq \int_{\overset{\frown}{AB}} |F(M)| d\ell$$

V. Ἐὰν ἡ $F(M)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $\widehat{AB}$, ὑπάρχει ἕνα σημεῖον $M^* \in \widehat{AB}$ τοιοῦτον, ὥστε: $\int_{\widehat{AB}} F(M)\,d\ell = F(M^*)\cdot L$, ὅπου L εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. (Θεώρημα τῆς Μέσης τιμῆς).

VI. Ἔχομεν $\int_{\widehat{AB}} F(M)\,d\ell = \int_{\widehat{BA}} F(M)\,d\ell$. Οὕτω ἡ ἀλλαγὴ τῆς διευθύνσεως τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ δὲν ἀλλάσσει τὴν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος διὰ μίαν αὐθαίρετον πραγματικὴν συνάρτησιν $F(M)$ ὡρισμένη κατὰ μῆκος αὐτοῦ.

Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων α^{ου} εἴδους.

1^{ον}/ Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AB}} (x-z)\,ds$, ὅπου τὸ $\widehat{AB}$ εἶναι τόξον τῆς ἑλικοειδοῦς μὲ ἐξίσωσιν: $x=\sigma\upsilon\nu t$, $y=\eta\mu t$, $z=t$ καὶ $A(1,0,0)$, $B(0,1,\frac{\pi}{2})$.

Λύσις: Τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τόξου ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς $t_1=0$ καὶ $t_2=\frac{\pi}{2}$. Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (1) καὶ ἔχομεν:

$$\int_{\widehat{AB}} (x-z)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu t - t)\cdot\sqrt{\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t + 1}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu t - t)\,dt = \sqrt{2}\left(1-\frac{\pi^2}{8}\right)$$

2^{ον}/ Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AB}} y\,d\ell$, ὅπου τὸ $\widehat{AB}$ εἶναι τὸ τόξον μὲ ἐξίσωσιν $y=2\sqrt{x}$ καὶ τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $x=3$ ἕως $x=24$.

Λύσις: Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (2) ἔχομεν:

$$\int_{\widehat{AB}} y\,d\ell = \int_3^{24} 2\sqrt{x}\,\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 2\int_3^{24}\sqrt{x+1}\,dx = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_3^{24} = 156.$$

3^{ον}/ Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐλλείψεως: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Λύσις: Αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως θὰ εἶναι προφανῶς $x=a\eta\mu t$, $y=\beta\sigma\upsilon\nu t$, $0\le t<2\pi$ καὶ τὸ μῆκος αὐτῆς παρέχεται ὑπὸ τοῦ ἐπι-

καμπυλίου ὁλοκληρώματος $L = \oint d\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2\eta\mu^2 t + a^2 \sigma\upsilon\nu^2 t}\; dt =$

$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\eta\mu^2 t}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \eta\mu^2 t}\, dt$, ὅπου ἐτέθη $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$. Τό ἀνωτέρω εἶναι ἕνα ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα καί διά τόν ὑπολογισμόν του βλ. Τόμος Ι, σελ. 655, Παράδειγμα 3ον.

Εἶναι $\frac{L}{4} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1}\right)$

§3. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ Α' ΕΙΔΟΥΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

Ι. Προσδιορισμός τῆς μάζης ὑλικῆς γραμμῆς ἐκ τῆς γραμμικῆς πυκνότητος αὐτῆς.

Μία ὑλική γραμμή θά νοῆται ὡς μία τμηματικῶς λεία καμπύλη κατά μῆκος τῆς ὁποίας εἶναι κατανεμημένη ἡ μᾶζα. Ἡ μᾶζα θά εἶναι συνάρτησις (συνολοσυνάρτησις) τοῦ τόξου ℓ αὐτῆς, ἤτοι $m = m(\ell)$.

Ἐξ ὁρισμοῦ καλοῦμεν ***γραμμικήν πυκνότητα*** $\delta(M)$ τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης εἰς τό σημεῖον $M(x,y,z)$ αὐτῆς τό ὅριον τοῦ λόγου τῆς μάζης $\Delta m(\ell)$ τῆς φερομένης ἐπί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MM'}$ αὐτῆς πρός τό μῆκος $\Delta\ell$ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MM'}$, ὅταν τό $M' \to M$.

Ἤτοι: $\delta(M) = \lim_{\Delta\ell \downarrow 0} \frac{\Delta m(\ell)}{\Delta \ell} = \frac{dm(\ell)}{d\ell}$ (1)

Προσεγγιστικῶς λοιπόν ἡ μᾶζα ἡ φερομένη ἐπί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MM'}$ μήκους $\Delta\ell$ θά εἶναι $\delta(M)\cdot\Delta\ell$.

Ἐάν ἤδη, ζητοῦμεν τήν ὁλικήν μᾶζαν m τήν φερομένην ἐπί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ τῆς ἐν λόγῳ ὑλικῆς γραμμῆς, ἐκτελοῦμεν ἐπί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ μίαν διαμέρισιν $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$, ὅπου τό μῆκος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{M_{\rho-1}M_\rho} = \Delta\ell_\rho$, καί ἐν συνεχείᾳ σχηματίζομεν τό ἄθροισμα:

$$\sum_{\rho=1}^{n} \delta(N_\rho)\cdot\Delta\ell_\rho \quad (2), \text{ ὅπου } N_\rho \in \overset{\frown}{M_{\rho-1}M_\rho}$$

Τό ἄθροισμα (2) δίδει προσεγγιστικῶς τήν μᾶζαν τήν φερομένην ὑπό τῆς ὑλικῆς γραμμῆς μεταξύ τῶν σημείων A καί B αὐτῆς.

Ἐάν ἤδη τό $\max_{1\le\rho\le n} \Delta\ell_\rho \to 0$, ὅτε καί $n \uparrow \infty$, τό ἄθροισμα (2) τείνει πρός ἕνα ὅριον τό ὁποῖον μᾶς δίδει τήν φερομένην μᾶζαν ὑπό τῆς ὑλικῆς γραμμῆς μετα-

ἐκ τῶν σημείων A καὶ B αὐτῆς. Ἐξ ἄλλου αὐτό τό ὅριον δέν εἶναι τίποτ' ἄλλο παρά τό $\int_{\widehat{AB}} \delta(x,y,z)\,d\ell$.

Ὅθεν :

$$m = \int_{\widehat{AB}} \delta(x,y,z)\,d\ell \qquad (3).$$

II. Εὕρεσις τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου βάρους μιᾶς ὑλικῆς γραμμῆς.

Ἔστω μία μᾶζα εἶναι κατανεμημένη ἐπί μιᾶς ὑλικῆς γραμμῆς μέ γραμμικήν πυκνότητα $\delta(x,y,z)$. Θεωροῦμεν ἐπί τῆς καμπύλης μίαν διαμέρισιν καί ἔστω $\Delta\ell_\rho$ τό μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{M_{\rho-1}M_\rho}$ αὐτῆς. Προσεγγιστικῶς ἡ μᾶζα ἡ φερομένη ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{M_{\rho-1}M_\rho}$ εἶναι ἴση πρός $\delta(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\cdot\Delta\ell_\rho$. Ταύτην τήν μᾶζαν τήν θεωροῦμεν συγκεντρωμένην εἰς τό σημεῖον (x_ρ,y_ρ,z_ρ). Οὕτω ἔχομεν ἕνα σύστημα ἐξ n-ὑλικῶν σημείων καί ὡς γνωστόν ἐκ τῆς Μηχανικῆς, αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους (κ.β) αὐτοῦ τοῦ ὑλικοῦ συστήματος εἶναι:

$$x_\kappa = \frac{\sum_{\rho=1}^{n} x_\rho\cdot\delta(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\Delta\ell_\rho}{\sum_{\rho=1}^{n}\delta(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\Delta\ell_\rho}, \quad y_\kappa = \frac{\sum_{\rho=1}^{n} y_\rho\cdot\delta(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\Delta\ell_\rho}{\sum_{\rho=1}^{n}\delta(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\Delta\ell_\rho}$$

$$z_\kappa = \frac{\sum_{\rho=1}^{n} z_\rho\cdot\delta(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\cdot\Delta\ell_\rho}{\sum_{\rho=1}^{n}\delta(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\cdot\Delta\ell_\rho}$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐκφράσεις δύνανται νά θεωρηθοῦν, ὅτι δίδουν προσεγγιστικῶς τάς συντεταγμένας τοῦ κ.β. τῆς ὑλικῆς γραμμῆς $\widehat{AB}$.

Ἐάν ἤδη $\max_{1\le\rho\le n}\Delta\ell_\rho \to 0$ ὅτε καί $n\uparrow\infty$ καί μεταβαίνοντες εἰς τά ὅρια, λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων:

$$\left.\begin{aligned} x_\kappa &= \frac{\int_{\widehat{AB}} x\cdot\delta(x,y,z)\,d\ell}{\int_{\widehat{AB}}\delta(x,y,z)\,d\ell}, \quad y_\kappa = \frac{\int_{\widehat{AB}} y\cdot\delta(x,y,z)\,d\ell}{\int_{\widehat{AB}}\delta(x,y,z)\,d\ell} \\ z_\kappa &= \frac{\int_{\widehat{AB}} z\cdot\delta(x,y,z)\,d\ell}{\int_{\widehat{AB}}\delta(x,y,z)\,d\ell} \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Ἐάν δέ ἡ γραμμή εἶναι ὁμογενής οἱ τύποι (1) γίνονται:

$$x_\kappa = \frac{\int_{\widehat{AB}} x\,d\ell}{\int_{\widehat{AB}} d\ell}, \quad y_\kappa = \frac{\int_{\widehat{AB}} y\,d\ell}{\int_{\widehat{AB}} d\ell}, \quad z_\kappa = \frac{\int_{\widehat{AB}} z\,d\ell}{\int_{\widehat{AB}} d\ell} \qquad (2)$$

• Εἰς τήν περίπτωσιν ἐπιπέδου ὑλικῆς γραμμῆς οἱ τύποι γίνονται:

$$x_\kappa = \frac{\int_{\widehat{AB}} x\,d\ell}{\int_{\widehat{AB}} d\ell} \text{ καί } y_\kappa = \frac{\int_{\widehat{AB}} y\,d\ell}{\int_{\widehat{AB}} d\ell} \qquad (1')$$

Πολλαπλασιάζοντες τόν δεύτερον τῶν ἀνωτέρω τύπων (1') ἐπί 2π καί λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\int_{\widehat{AB}} d\ell = L$ (μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης) ἔχομεν:

$$2\pi \cdot y_\kappa \cdot L = 2\pi \int_{\widehat{AB}} y \cdot d\ell \qquad (2')$$

Τό δεύτερον μέλος τοῦ τύπου (2') παριστᾷ τό ἐμβαδόν S τῆς ἐπιφανείας τῆς διαγραφομένης ὑπό τοῦ ἐπιπέδου τόξου $\widehat{AB}$ περιστρεφομένου πέριξ τοῦ ἄξονος τῶν x (βλ. Τόμος I, σελ. 581, τύπον (6)).

Ὅθεν, $S = 2\pi y_\kappa \cdot L$, ἐξ οὗ τό θεώρημα:

Θεώρημα XI - 3-1. (Πάππου) Τό ἐμβαδόν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπό ἑνός λείου τόξου $\widehat{AB}$ περιστρεφομένου πέριξ τοῦ ἄξονος τῶν x, ὅστις δέν τέμνει τοῦτο, ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ ἐπί τό μῆκος τῆς περιφερείας τήν ὁποίαν διαγράφει τό κ.β. αὐτοῦ τοῦ τόξου.

III. Ὑπολογισμός τῆς ροπῆς ἀδρανείας ὑλικῆς γραμμῆς.

Ὡς γνωστόν, ἐκ τῆς Μηχανικῆς, ἡ ροπή ἀδρανείας ὑλικοῦ σημείου μάζης m ὡς πρός ἕνα ἄλλο σημεῖον ἤ ἄξονα ἀπέχοντος ἀπό αὐτοῦ ἀπόστασιν r εἶναι mr^2.

Ἀκολουθοῦντες ἕνα ἀνάλογον συλλογισμόν ὡς προηγουμένως ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς ὑλικῆς γραμμῆς $\widehat{AB}$, ἥτις ἔχει γραμμικήν πυκνότητα $\delta(x,y,z)$,

ὡς πρός τούς ἄξονας οx, οy, οz θά παρέχεται ὑπό τῶν κάτωθι ὁλοκληρωμάτων:

$$I_x=\int_{\overset{\frown}{AB}}(y^2+z^2)\delta(x,y,z)d\ell,\quad I_y=\int_{\overset{\frown}{AB}}(x^2+z^2)\delta(x,y,z)d\ell, I_z=\int_{\overset{\frown}{AB}}(x^2+y^2)\delta(x,y,z)d\ell.$$

Ἐάν δέ ἔχωμεν ἐπίπεδον ὑλικήν γραμμήν $\overset{\frown}{AB}$, τότε ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρός τούς ἄξονας οx, οy εἶναι:

$$I_x=\int_{\overset{\frown}{AB}}y^2\cdot\delta(x,y)d\ell,\ I_y=\int_{\overset{\frown}{AB}}x^2\cdot\delta(x,y)d\ell.$$

<u>**Ἐφαρμογαί**</u> 1η/. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ τῆς καμπύλης $y=x^3$ ἀπό τοῦ σημείου A (0,0) μέχρι τοῦ σημείου B (1,1) ὡς πρός τήν εὐθείαν $y=x$, ὅταν ἡ πυκνότης τοῦ τόξου εἶναι $\delta(x,y)=\dfrac{2x}{y\sqrt{1+9x^4}}$.

<u>Λύσις</u>: Ἄς καλέσωμεν d τήν ἀπόστασιν τοῦ σημείου M(x,y) τῆς καμπύλης ἀπό τήν διχοτόμον $y=x$. Θά εἶναι τότε $d^2=\dfrac{(x-y)^2}{2}$. Ἑπομένως ἡ ροπή ἀδρανείας θά εἶναι: $I=\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-y)^2\cdot 2x}{y\sqrt{1+9x^4}}\,d\ell$.

Εἶναι δέ $d\ell=\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx=\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx$.

Ὅθεν, $I=\displaystyle\int_0^1\frac{(x-x^3)^2\cdot x}{x^3\cdot\sqrt{1+9x^4}}\cdot\sqrt{1+9x^4}\,dx=\int_0^1(1-x^2)^2dx=\int_0^1(1-2x^2+x^4)dx=\frac{8}{15}$.

2α/. Νά εὑρεθῇ τό κ.β. τῆς κυκλοειδοῦς καμπύλης:

$$x=a(t-\eta\mu t),\ y=a(1-\sigma\upsilon\nu t),\ 0\le t\le 2\pi$$

θεωρουμένης ὡς ὁμογενοῦς ὑλικῆς γραμμῆς.

<u>Λύσις</u>: Ἐπειδή ἡ κυκλοειδής εἶναι συμμετρική ὡς πρός τήν εὐθείαν $x=\pi\cdot a$, ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό y_κ.

Εἶναι:
$$y_\kappa=\frac{\oint y\cdot d\ell}{\oint d\ell}\qquad (1)$$

Εἶναι δέ $d\ell=2a\eta\mu\frac{t}{2}dt$ καί ὁ (1) γίνεται:

$$y_\kappa=\frac{\int_0^{2\pi}a(1-\sigma\upsilon\nu t)\cdot 2a\eta\mu\frac{t}{2}dt}{2a\int_0^{2\pi}\eta\mu\frac{t}{2}dt}=\frac{4a^2\int_0^{2\pi}\eta\mu^3\frac{t}{2}\,dt}{2a\int_0^{2\pi}\eta\mu\frac{t}{2}dt}=\frac{4}{3}a.$$

Ἄρα $x_\kappa=\pi a$ καί $y_\kappa=\frac{4}{3}a$.

§ 4. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ (Β^{ου} ΕΙΔΟΥΣ)

Ἔστω (γ) μία προσανατολισμένη λεία καμπύλη τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$ καί τό τόξον $\widehat{AB}$ αὐτῆς, ὅπου $A(a_1,a_2,a_3)$ καί $B(b_1,b_2,b_3)$ καί ἡ διανυσματική συνάρτησις $\vec{F}(x,y,z)=i\cdot P(x,y,z)+j\,Q(x,y,z)+k\,R(x,y,z)$ ὡρισμένη κατά μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

Διαιροῦμεν τό τόξον $\widehat{AB}$ τῆς (γ) εἰς n-τμήματα διά μιᾶς διαμερίσεως Φ διά τῆς παρεμβολῆς τῶν σημείων $A=M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n=B$ καί ἔστω ὅτι τό σημεῖον M_p αὐτῆς ἔχει συντεταγμένας (x_p,y_p,z_p). Θέτομεν ὡς, $\Delta x_p=x_p-x_{p-1}$, $\Delta y_p=y_p-y_{p-1}$, $\Delta z_p=z_p-z_{p-1}$ καί ἐπί πλέον ὑποθέτομεν $(x_0,y_0,z_0)\equiv(a_1,a_2,a_3)$, $(x_n,y_n,z_n)\equiv(b_1,b_2,b_3)$. Τέλος λαμβάνομεν εἰς ἕκαστον τῶν τόξων $\widehat{M_{p-1}M_p}$ τῆς καμπύλης καί ἀπό ἕνα τυχόν σημεῖον $N_p(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\in\widehat{M_{p-1}M_p}$ καί ἀκολούθως σχηματίζομεν τό ἄθροισμα:

$$\sum_{p=1}^{n}\left\{P(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta x_p+Q(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta y_p+R(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta z_p\right\} \qquad (1)$$

Τό (1) καλεῖται ***ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα*** ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν διανυσματικήν συνάρτησιν $\vec{F}$ καί τήν διαμέρισιν Φ ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

Ἔστω $\Delta\ell_p$ τό μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$. Ἐάν τό $\max\limits_{1\le p\le n}\Delta\ell_p\to 0$, τότε τό $n\uparrow\infty$. Ἐάν τά $\Delta\ell_p\to 0$, τότε καί $\Delta x_p\to 0$, $\Delta y_p\to 0$, $\Delta z_p\to 0$ καί ἀντιστρόφως.

<u>Ὁρισμός XI – 4-1</u>. ***Θά λέγωμεν ὅτι τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα (1) τείνει πρός τόν ἀριθμόν J καθώς $\max\limits_{1\le p\le n}\Delta\ell_p\to 0$, ἐάν διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχῃ ἀριθμός $\delta(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε ὅταν ὑπάρχῃ διαμέρισις μέ $\max\limits_{1\le p\le n}\Delta\ell_p<\delta(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν:***

$$\left|J-\sum_{p=1}^{n}\left\{P(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta x_p+Q(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta y_p+R(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta z_p\right\}\right|<\varepsilon\,.$$

Θά γράφωμεν τότε:

$$J=\lim_{\substack{\max\Delta\ell_p\to 0\\ 1\le p\le n\\ n\to\infty}}\sum_{p=1}^{n}\left\{P(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta x_p+Q(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta y_p+R(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta z_p\right\} \qquad (2)$$

ὁ ἀριθμός J καλεῖται ***ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F}$ κατά μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τῆς καμπύλης*** (γ) (Β^{ου} εἴδους).

ὁ ἀριθμός J συμβολίζεται οὕτω:

$$J=\int_{\widehat{AB}} P(M)\,dx+Q(M)\,dy+R(M)\,dz \qquad (3),$$

ὅπου M εἶναι τό σημεῖον (x,y,z).

Ἔστω ἡ διανυσματική ἀκτίς $\tau=ix+jy+kz$, τότε καί $d\tau=idx+jdy+kdz$.

Ἐξ ἄλλου: $\vec{F}=i\cdot P(x,y,z)+j\cdot Q(x,y,z)+k\cdot R(x,y,z)$.

Ἕνεκα τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων ἔχομεν:

$$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=\vec{F}\cdot d\tau,$$

Συνεπῶς ὁ συμβολισμός (3) τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος γράφεται:

$$J=\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{\tau}. \qquad (4)$$

Ἐάν τό τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι μία κλειστή καμπύλη, τότε γράφεται:

$$J=\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{\tau} \qquad (5)$$

Προφανῶς τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (3) δύναται νά θεωρηθῇ ὡς τό ἄθροισμα τῶν τριῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων.

$$\int_{\widehat{AB}} P(M)\,dx, \quad \int_{\widehat{AB}} Q(M)\,dy, \quad \int_{\widehat{AB}} R(M)\,dz$$

τῶν διανυσματικῶν συναρτήσεων $(P,0,0)$, $(0,Q,0)$, $(0,0,R)$.

Ἐάν ἡ καμύλη (γ) εἶναι ἐπίπεδος καί ἔχομεν τήν διανυσματικήν συνάρτησιν $\vec{F}=i\cdot P(x,y)+j\cdot Q(x,y)$, ἔχομεν πάλιν τόν ἀνάλογον ὁρισμόν τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος.

Οὕτω θά ἔχωμεν:

$$J=\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \quad \text{κ.τ.λ.}$$

§5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ 2ου ΕΙΔΟΥΣ

Θεώρημα XI-5-1. Ἔστω τό λεῖο τόξο $\widehat{AB}$ τῆς καμπύλης (γ) ἐχούσης παρα-

μετρικάς ἐξισώσεις $x=\varphi(t),\ y=f(t),\ z=\sigma(t),\ \alpha\leq t\leq \beta$.

Ἔστω ἐπί πλέον $\vec{F}=\mathbf{i}\cdot P(x,y,z)+\mathbf{j}\cdot Q(x,y,z)+\mathbf{k}\cdot R(x,y,z)$ ἡ διανυσματική συνάρτησις ὡρισμένη καί συνεχής ἐπί τοῦ $\widehat{AB}$.

Τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{P(\varphi(t),f(t),\sigma(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),f(t),\sigma(t))f'(t)+R(\varphi(t),f(t),\sigma(t))\sigma'(t)\right\}dt$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω $A\equiv M_0, M_1, M_2,\dots, M_{n-1}, M_n\equiv B$ μία διαμέρισις τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τά σημεῖα τῆς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τιμάς $\alpha=t_0<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n=\beta$ τῆς μεταβλητῆς t. Αἱ τιμαί αὐταί ἀποτελοῦν ἐπίσης μίαν διαμέρισιν τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Ἄς θέσωμεν $x_\rho=\varphi(t_\rho)$, $y_\rho=f(t_\rho)$, $z_\rho=\sigma(t_\rho)$ καί ἀκολούθως ἄς σχηματίσωμεν τό ἄθροισμα:

$$\sum_{\rho=1}^{n}\left\{P(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho)\Delta x_\rho+Q(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho)\Delta y_\rho+R(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho)\Delta z_\rho\right\}\qquad(1),$$

τό ὁποῖον διασπᾶται εἰς τρία ἀθροίσματα. Ἄς θεωρήσωμεν τό πρῶτον ἐξ αὐτῶν, ἤτοι:

$$\sum_{\rho=1}^{n}P(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho)(x_\rho-x_{\rho-1})=\sum_{\rho=1}^{n}P(\varphi(\tau_\rho),f(\tau_\rho),\sigma(\tau_\rho))\varphi'(\theta_\rho)\cdot(t_\rho-t_{\rho-1})\qquad(2)$$

ὅπου: $\xi_\rho=\varphi(\tau_\rho)$, $\eta_\rho=f(\tau_\rho)$, $\zeta_\rho=\sigma(\tau_\rho)$ καί $t_{\rho-1}<\theta_\rho<t_\rho$.

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως ὅτι τό τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι λεῖον, ἕπεται ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\sigma'(t)$ εἶναι δέ καί συνεχεῖς ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ καί ἐπειδή τό διάστημα $[\alpha,\beta]$ εἶναι κλειστόν θά εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχεῖς ἐπ' αὐτοῦ, ἤτοι: διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\eta(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε: $|\varphi'(\theta_\rho)-\varphi'(\tau_\rho)|<\varepsilon$ διά κάθε $\theta_\rho,\tau_\rho\in[\alpha,\beta]$ πού πληροῦν τήν σχέσιν: $|\theta_\rho-\tau_\rho|<\eta(\varepsilon)$.

Ἡ συνάρτησις $P(x,y,z)$ οὖσα συνεχής ἐπί τοῦ $\widehat{AB}$ θά εἶναι καί φραγμένη ἐπ' αὐτοῦ, ἤτοι: ὑπάρχει $M>0$ τοιοῦτον, ὥστε $|P(x,y,z)|\leq M$ διά κάθε $(x,y,z)\in\widehat{AB}$.

Ἐκλέγομεν μίαν διαμέρισιν τοῦ $[\alpha,\beta]$ τοιαύτην, ὥστε, $\max\limits_{1\leq\rho\leq n}\Delta t_\rho<\eta(\varepsilon)$. Τό ἄθροισμα (2) γράφεται:

$$\sum_{\rho=1}^{n}P(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho)(x_\rho-x_{\rho-1})=\sum_{\rho=1}^{n}P(\varphi(\tau_\rho),f(\tau_\rho)\ \sigma(\tau_\rho))\ \varphi'(\tau_\rho)\Delta t_\rho+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{n}P(\varphi(\tau_\rho),f(\tau_\rho),\sigma(\tau_\rho))(\varphi'(\theta_\rho)-\varphi'(\tau_\rho))\Delta t_\rho.$$

Εἶναι δέ $\left| \sum_{\rho=1}^{n} P(\varphi(\tau_\rho), f(\tau_\rho), \sigma(\tau_\rho))(\varphi'(\theta_\rho)-\varphi'(\tau_\rho))\,\Delta t_\rho \right| \leq M\cdot\varepsilon\cdot\sum_{\rho=1}^{n}\Delta t_\rho = M\cdot(\beta-a)\cdot\varepsilon.$

Συνεπῶς:

$$\left| \sum_{\rho=1}^{n} P(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta x_\rho - \sum_{\rho=1}^{n} P(\varphi(\tau_\rho), f(\tau_\rho), \sigma(\tau_\rho))\,\varphi'(\tau_\rho)\Delta t_\rho \right| \leq M(\beta-a)\cdot\varepsilon \qquad (3)$$

Λαμβάνοντες τά ὅρια τῆς (3) ὅταν $\max\limits_{1\leq\rho\leq n}\Delta t_\rho \to 0$, τότε καί $\max\limits_{1\leq\rho\leq n}\Delta x_\rho \to 0$, θά ἔχωμεν:

$$\left| \lim_{\substack{\max\Delta x_\rho\to 0\\ 1\leq\rho\leq n\\ n\to\infty}} \sum_{\rho=1}^{n} P(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta x_\rho - \lim_{\substack{\max\Delta t_\rho\to 0\\ 1\leq\rho\leq n\\ n\to\infty}} \sum_{\rho=1}^{n} P(\varphi(\tau_\rho), f(\tau_\rho), \sigma(\tau_\rho))\varphi'(\tau_\rho)\Delta t_\rho \right| \leq M\cdot(\beta-a)\cdot\varepsilon \quad \text{ἤ}$$

$$\left| \int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\,dx - \int_{\widehat{AB}} P(\varphi(t), f(t), \sigma(t))\,\varphi'(t)\,dt \right| \leq M\cdot(\beta-a)\cdot\varepsilon, \text{ διά κάθε } \varepsilon>0.$$

Ὅθεν: $$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t), f(t), \sigma(t))\varphi'(t)\,dt \qquad (4)$$

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν:

$$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y,z)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} Q(\varphi(t), f(t), \sigma(t))\,f'(t)\,dt \qquad (5)$$

$$\int_{\widehat{AB}} R(x,y,z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} R(\varphi(t), f(t), \sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt \qquad (6)$$

Διά προσθέσεως τῶν (4), (5) καί (6) ἔχομεν τό ἀποδεικτέον.

Παρατηρήσεις:

1η/ Τ' ἀνωτέρω ἰσχύουν καί διά τήν περίπτωσιν κλειστῆς καμπύλης γραμμῆς.

2α/ Διά νά ὑπολογίσωμεν τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀναγκαῖον νά γνωρίσωμεν τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης.

3η/ Ἐάν τό τόξον $\widehat{AB}$ ἀποτελῆται ἀπό ἕνα πεπερασμένον πλῆθος λείων τόξων $\widehat{AA_1}, \widehat{A_1A_2}, \ldots, \widehat{A_nB}$ τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AA_1}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{A_1A_2}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \cdots + \int_{\widehat{A_nB}} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

I. Τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἰς τό ἐπίπεδον.

Ἐάν ἀναφερώμεθα εἰς τό ἐπίπεδον oxy καί ἡ καμπύλη (γ) ἔχῃ τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις:

$$x=\varphi(t),\ y=f(t),\ a\leq t\leq \beta$$

ἡ δέ συνάρτησις $\vec{F}(x,y)=i\cdot P(x,y)+j\cdot Q(x,y)$ εἶναι ὡρισμένη καί συνεχής ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τῆς (γ), τότε θά ἔχωμεν κατ' ἀναλογίαν πρός τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τοῦ $\mathbb{R}^3$:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^\beta \Big\{P(\varphi(t),f(t))\,\varphi'(t)+Q(\varphi(t),f(t))\,f'(t)\Big\}dt \qquad (1)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἔχομεν τήν ἐπίπεδον καμπύλην μέ ἐξίσωσιν $y=y(x)$, $a\leq x\leq \beta$, τότε λαμβάνοντες ὡς παραμετρικάς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης τάς $x=x,\ y=y(x),\ a\leq x\leq \beta$, ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^\beta \Big\{P(x,y(x))+Q(x,y(x))\,y'(x)\Big\}dx \qquad (2)$$

II. Ἐξάρτησις τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος ἐκ τῆς φορᾶς τοῦ τόξου.

Τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα β^ου^ εἴδους ἐξαρτᾶται καί ἀπό τήν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης. Σχετικῶς ἰσχύει ἡ κάτωθι πρότασις:

Πρότασις XI – 5-1. Ἐάν ἀλλάξωμεν τήν φοράν κατά τήν ὁποίαν ἡ καμπύλη διαγράφεται, τότε καί τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἀλλάσσει πρόσημον, ἤτοι:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=-\int_{\widehat{BA}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

Ἀπόδειξις: Πράγματι, ἐάν θεωρήσωμεν τό σημεῖον $M(x,y,z)$ καί εὕρωμεν τό γειτονικόν σημεῖον M' εὑρισκόμενον πρός τήν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης, θά πρέπει τότε εἰς τά x, y, z νά δώσωμεν ἀντιστοίχως τάς αὐξήσεις $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Ἐάν ἤδη ἀλλάξωμεν τήν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης διά νά εὕρωμεν τό γειτονικόν σημεῖον M' εὑρισκόμενον πρός τήν νέαν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης θά πρέπει τώρα εἰς τά x, y, z νά δώσωμεν τάς αὐξήσεις $-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z$ ἀντιστοίχως, ὅτε ἀλλάσσει πρόσημον καί τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα καί ὡς ἐκ τούτου καί τό ὅριον αὐτοῦ, δηλ. τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\int_{\widehat{AB}} R dx + Q dy + R dz = -\int_{\widehat{BA}} P dx + Q dy + R dz .$$

<u>Παρατήρησις</u>: Ἡ ἰδιότης αὐτή εὑρίσκεται εἰς ἀντίθεσιν μέ τήν ἀντίστοιχον ἰδιότητα VI τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων α^ου εἴδους, ὅπου εἰς αὐτά, ἄν ἀλλάξωμεν τήν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης, τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα δέν μεταβάλλεται.

III. <u>Ἰδιότητες τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος β^ου εἴδους</u>.

I. <u>Ἐάν αἱ διανυσματικαί συναρτήσεις</u> $\vec{F}(x,y,z)$ <u>καί</u> $\vec{\Phi}(x,y,z)$ <u>εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπί τοῦ τόξου</u> $\widehat{AB}$ <u>καί</u> c_1, c_2 <u>εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε καί ἡ</u> $c_1 \cdot \vec{F}(x,y,z) + c_2 \vec{\Phi}(x,y,z)$ <u>εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπί τοῦ</u> $\widehat{AB}$ <u>καί ἰσχύει</u>:

$$\int_{\widehat{AB}} \left\{ c_1 \cdot \vec{F} + c_2 \cdot \vec{\Phi} \right\} d\vec{r} = c_1 \cdot \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + c_2 \int_{\widehat{AB}} \vec{\Phi}\, d\vec{r} .$$

II. <u>Ἐάν</u> Γ <u>εἶναι ἕνα τυχόν σημεῖον τοῦ τόξου</u> $\widehat{AB}$, <u>τότε</u>

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{A\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{\Gamma B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Longrightarrow \int_{\widehat{A\Gamma}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\widehat{\Gamma B}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\widehat{BA}} \vec{F} d\vec{r} = 0 .$$

III. <u>Ἐάν ἡ</u> (γ) <u>εἶναι κλειστή καμπύλη καί ἡ</u> $\vec{F}$ <u>εἶναι συνεχής μέ μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τῆς</u> (γ), <u>τότε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα</u> $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ <u>δέν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως</u>.

Πράγματι,

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{B\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{\Gamma A}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{B\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{\Gamma A}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} .$$

IV. Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων β^{ου} εἴδους.

1^{ον}/ Νά ὑπολογισθῆ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ τῆς $\vec{F}=(3x^2-6yz)i+$ $+(2y+3xz)j+(1-4xyz^2)k$ ἀπό τό σημεῖον $A(0,0,0)$ μέχρι τοῦ σημείου $B(1,1,1)$ κατά μῆκος τῆς καμπύλης (γ) ἐχούσης τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$.

<u>Λύσις</u>: Τά σημεῖα $(0,0,0)$ καί $(1,1,1)$ ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τιμάς $t=0$ καί $t=1$ τῆς παραμέτρου t. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Θεωρήματος XI-5-1 ἔχομεν:

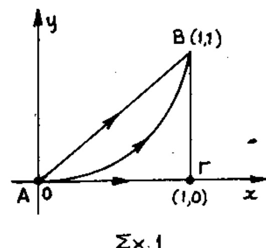
$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left\{3t^2-6t^2\cdot t^3\right\}\cdot 1\cdot dt + \left\{2t^2+3t\cdot t^3\right\}\cdot 2t\cdot dt + \left\{1-4\cdot t\cdot t^2\cdot (t^3)^2\right\}\cdot 3t^2 dt$$

$$= \int_0^1 (3t^2-6t^5+4t^3+6t^5+3t^2-12t^{11})dt = \int_0^1 (6t^2+4t^3-12t^{11})dt = 2.$$

2^{ον}/ Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AB}} 3x^2y\,dx+(x^3+1)dy$.

Κατά μῆκος: α) τῆς εὐθείας πού ἑνώνει τά σημεῖα $(0,0)$ καί (1.1). β) Τοῦ τόξου τῆς παραβολῆς ἑνώνοντας τά αὐτά σημεῖα γ). Κατά μῆκος τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἥτις διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $(0,0)$, $(1,0)$ καί $(1,1)$.

<u>Λύσις</u>: Διά τάς τρεῖς περιπτώσεις βλ. Σχ. 1 τόν τρόπον συνδέσεως τῶν σημείων $(0,0)$ καί $(1,1)$.



Σχ. 1

α) Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἶναι $y=x$.

Ὅθεν, $\int_{\widehat{AB}} 3x^2\cdot y\,dx+(x^3+1)dy = \int_0^1 3x^2 x\,dx+(x^3+1)dx = \int_0^1 (4x^3+1)dx = 2.$

β) Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἶναι $y=x^2$.

Ὅθεν, $\int_{\widehat{AB}} 3x^2y\,dx+(x^3+1)dy = \int_0^1 3x^2\cdot x^2 dx+(x^3+1)\cdot 2x\,dx = \int_0^1 (5x^4+2x)dx = 2.$

γ) Εἶναι, $\int_{\widehat{AB}} 3x^2y\,dx+(x^3+1)dy = \int_{\vec{A\Gamma}} 3x^2y\,dx+(x^3+1)dy + \int_{\vec{\Gamma B}} 3x^2y\,dx+(x^3+1)dy$

$$=0+\int_0^1 (1^3+1)dy = 2\int_0^1 dy = 2.$$

3ον/. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AA'}} \frac{dy}{x^4+x^2+1}$,

ὅπου $\widehat{AA'}$ εἶναι τό τόξον τῆς παραβολῆς $x^2=2y$ τό εὑρισκόμενον εἰς τό αον τεταρτημόριον.

<u>Λύσις:</u> Αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς παραβολῆς εἶναι $y=t$ καί $x=\sqrt{2t}$, $0\le t<\infty$. Τό ὁλοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_{\widehat{AA'}} \frac{dy}{x^4+x^2+1} = \int_0^\infty \frac{dt}{4t^2+2t+1} = \int_0^\infty \frac{dt}{(2t)^2+2\cdot 2t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} =$$

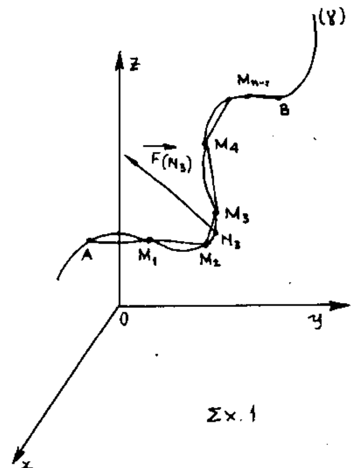
$$= \int_0^\infty \frac{dt}{(2t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\int_{1/2}^\infty \frac{du}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \quad (\text{ἐτέθη } 2t+\tfrac{1}{2}=u)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \text{τοξ εφ}\,\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_{1/2}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\text{τοξ εφ}\,\infty - \text{τοξ εφ}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

<u>§ 6. ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ</u>

Ὡς γνωστόν, ἐκ τῆς Μηχανικῆς, τό ἔργον W τό παραγόμενον ὑπό μιᾶς δυνάμεως $\vec{F}$ σταθερᾶς ἐντάσεως F ἥτις μετατοπίζει τό σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατά τό διάνυσμα AA' παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου $W=\vec{F}\cdot\vec{AA'}=|\vec{F}|\cdot|\vec{AA'}|\cdot$συνθ, ἔνθα θ ἡ γωνία (σταθερά) ἡ σχηματιζομένη ὑπό τῶν διανυσμάτων $\vec{F}$ καί $\vec{AA'}$.

Ἔστω ἤδη μία δύναμις $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\cdot i + Q(x,y,z)\cdot j+R(x,y,z)\,k$, ἥτις μετατοπίζει τό σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἐπί τῆς καμπύλης (γ) ἐκ τοῦ σημείου $A(a_1,a_2,a_3)$ μέχρι τό σημεῖον $B(b_1,b_2,b_3)$. Ἔστωσανδέ $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, $z=\sigma(t)$, $t_1\le t\le t_2$ αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς καμπύλης (γ). Ἐκτελοῦμεν ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τῆς (γ) μίαν διαμέρισιν $A=M_0, M_1, M_2,\dots, M_{n-1}, M_n=B$ (βλ. Σχ.1) Εἰς ἕκαστον τόξον $\widehat{M_{\rho-1}M_\rho}$ λαμβάνομεν καί ἀπό ἕνα τυχόν σημεῖον $N_\rho(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)$ καί



Σχ. 1

ἔστω $F(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)$ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως (ἔντασις τῆς δυνάμεως) εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον. Θεωροῦμεν τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν μὲ κορυφὰς ἐπὶ τῆς καμπύλης $AM_1 M_2 M_3 \ldots M_{n-1} B$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι, ἡ δύναμις $\vec{F}$ κινεῖ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ μῆκος τῶν πλευρῶν αὐτῆς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς καὶ ἐπὶ πλέον (ὑποθέτομεν) ὅτι, ἐφ' ἑκάστης χορδῆς ἔχει σταθερὰν ἔντασιν ἡ δύναμις καὶ ἴσην μὲ τὴν τιμὴν ποὺ λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὴν τὴν χορδήν· ἤτοι, ἐπὶ τῆς χορδῆς $\overrightarrow{M_{\rho-1} M_\rho}$ ἔχει ἔντασιν ἡ δύναμις ἴσην πρὸς $\vec{F}(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)$. Τότε τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς σταθερᾶς δυνάμεως ἐντάσεως $F(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)$ κατὰ μῆκος τῆς χορδῆς $\overrightarrow{M_{\rho-1} M_\rho}$ θὰ εἶναι:

$$\Delta W_\rho = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_{\rho-1} M_\rho} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ προβολαὶ τοῦ $\overrightarrow{M_{\rho-1} M_\rho}$ εἶναι $\Delta x_\rho, \Delta y_\rho, \Delta z_\rho$ τῆς δὲ δυνάμεως $\vec{F}$ αἱ προβολαὶ εἶναι P, Q, R ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$\Delta W_\rho = P(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta x_\rho + Q(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta y_\rho + R(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta z_\rho \qquad (2)$$

Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνωτέρω ἔργων κατὰ μῆκος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, ὅτε λαμβάνομεν:

$$W_n = \sum_{\rho=1}^{n} \left\{ P(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta x_\rho + Q(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta y_\rho + R(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta z_\rho \right\} \qquad (3)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τῆς ἀνωτέρω διαμερίσεως τὸ $\max_{1\le\rho\le n} \Delta \ell_\rho \to 0$ ($\Delta\ell_\rho$ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{M_{\rho-1} M_\rho}$) ὅτε καὶ $n \uparrow \infty$ καὶ $\Delta x_\rho \to 0$, $\Delta y_\rho \to 0$, $\Delta z_\rho \to 0$ τότε, ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (3) <u>τοῦτο καλεῖται ἔργον τῆς δυνάμεως</u> $\vec{F}$ <u>μετακινούσης τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἐπὶ τῆς καμπύλης</u> (γ) <u>ἐκ τοῦ σημείου</u> A <u>μέχρι τοῦ σημείου</u> B.

Ὥστε,
$$W \overset{\text{ορ}}{=} \lim_{\substack{\max\Delta\ell_\rho \to 0 \\ 1\le\rho\le n \\ n\to\infty}} \sum_{\rho=1}^{n} \left\{ P(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta x_\rho + Q(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta y_\rho + R(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)\Delta z_\rho \right\} \qquad (4)$$

Ἐξ ἄλλου αὐτὸ τὸ ὅριον εἶναι τὸ $\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

ὅθεν,
$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (5)$$

Ἐφαρμογή. Νά εὑρεθῇ τό ἔργον τό παραγόμενον ὑπό τῆς δυνάμεως $\vec{F}=(3x-4y+2z)i+(4x+2y-3z^2)j+(2xz-4y^2+z^3)k$, ἥτις μετακινεῖ τό σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἐπί τῆς Ἐλλείψεως $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Λύσις: Αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως εἶναι $x=4\cdot\sigma\upsilon\nu t$, $y=3\eta\mu t$, $z=0$

$0\le t\le 2\pi$.

Εἶναι δέ, $d\vec{r}=dx\cdot i+dy\cdot j+0\cdot k$, ὅτε ἔχομεν:

$$W=\oint_{\gamma}\vec{F}\,d\vec{r}=\oint_{\gamma}\left\{(3x-4y)i+(4x+2y)j-4y^2k\right\}(dx\cdot i+dy\cdot j+0\cdot k).$$
$$=\oint_{\gamma}(3x-4y)\,dx+(4x+2y)\,dy.$$

Ἀντικαθιστῶντες τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις τῆς Ἐλλείψεως λαμβάνομεν:

$$W=\int_0^{2\pi}\left\{3(4\sigma\upsilon\nu t)-4(3\eta\mu t)\right\}4\cdot(-\eta\mu t)\,dt+\left\{4\cdot(4\sigma\upsilon\nu t)+2(3\eta\mu t)\right\}\cdot(3\sigma\upsilon\nu t)\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(48-30\,\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t)\,dt=(48t-15\,\eta\mu^2 t)\Big|_0^{2\pi}=96\pi.$$

§7. ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΦΟΡΩΝΤΑ ΤΑ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ $\beta^{ου}$ ΕΙΔΟΥΣ

Θεώρημα XI-7-1. Ἔστω $\overset{\frown}{AB}$ μία λεία καμπύλη (γ) ἥτις ἔχει ἐξισώσεις

$x=\varphi(\ell)$, $y=f(\ell)$, $z=\sigma(\ell)$

καί ἡ διανυσματική συνάρτησις

$$\vec{F}(x,y,z)=i\cdot P(x,y,z)+j\,Q(x,y,z)+k\cdot R(x,y,z)$$

ὡρισμένη καί φραγμένη ἐπί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ τῆς (γ)

Ἐάν συνα, συνβ, συνγ, εἶναι τά διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης εἰς τό σημεῖον $M(x,y,z)$ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (ἡ ἐφαπτομένη προσανατολίζεται ὡς πρός τήν κατεύθυνσιν αὐξήσεως τοῦ τόξου ℓ) τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{\overset{\frown}{AB}}\left[P\,\sigma\upsilon\nu\alpha+Q\,\sigma\upsilon\nu\beta+R\,\sigma\upsilon\nu\gamma\right]d\ell.$$

Ἐπί πλέον τό ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀριστεροῦ μέλους ὑπάρχει ἐάν, καί μόνον ἐάν, τό ὁλοκλήρωμα τοῦ δεξιοῦ μέλους (ὁλοκλήρωμα $\alpha^{ου}$ εἴδους) ὑπάρχῃ

<u>**Ἀπόδειξις**</u>: Κατ' ἀρχὰς ἀποδεικνύομεν ὅτι:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx = \int_{\widehat{AB}} P\,\text{συν}a\,d\ell \qquad (1)$$

Θεωροῦμεν ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τῆς καμπύλης (γ) μίαν διαμέρισιν $A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n=B$ καί ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$, μήκους $\Delta\ell_p$, λαμβάνομεν ἕν τυχόν σημεῖον $N_p(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$ καί ἐν συνεχείᾳ σχηματίζομεν τό ἄθροισμα

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} P(N_p)\cdot\Delta x_p \qquad (2)$$

ὅπου $\Delta x_p = x(\ell_p) - x(\ell_{p-1})$.

Τό (2) εἶναι ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα ἀντιστοιχοῦν εἰς τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AB}} P\,dx$.

Ἀκολούθως σχηματίζομεν τό ἄθροισμα

$$T_n = \sum_{p=1}^{n} P(N_p)\,\text{συν}a\cdot\Delta\ell_p \qquad (3)$$

ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν αὐτήν διαμέρισιν καί τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AB}} P\,\text{συν}a\,d\ell$.

Ἐπειδή, $\frac{dx}{d\ell} = \text{συν}a$, ἔπεται ὅτι:

$$\Delta x_p = \int_{\ell_{p-1}}^{\ell_p} \text{συν}a\,d\ell \qquad (4)$$

Συμφώνως δέ πρός τό θεώρημα τῆς Μέσης τιμῆς ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν:

$$\Delta x_p = \text{συν}a^{*}\cdot\Delta\ell_p \qquad (5)$$

ὅπου $\text{συν}a^{*}$ εἶναι ἡ τιμή τοῦ διευθύνοντος συνημιτόνου μιᾶς ὡρισμένης ἐφαπτομένης τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$.

Ὅθεν λόγῳ τῆς (5), τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα (2) γράφεται:

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} P(N_p)\cdot\text{συν}a^{*}\cdot\Delta\ell_p \qquad (6).$$

Λόγῳ τῆς (3) καί (6) ἔχομεν:

$$\left|S_n - T_n\right| = \left|\sum_{p=1}^{n}\left\{P(N_p)\cdot\text{συν}a^{*} - P(N_p)\,\text{συν}a\right\}\Delta\ell_p\right|$$

$$\leq \sum_{p=1}^{n}\left|P(N_p)\right|\cdot\left|\text{συν}a^{*} - \text{συν}a\right|\cdot\Delta\ell_p \qquad (7)$$

Ἐπειδή ἡ συνάρτησις συνα $(\alpha=\alpha(x,y,z))$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ θά εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, ἐπομένως δοθέντος ἑνός $\varepsilon>0$ ὑπάρχει μία διαμέρισις τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τοιαύτη ὥστε νά ἔχωμεν $|συνα^{*}-συνα|<\varepsilon$ (8).

Ἐπί πλέον $|P(M_p)|\leq M$ (ἡ F ὑπετέθη φραγμένη ἐπί τοῦ $\widehat{AB}$).

Ἡ (7) γράφεται τότε:

$$|S_n-T_n|\leq \varepsilon\cdot M\cdot\sum_{p=1}^{n}\Delta\ell_p=\varepsilon\cdot M\cdot\ell \qquad (9)$$

Λαμβάνοντες τά ὅρια τῆς (9) ὅταν τό $\max\limits_{1\leq p\leq n}\Delta\ell_p\to 0$, ὅτε καί $\max\limits_{1\leq p\leq n}\Delta x_p\to 0$ καί $n\uparrow\infty$, θά ἔχωμεν:

$$\left|\lim_{\substack{\max\Delta x_p\to 0\\ 1\leq p\leq n\\ n\to\infty}} S_n-\lim_{\substack{\max\Delta\ell_p\to 0\\ 1\leq p\leq n\\ n\to\infty}} T_n\right|\leq\varepsilon\cdot M\cdot\ell \qquad ἤ$$

$$\left|\int_{\widehat{AB}}Pdx-\int_{\widehat{AB}}P\,συνα\,d\ell\right|\leq\varepsilon\cdot M\cdot\ell \quad (10), \text{ διά κάθε } \varepsilon>0.$$

Ἐκ τῆς (10) συμπεραίνομεν ὅτι:

$$\int_{\widehat{AB}}Pdx=\int_{\widehat{AB}}P\,συνα\,d\ell \qquad (11)$$

Κατ' ἀναλογίαν εὑρίσκομεν:

$$\int_{\widehat{AB}}Qdx=\int_{\widehat{AB}}Q\,συνβ\,d\ell \qquad (12)$$

$$\int_{\widehat{AB}}Rdz=\int_{\widehat{AB}}R\,συνγ\,d\ell \qquad (13)$$

Διά προσθέσεως τῶν (11), (12), (13) ἔχομεν τό ἀποδεικτέον.

Παρατηρήσεις 1η/. Ἔστω $\vec{\tau}=(συνα, συνβ, συνγ)$ τό μοναδιαῖον ἐφαπτομενικόν διάνυσμα τῆς καμπύλης εἰς τό σημεῖον $M(x,y,z)$ καί $\vec{F}=(P,Q,R)$ αἱ συντεταγμέναι προβολαί τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F}$. Τότε τό $P συνα+Q συνβ+R συνγ$ ἰσοῦται πρός τό ἐσωτερικόν γινόμενον $\vec{F}\cdot\vec{\tau}$ τῶν διανυσμάτων $\vec{F}$ καί $\vec{\tau}$. Εἶναι δέ $\vec{F}\cdot\vec{\tau}=|\vec{F}_\tau|$, ὅπου $|\vec{F}_\tau|$ τό μέτρον τῆς προβολῆς τῆς $\vec{F}$ ἐπί τοῦ $\vec{\tau}$.

Ὅθεν, κατά τό θεώρημα ἔχομεν:

$$\int_{\widehat{AB}}Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\widehat{AB}}|\vec{F}_\tau|\,d\ell \qquad (1)$$

2ον/. Ἐάν $\vec{d\ell} = (dx, dy, dz)$ καί ἐπειδή, $dx = d\ell\,\sigma\upsilon\nu\alpha$, $dy = d\ell\,\sigma\upsilon\nu\beta$, $dz = d\ell\,\sigma\upsilon\nu\gamma$ τότε, $[P\,\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\,\sigma\upsilon\nu\beta + R\,\sigma\upsilon\nu\gamma]\,d\ell = \vec{F}\cdot\vec{d\ell}$.

Ὅθεν, κατά τό θεώρημα ἔχομεν:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot\vec{d\ell} \qquad (2).$$

<u>Θεώρημα XI-7-2.</u> <u>Ἡ τιμή τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος:</u>

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

<u>εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς παραμετρικῆς παραστάσεως τοῦ τόξου</u> $\widehat{AB}$.

<u>Ἀπόδειξις:</u> Ἔστωσαν $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$, $z = \sigma(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Ἐπειδή δέ τό τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι λεῖο αἱ $\varphi'(t)$ $f'(t)$, $\sigma'(t)$ $\alpha \le t \le \beta$ ὑπάρχουν εἶναι δέ καί συνεχεῖς. Κάθε ἄλλη παραμετρική παράστασις τοῦ $\widehat{AB}$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς προκύπτουσα ἐκ τῆς πρώτης διά τῆς ἀντικαταστάσεως $t = q(v)$, $\gamma \le v \le \delta$, ὅπου ἡ $q(v)$ εἶναι συνεχής μέ παράγωγον συνεχῆ ἐπί τοῦ $[\gamma, \delta]$.

Ὅθεν, αἱ $x = \varphi(q(v))$, $y = f(q(v))$, $z = \sigma(q(v))$, ὅπου $\gamma \le v \le \delta$, εἶναι συνεχεῖς καί μέ παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ $[\gamma, \delta]$.

Τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\,dx$ (1), ὡς γνωστόν ἰσοῦται πρός τό:

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), f(t), \sigma(t))\,\varphi'(t)\,dt \qquad (2)$$

Διά τῆς δευτέρας ἀντικαταστάσεως εἰς τό (1) λαμβάνομεν:

$$\int_{\gamma}^{\delta} P(\varphi(q(v)), f(q(v)), \sigma(q(v)))\,\varphi'_q \cdot q'(v)\,dv \qquad (3)$$

Τά ὁλοκληρώματα (2) καί (3) εἶναι ἴσα, καθ᾽ ὅσον τό (3) προκύπτει ἐκ τοῦ (2) διά τῆς ἀντικαταστάσεως $t = q(v)$, $\gamma \le v \le \delta$.

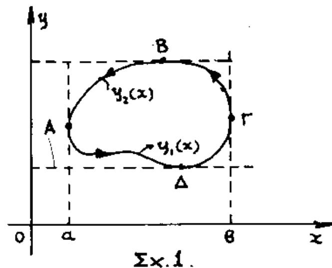
Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν καί διά τά ὁλοκληρώματα:

$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y,z)\,dy$, $\int_{\widehat{AB}} R(x,y,z)\,dz$. Ἄρα ἰσχύει τό θεώρημα.

Ὁ ἀναγνώστης δύναται νά κάμνῃ μίαν ἀριθμητικήν ἐπαλήθευσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.

§8. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ GREEN (εἰς τό ἐπίπεδον)

Ἔστω ἕνα χωρίον D τοῦ ἐπιπέδου οxy περικλειόμενον ὑπό μιᾶς κλειστῆς καμπύλης L ἀποτελουμένης ἀπό πεπερασμένα τό πλῆθος λεῖα τόξα. Ὑποθέτομεν ἐπί πλέον ὅτι τό χωρίον D εἶναι τοιοῦτον, ὥστε πᾶσαι αἱ παράλληλοι πρός τούς ἄξονας οx ἀντ. οy νά τέμνουν τήν L εἰς δύο τό πολύ σημεῖα (κανονικόν χωρίον). Ὑποθέτομεν ὅτι αὐτό τό χωρίον περιορίζεται κάτωθεν ὑπό τῆς καμπύλης $y=y_1(x)$ καί ἄνωθεν ὑπό τῆς καμπύλης $y=y_2(x)$ ὅπου $y_1(x)\leq y_2(x), a\leq x\leq \beta$ καί ὅτι αὐταί αἱ δύο καμπύλαι ἀποτελοῦν τήν προσανατολισμένη κλειστήν καμπύλην L, (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1.

Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ τάς ὁποίας ὑποθέτομεν συνεχεῖς ἐπί τοῦ κλειστοῦ καί φραγμένου χωρίου D ἐχούσας μερικάς παραγώγους $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ συνεχεῖς καί φραγμένας ἐπί τοῦ D.

Θεωροῦμεν τό ὁλοκλήρωμα :

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy .$$

Ἔχομεν :

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int_a^\beta \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\right) dx = \int_a^\beta \left[P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\right] dx$$

$$= \int_a^\beta P(x,y_2(x))dx - \int_a^\beta P(x,y_1(x))\, dx$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB\Gamma}} P(x,y)\,dx - \int_{\overset{\frown}{A\Delta\Gamma}} P(x,y)\, dx$$

$$= -\int_{\overset{\frown}{\Gamma BA}} P(x,y)dx - \int_{\overset{\frown}{A\Delta\Gamma}} P(x,y)\, dx$$

$$= -\oint_L P(x,y)\, dx .$$

Ὥστε,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\oint_L P(x,y)\, dx \qquad (1)$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \oint_L Q(x,y)\, dy \qquad (2)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

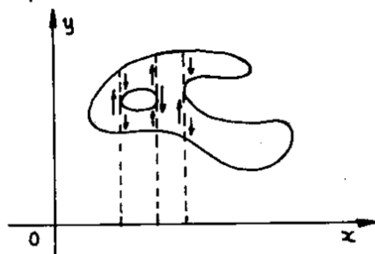
$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \oint_L P\,dx + Q\,dy \qquad (3)$$

Ἐξ οὗ τό θεώρημα:

Θεώρημα XI-8-1 Ἔστω D ἕνα κανονικόν χωρίον μέ σύνορον τήν καμπύλην L καί αἱ συναρτήσεις $P(x,y)$ καί $Q(x,y)$ ὅπου αὗται καθώς καί αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι αὐτῶν $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ εἶναι συνεχεῖς καί φραγμέναι ἐπί τοῦ D. Τότε ἰσχύει:

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \oint_L P\,dx + Q\,dy.$$

Παρατήρησις: Ἐάν τό χωρίον δέν εἶναι κανονικόν, τότε τό χωρίζομεν διά καταλλήλων διαχωριστικῶν γραμμῶν εἰς ἕνα πεπερασμένον πλῆθος κανονικῶν χωρίων – ἐάν τοῦτο εἶναι δυνατόν – καί ἐφαρμόζομεν εἰς ἕκαστον τούτων τό θεώρημα τοῦ Green. (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2.

Ἐφαρμογαί: 1ον/. Ἔστω τό κανονικόν χωρίον D περικλειόμενον ὑπό τῆς λείας καμπύλης L.

αον/. Ἐάν θέσωμεν $P(x,y)=0$ καί $Q(x,y)=x$ ὁ τύπος τοῦ Green δίδει:

$$\oint_L x\,dy = \iint_D dxdy = S, \text{ ἔνθα } S \text{ τό ἐμβαδόν τοῦ } D.$$

Ἀναλόγως $-\oint_L y\,dx = \iint_D dxdy = S$.

Ὅθεν,

$$\boxed{S = \oint_L x\,dy = -\oint_L y\,dx} \qquad (1)$$

βον/. Ἐάν θέσωμεν, $Q(x,y)=x$ καί $P(x,y)=-y$, ὅτε $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$ καί ὁ

τύπος τοῦ Green δίδει:

$$2\iint_D dx\,dy = \oint_L x\,dy - y\,dx \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx} \qquad (2)$$

Παράδειγμα 1ον: Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου τοῦ φρασσομένου ὑπό τῆς ἀστεροειδοῦς: $x = a\,\sigma\upsilon\nu^3 t,\ y = a\,\eta\mu^3 t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον (2) ἔχομεν:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu^2 t\left[\sigma\upsilon\nu^2 t + \eta\mu^2 t\right]dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\eta\mu^2 2t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

2ον) Ἤδη θ' ἀποδείξωμεν ἐπί τῇ βάσει τοῦ τύπου τοῦ Green τό θεώρημα VII-9-1 σελ. 179.

Ἀπόδειξις: Θ' ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$\grave{\varepsilon}\mu\beta.\ D = S = \iint_D dx\,dy = \iint_{D^*}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv,$$

ὅπου $x = \varphi(u,v)$ καί $y = \sigma(u,v), u,v \in D^*$

Ὡς γνωστόν ἔχομεν:

$$S = \iint_D dx\,dy = \oint_L x\,dy = \oint_{L^*}\varphi(u,v)\,d\sigma = \oint_{L^*}\varphi(u,v)\left[\frac{\partial\sigma}{\partial u}du + \frac{\partial\sigma}{\partial v}dv\right] \quad \text{ἤ}$$

$$S = \oint_{L^*}\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial u}du + \varphi\frac{\partial\sigma}{\partial v}dv \qquad (1)$$

Ἄς θέσωμεν $P = \varphi\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial u}$, $Q = \varphi\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial v}$, ὅτε:

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \varphi\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \varphi\cdot\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v}$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\sigma}{\partial u} & \frac{\partial\sigma}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Green ὁ τύπος (1) δίδει:

$$S = \oint_{L^*}\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial u}du + \varphi\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial v}dv = \iint_{D^*}\left[\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right]du\,dv = \iint_{D^*}\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\sigma}{\partial u} & \frac{\partial\sigma}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv.$$

3/. Νά ἐπαληθεύσετε τό θεώρημα τοῦ Green ὅταν $P(x,y)=2y$, $Q(x,y)=3x$ καί D εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος $x^2+y^2\leq 1$.

Λύσις: Ἔχομεν: $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-2=1$.

Ὅθεν, $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D dxdy=\pi\cdot 1^2=\pi$.

Αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς περιφερείας Γ εἶναι:

$$x=\sigma\upsilon\nu\theta,\quad y=\eta\mu\theta,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

Εἶναι: $$\oint_\Gamma (Pdx+Qdy)=\int_0^{2\pi}\{2\eta\mu\theta(-\eta\mu\theta)+3\sigma\upsilon\nu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta)\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(-5\eta\mu^2\theta+3)\,d\theta=6\pi-\frac{5}{2}\cdot 2\pi=\pi.$$

4/. Ἐάν D εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος καί Γ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green νά ὑπολογίσετε τό ὁλοκλήρωμα $\oint_\Gamma (x^2-y^3)dx+(y^2+x^3)dy$.

Λύσις: Εἶναι, $P=x^2-y^3$, $Q=y^2+x^3$ καί $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3(x^2+y^2)$.

Ὅθεν, $$\oint_\Gamma (x^2-y^3)dx+(y^2+x^3)dy=\iint_D 3(x^2+y^2)dxdy=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\frac{3\pi}{2}.$$

§9. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΙΝΑ ΕΝΑ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΕΝ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΕΚ ΤΟΥ ΔΡΟΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ.

Θεωροῦμεν τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \quad (1)$$

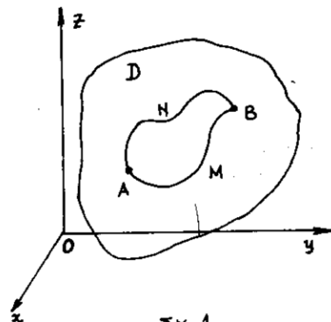
Τοῦτο προφανῶς εἶναι συνάρτησις τοῦ δρόμου $\overset{\frown}{AB}$, τῶν σημείων A καί B καθώς καί τῶν συναρτήσεων P, Q, R. Θά εἴδωμεν κατωτέρω ὑπό ποίας συνθήκας τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου $\overset{\frown}{AB}$ καί ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικῶς καί μόνον ἐκ τῶν σημείων A καί B. Σχετικῶς ἰσχύουν τά κάτωθι θεωρήματα:

Κατωτέρω θεωροῦντες τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (1) θά ὑποθέτωμεν ὅτι,

αἱ συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ ἔχουν μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί τοῦ πεδίου D[1] ἐντός τοῦ ὁποίου κεῖται τό τόξον $\overrightarrow{AB}$.

Θεώρημα XI-9-1. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$



Σχ. 1

δέν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως $\overrightarrow{AB}$ ἀλλά ἐκ τῶν σημείων A καί B εἶναι νά εἶναι τοῦτο μηδέν διά κάθε κλειστήν καμπύλην γραμμήν (γ) κειμένην ἐντός τοῦ D, ἤτοι:

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον) Ἐφ' ὅσον τό ὁλοκλήρωμα δέν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ δρόμου, ἐάν θεωρήσωμεν δύο τυχούσας καμπύλας ἑνούσας τά A καί B, θά ἔχωμεν:

$$\int_{\overrightarrow{AMB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\overrightarrow{ANB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad (1).$$

Ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$\int_{\overrightarrow{AMB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{\overrightarrow{ANB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \quad \text{ἤ}$$

$$\int_{\overrightarrow{AMB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{\overrightarrow{BNA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \quad \text{ἤ}$$

$$\int_{\overrightarrow{AMBNA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \text{ δηλ. } \oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Ἱκανόν: Ἔστω διά μιά τυχοῦσα κλειστή καμπύλη γ, τό ὁλοκλήρωμα εἶναι μηδέν. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\int_{\overrightarrow{AMBNA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \quad \text{ἤ}$$

---

1) Ἕνα πεδίο $D \subseteq \mathbb{R}^3$ καλεῖται ἁπλῶς συνεκτικό ἄν διά κάθε κλειστή καμπύλη κειμένη ἐντός τοῦ D ὑπάρχει ἐπιφάνεια ἔχουσα ὡς σύνορον τήν ἀνωτέρω καμπύλη καί κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός τοῦ D.

$$\int_{\overset{\frown}{AMB}} Pdx+Qdy+Rdz+\int_{\overset{\frown}{BNA}} Pdx+Qdy+Rdz=0 \quad \text{ἤ}$$

$$\int_{\overset{\frown}{AMB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\overset{\frown}{ANB}} Pdx+Qdy+Rdz.$$

Θεώρημα XI-9-2. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου ἐν D, εἶναι νά ὑπάρχῃ μία συνάρτησις $V(x,y,z)$ μέ μερικάς παραγώγους ἐν D τοιαύτη, ὥστε: $dV(x,y,z)=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$, δηλ. ἡ $Pdx+Qdy+Rdz$ νά εἶναι ὁλικόν (τέλειον) διαφορικόν.

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον) Ἔστω, ὅτι τό $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως. Τότε ἐάν θεωρήσωμεν τό σημεῖον A σταθερόν, τό ὁλοκλήρωμα δύναται νά θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τῶν συντεταγμένων (x,y,z) τοῦ σημείου M.

Οὕτω θέτομεν:

$$V(x,y,z)=\int_{\overset{\frown}{AM}} Pdx+Qdy+Rdz$$

Θά δείξωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $V(x,y,z)$ εἶναι διαφορίσιμος καί ἐπί πλέον

$$dV=Pdx+Qdy+Rdz.$$

Διά νά δείξωμεν τοῦτο ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι αἱ μερικοί παράγωγοι $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ ὑπάρχουν καί εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρός τάς συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Ἄς ὑπολογίσωμεν τό ὅριον:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}.$$

Εἶναι:

$$V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)=\int_{\overset{\frown}{AM'}} Pdx+Qdy+Rdz-\int_{\overset{\frown}{AM}} Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_{\overrightarrow{MM'}} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\overrightarrow{MM'}} P(x,y,z)dx,$$

διότι, ἀφοῦ τό ὁλοκλήρωμα εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου ὁλοκληρώσεως, τό $\overrightarrow{MM'}$ δύναται νά ἐκλεγῇ παράλληλον πρός τόν ἄξονα Ox καί συνε-

πῶς κατά μῆκος τοῦ $\overline{MM'}$ τά y καί z εἶναι σταθερά καί ὡς ἐκ τούτου $dy = dz = 0$.

Ἔχομεν λοιπόν : $V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z) = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z)\, dt$

$$= \Delta x \cdot P(x+\theta\Delta x, y, z),\ 0 < \theta < 1.$$

καί
$$\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y, z).$$

Ὅθεν, $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y, z) = P(x, y, z)$.

Ὁμοίως, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y, z)$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = R(x, y, z)$.

Εἶναι λοιπόν $dV = \dfrac{\partial V}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial V}{\partial y}\, dy + \dfrac{\partial V}{\partial z}\, dz = P dx + Q dy + R dz$.

<u>Ἱκανόν</u>: Ἔστω ὅτι ἡ ἔκφρασις $P dx + Q dy + R dz$ εἶναι ὁλικόν διαφορικόν, ἤτοι ὑπάρχει μία συνάρτησις $V(x, y, z)$ τοιαύτη, ὥστε $\dfrac{\partial V}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = Q$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = R$. Ἔστω δέ $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$, $z = \sigma(t)$, $a \leq t \leq b$ ἡ παραμετρική ἔκφρασις τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καί ἔστω $A(a_1, a_2, a_3)$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τιμήν $t = a$, τό δέ $B(b_1, b_2, b_3)$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τιμήν $t = b$ καί τό τυχόν σημεῖον $M(x, y, z)$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τιμήν $t = \tau \in [a, b]$.

Ἔχομεν : $I = \int_{\widehat{AM}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AM}} \dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\, dy + \dfrac{\partial R}{\partial z}\, dz$

$$= \int_a^\tau \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}\right] dt$$

$$= \int_a^\tau \frac{d}{dt}\left[V(\varphi(t), f(t), \sigma(t))\right] dt$$

$$= V(\varphi(\tau), f(\tau), \sigma(\tau)) - V(\varphi(a), f(a), \sigma(a))$$

$= V(M) - V(A)$, δηλ. τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν σημείων M καί A.

Η συνάρτησις $V(x, y, z)$ καλεῖται ἐν προκειμένῳ ***δυναμικόν*** τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F} = (P, Q, R)$.

<u>**Θεώρημα XI-9-3**</u>. <u>Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ἵνα τό ὁλοκλήρωμα :</u>

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, εἶναι νά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον) Ἔστω ὅτι τό ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως. Κατά τό προηγούμενον θεώρημα ὑπάρχει συνάρτησις $V(x,y,z)$ τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x,y,z), \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x,y,z), \frac{\partial V}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Παραγωγίζοντες τήν πρώτην τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ὡς πρός y καί τήν δευτέραν ὡς πρός x λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ἐξ αὐτῶν ἔχομεν} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

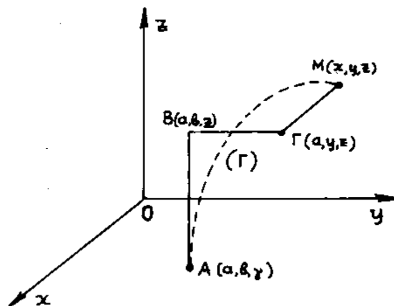
Ἀναλόγως εὑρίσκομεν: $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$

Ἱκανόν. Πληρουμένων τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, ὡς γνωστόν (βλ. ἄσκ. 34, σελ. 74), τό $Pdx + Qdy + Rdz$ εἶναι ὁλικόν διαφορικόν καί κατά τό προηγούμενον θεώρημα τό ὁλοκλήρωμα $\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως.

- Πληρουμένων τῶν συνθηκῶν τοῦ θεωρήματος XI - 9 - 3 ὑπάρχει μία συνάρτησις $V(x,y,z)$ τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$dV(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Τό πρόβλημά μας ἔγκειται εἰς τό νά ἀναζητήσωμεν αὐτήν τήν συνάρτησιν. Πρός τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: θεωροῦμεν ἕνα τόξον τῆς καμπύλης Γ ἑνώνοντες ἕνα σταθερόν σημεῖον $A(\alpha, \beta, \gamma)$ μέ ἕνα τυχόν σημεῖον $M(x,y,z)$ (βλ. Σχ. 1). Ἐν προκειμένῳ ἀντί τῆς τυχούσης καμπύλης θά θεωρήσωμεν μίαν τεθλασμένην γραμμήν ἀποτελουμένην ἐκ τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἑνός τμήματος $\overline{AB}$ παραλλήλου πρός τόν Oz καί μεταξύ τῶν κατηγμένων γ καί z, ἑνός τμήματος $\overline{B\Gamma}$ παραλλήλου



Σχ. 1

πρός τόν oy καί μεταξύ τῶν τεταγμένων β καί y καί τέλος ἑνός τμήματος ΓΜ παραλλήλου πρός τόν ox καί μεταξύ τῶν τετμημένων a καί x. Ὑποθέτομεν φυσικά, ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμή δέν ἐξέρχεται τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῶν P, Q, R. Ἀκολούθως ἡ $V(x,y,z)$ ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

$$V(x,y,z)=\int_{\widehat{AM}} Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_{\overrightarrow{AB}} Rdz+\int_{\overrightarrow{B\Gamma}} Qdy+\int_{\overrightarrow{\Gamma M}} Pdx$$

$$=\int_{\gamma}^{z} R(a,\beta,t)dt+\int_{\beta}^{y} Q(a,t,z)dt+\int_{a}^{x} P(t,y,z)dt+c. \qquad (1)$$

Διά τόν χῶρον τῶν δύο διαστάσεων ἔχομεν:

$$V(x,y)=\int_{\beta}^{y} Q(a,t)dt+\int_{a}^{x} P(t,y)dt. \qquad (2)$$

Ἐφαρμογαί. 1ον/ Ἔστω ὅτι $dV=(2xy+1)\,dx+(x^2+3y^2)\,dy$. Νά εὑρεθῇ τό $V(x,y)$.

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι πληροῦται ἡ συνθήκη $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ διότι ἔχομεν $2x=2x$.

Εἶναι $V(x,y)=\int_{\beta}^{y} Q(a,t)dt+\int_{a}^{x} P(t,y)\,dt$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τόν (1) λαμβάνομεν:

$$V(x,y)=\int_{\beta}^{y}(a^2+3t^2)\,dt+\int_{a}^{x}(2ty+1)dt \qquad (1)$$

$$=a^2y-a^2\beta+y^3-\beta^3+x^2y+x-a^2y-a$$

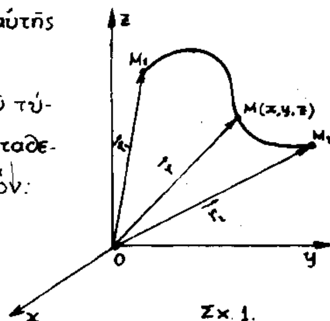
$$=y^3+x^2y+x-a^2\beta-\beta^3-a=y^3+x^2y+x+c,$$

ὅπου ἐτέθη $c=-a^2\beta-\beta^3-a$.

Κατωτέρω δίδομεν ἕνα παράδειγμα, ὅπου τό παραγόμενον ἔργον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου ὁλοκληρώσεως καί ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

2ον/ Νά ὑπολογισθῇ τό ἔργον τό παραγόμενον ὑπό τῆς δυνάμεως τοῦ Νεύτωνος τῆς ἀσκουμένης ὑπό μιᾶς ἀκινήτου μάζης m, ἐπί μιᾶς μοναδιαίας μάζης m_0 μετακινουμένης μεταξύ δύο σημείων $M_1(x_1,y_1,z_1)$ καί $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

<u>Λύσις</u>: Λαμβάνομεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων ὡς κέντρον ἕλξεως (βλ. Σχ. 1). Παριστῶμεν διὰ $\vec{r}$ τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα $\vec{OM}$ τὴν ἀγομένην εἰς τὸ σημεῖον M ὅπου εὑρίσκεται ἡ μοναδιαία μᾶζα καὶ ἔστω $\vec{r}_0$ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα αὐτῆς τῆς διευθύνσεως.



Σχ. 1.

Ὡς γνωστὸν ἡ δύναμις ἕλξεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\vec{F} = -\frac{km}{r^2}\cdot\vec{r}_0$, ὅπου k εἶναι ἡ παγκόσμιος σταθερά. Αἱ συντεταγμέναι τῆς δυνάμεως θὰ εἶναι λοιπόν:

$$X = -km\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

$$Y = -km\,\frac{1}{r^2}\cdot\frac{y}{r}$$

$$Z = -km\,\frac{1}{r^2}\cdot\frac{z}{r}.$$

Τὸ ἔργον τῆς $\vec{F}$ κατὰ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{M_1M_2}$ θὰ εἶναι:

$$W = \int_{\widehat{M_1M_2}} X dx + Y dy + Z dz = -km\int_{\widehat{M_1M_2}}\frac{x dx + y dy + z dz}{r^3}$$

Εἶναι ὅμως $x^2+y^2+z^2=r^2$ $\qquad x dx + y dy + z dz = r dr$.
Ὅθεν, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται:

$$W = -km\int_{\widehat{M_1M_2}}\frac{r dr}{r^3} = -km\int_{\widehat{M_1M_2}}\frac{dr}{r^2} = km\int_{\widehat{M_1M_2}} d\left(\frac{1}{r}\right) = km\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, ἀλλὰ μόνον ἐκ τῶν σημείων M_1 καὶ M_2.

Ἡ συνάρτησις $V(x,y,z) = \frac{km}{r}$, $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ ὡς γνωστὸν εἶναι τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης m.

Εἶναι δὲ $X=\frac{\partial V}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial V}{\partial y}$, $Z=\frac{\partial V}{\partial z}$. Ὅθεν, $W = V(M_2) - V(M_1)$.
Ἤτοι τὸ ἔργον μεταξὺ τῶν σημείων M_1 καὶ M_2 ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων αὐτοῦ.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Green θὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα XI-9-3 εἰς τὸν χῶρον τῶν δύο διαστάσεων.

<u>Θεώρημα XI-9-4</u>. <u>Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὸ ὁλοκλήρωμα</u>: $\int_{AB} P dx + Q dy$ <u>εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, εἶναι</u> $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: (<u>Ἀναγκαῖον</u>) Ἔστω ὅτι τό $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, τότε συμφώνως πρός τό Θεώρημα XI-9-1 διά κάθε κλειστή καμπύλη L θά ἔχωμεν $\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0$. Θά δείξωμεν ὅτι θά εἶναι $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ καί ἔστω δι' ἕν σημεῖον (x_0, y_0) ἔχομεν $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$. Ἐπειδή ἡ συνάρτησις $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ εἶναι συνεχής, αὕτη θά εἶναι καί θετική εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_0, y_0), συνεπῶς θά ὑπάρχῃ ἀριθμός $\delta > 0$ τοιοῦτος, ὥστε διά πάντα τά σημεῖα ἑνός πεδίου D' ἀρκετά μικροῦ καί περιέχοντος τό σημεῖον (x_0, y_0) νά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > \delta \quad \text{διά κάθε } (x,y) \in D'$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἕπεται ὅτι:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy > \iint_{D'} \delta\, dx\,dy = \delta \cdot \text{εμβ.}(D') > 0 \qquad (1)$$

Ἔστω L' τό σύνορον τοῦ D', συμφώνως πρός τόν τύπον τοῦ Green ἔχομεν:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{L'} P\,dx + Q\,dy = 0 \qquad (2)$$

Αἱ σχέσεις (1) καί (2) εὑρίσκονται εἰς ἀντίθεσιν.

Ὅθεν, θά πρέπει $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

<u>Ἱκανόν</u> Ἔστω ὅτι $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ καί ἔστω μία τυχοῦσα κλειστή καμπύλη L' περικλείουσα ἕνα πεδίον D'.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Green ἔχομεν:

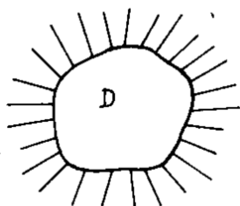
$$\oint_{L'} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Κατά τό Θεώρημα XI-9-1 τό ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως.

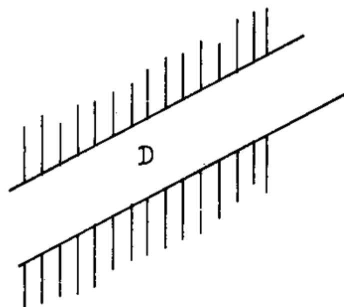
§10. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΕΙΣ ΕΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

Ἕνα πεδίον D θά καλῆται ***ἁπλῶς συνεκτικόν***, ἐάν κάθε κλειστή καμπύλη Γ κειμένη ἐν D περιορίζῃ ἕνα φραγμένον τμῆμα τοῦ D κείμενον ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός

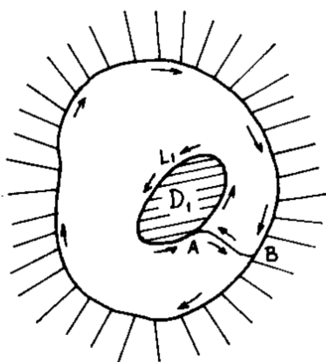
τοῦ D (βλ. Σχ. 1) καί (Σχ. 2). Ἐάν ὅμως ὑπάρχουν κλεισταί καμπύλαι ἐν D περιορίζουσαι τμήματα μή κείμενα ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός τοῦ D, τότε τό πεδίον θά καλῆται ***πολλαπλῶς συνεκτικόν*** (βλ. Σχ. 3) καί (Σχ. 4).



Σχ. 1
Πεδίον Συνεκτικόν

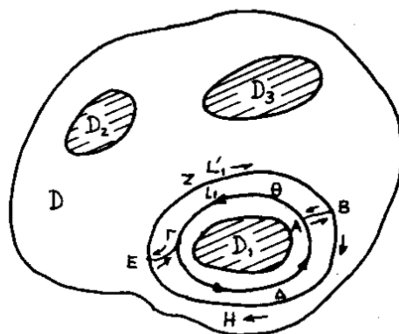


Σχ. 2
Πεδίον Συνεκτικόν



Σχ. 3

Πεδίον πολλαπλῶς συνεκτικόν



Σχ. 4

Πεδίον πολλαπλῶς συνεκτικόν

Εἰς τά γραμμοσκιασθέντα χωρία τῶν Σχ. 3 καί 4 τά κείμενα ἐντός τοῦ συνόρου τοῦ D ἡ συνάρτησις δέν εἶναι ὡρισμένη (πεδίον πολλαπλῶς συνεκτικόν). Αὐτά τά χωρία θά τά καλοῦμεν « ὀπάς ». Εἶναι δυνατόν μία ὀπή νά ἐκφυλίζεται εἰς ἕνα σημεῖον.

Ἕνα πεδίον πολλαπλῶς συνεκτικόν εἶναι δυνατόν μέ τήν βοήθειαν τῶν τομῶν νά

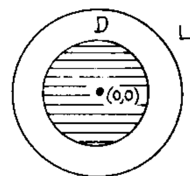
μετατραπῇ εἰς ἕνα ἁπλῶς συνεκτικόν πεδίον. Οὕτω π.χ. εἰς τό σχ. 3 ἐάν φέρωμεν μίαν καμπύλην $\overrightarrow{AB}$ καί θεωρήσωμεν τό σύνορον τοῦ πεδίου διαγραφόμενον ὅπως δεικνύουν τά βέλη, τότε τοῦτο μετατρέπεται εἰς ἕνα ἁπλῶς συνεκτικόν πεδίον.

Κατά τήν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος XI-9-4 ἔχομεν ὑποθέσει, ὅτι τό πεδίον D εἶναι ἁπλῶς συνεκτικόν καί οὕτω πληρουμένης τῆς συνθήκης $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ συνεπάγεται, ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\oint_L P\,dx+Q\,dy$ κατά μῆκος πάσης κλειστῆς καμπύλης L εἶναι μηδέν.

Θά εἴδωμεν τώρα δι' ἑνός παραδείγματος ὅτι, ἐάν τό πεδίον δέν εἶναι ἁπλῶς συνεκτικόν ἀλλά πολλαπλῶς συνεκτικόν, ἡ συνθήκη $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ δέν συνεπάγεται $\oint_L P\,dx+Q\,dy=0$.

Ἔστω π.χ. τό $\oint_L \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$. Τό ὁλοκλήρωμα τοῦτο δέν ἔχει ἔννοιαν εἰς τό σημεῖον (0,0) καί οὕτω θά τό ἐξετάσωμεν εἰς τό πεδίον $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ἐφ' ὅσον ἐπ' αὐτοῦ ἐξαιρέσωμεν μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (0,0) (βλ. Σχ.5). Ἤτοι τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα ἔχει ἔννοιαν εἰς ἕνα πολλαπλῶς συνεκτικόν πεδίον. Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \qquad (1)$$



Σχ. 5

Ἄς λάβωμεν ἤδη ὡς L τήν μοναδιαίαν περιφέρειαν $x=\text{συν}t$, $y=\text{ημ}t$, $0\le t<2\pi$ καί ἄς ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκλήρωμα

$$\oint_L \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

Ὅθεν, ἄν καί πληροῦται ἡ συνθήκη (1) τό ὁλοκλήρωμα δέν εἶναι μηδέν κατά μῆκος τῆς κλειστῆς γραμμῆς (περιφερείας).

Ἔστω μία κλειστή καμπύλη L_1 ἥτις περικλείει μίαν ὀπήν D_1 (βλ. Σχ.4) καί L_1' μία ἄλλη κλειστή καμπύλη περικλείουσα τήν ἰδίαν ὀπήν προσανατολισμέναι ὡς δεικνύουν τά βέλη. Ἔστω ἀκόμη ὅτι $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Θεωροῦντες τάς δύο «τομάς», δηλ. τάς καμπύλας $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma E}$ διαγραφομένας ὡς δεικνύουν τά βέλη, θά ἔχωμεν:

$$\int_{ABHE\Gamma\Delta A} P\,dx+Q\,dy=0 \quad \text{ἤ} \quad \int_{\overrightarrow{AB}}\cdots+\int_{\overrightarrow{BHE}}\cdots+\int_{\overrightarrow{E\Gamma}}\cdots+\int_{\overrightarrow{\Gamma\Delta A}}=0 \quad (1)$$

καί $\int_{\Gamma E Z B A \Theta \Gamma} P dx + Q dy = 0$ ἤ $\int_{\overrightarrow{\Gamma E}} \cdots + \int_{\overrightarrow{EZB}} \cdots + \int_{\overrightarrow{BA}} \cdots + \int_{\overrightarrow{A\Theta\Gamma}} \cdots = 0$ (2)

Διά προσθέσεως τῶν (1) καί (2) καί λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\int_{\overrightarrow{AB}} \cdots = -\int_{\overrightarrow{BA}} \cdots, \quad \int_{\overrightarrow{E\Gamma}} \cdots = -\int_{\overrightarrow{\Gamma E}} \cdots$$ ἔχομεν τελικῶς:

$$\left(\int_{\overrightarrow{BHE}} \cdots + \int_{\overrightarrow{EZB}} \cdots\right) + \left(\int_{\overrightarrow{\Gamma\Delta A}} \cdots + \int_{\overrightarrow{A\Theta\Gamma}} \cdots\right) = 0$$ ἤ $\int_{L_1'} \{P dx + Q dy\} + \int_{L_1} \{P dx + Q dy\} = 0$ ἤ

$$\oint_{L_1} P dx + Q dy = \oint_{L_1'} P dx + Q dy.$$ Ἐξ οὗ τό συμπέρασμα:

<u>Πρότασις: XI-10-1</u>. Ἐάν D <u>εἶναι μία ὀπή καί πληρουμένης τῆς συνθήκης</u> $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, <u>ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος</u> $\oint_L P dx + Q dy$ <u>εἶναι ἡ αὐτή διά κάθε ἁπλῆ καί κλειστήν καμπύλην γραμμήν θετικῶς προσανατολισμένην</u>[1] <u>περικλείουσα τήν ὀπήν.</u>

Ἡ σταθερά τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος εἰς ἑκάστην ὀπήν D_1 καλεῖται *κυκλική σταθερά* τῆς D_1. Οὕτω εἰς τό προαναφερθέν παράδειγμα ἡ τιμή τῆς κυκλικῆς σταθερᾶς εἰς τό σημεῖον (0,0) ἰσοῦται πρός 2π.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\oint_C \frac{x^2y dx - x^3 dy}{(x^2+y^2)^2}$, ὅπου C ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου μέ κορυφάς τά σημεῖα A(1,1), B(-1,1), Γ(-1,-1), Δ(1,-1).

<u>Λύσις</u>: Εἶναι $P = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$, $Q = -\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}$ καί $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^4 - 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Τό πεδίον ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων P καί Q <u>δέν</u> εἶναι ἁπλῶς συνεκτικόν, ἀλλά πολλαπλῶς συνεκτικόν, διότι εἰς τό σημεῖον (0,0) αἱ συναρτήσεις P καί Q δέν ὁρίζονται. Συμφώνως πρός τήν Πρότασιν XI-10-1 ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος θά εἶναι ἡ αὐτή εἴτε θεωρήσωμεν ἐπί τοῦ προκειμένου τό τετράγωνον εἴτε τό μοναδιαῖο κύκλο $x = \sigma\upsilon\nu t$, $y = \eta\mu t$, $0 \le t \le 2\pi$ θετικῶς προσανατολισμένον. Οὕτω ἔχομεν

$$\oint_C \frac{x^2y\,dx - x^3 dy}{(x^2+y^2)^2} = \oint_{\Gamma: x^2+y^2=1} \frac{x^2y\,dx - x^3 dy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{[\sigma\upsilon\nu^2 t\,\eta\mu t\,(-\eta\mu t) - \sigma\upsilon\nu^3 t\,\sigma\upsilon\nu t]\,dt}{(\sigma\upsilon\nu^2 t + \eta\mu^2 t)^2} = -\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu^2 t\,dt = -\pi.$$

---

[1] *δηλ. διαγραφομένην κατά τήν ἀντίθετον φοράν πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.*

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:

1. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} xy^2 ds,$$ ὅπου γ εἶναι τό κυκλικόν τόξον $x=a\sigma\upsilon\nu t,\ y=a\eta\mu t,\ 0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$

2. Ὁμοίως τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\gamma} xy\,ds$, ὅπου γ εἶναι τό τμῆμα τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$ τό εὑρισκόμενον εἰς τήν πρώτην γωνίαν τῶν ἀξόνων.

3. Ὁμοίως τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\gamma}(x^2+y^2-z)\,ds$, ὅπου γ εἶναι τό τόξον τῆς κυκλικῆς ἕλικος $x=a\sigma\upsilon\nu t,\ y=a\eta\mu t,\ z=kt,\ (k>0)$ καί $0\leq t\leq \pi$.

4. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\gamma} y\,d\ell$ ὅπου γ εἶναι τό τμῆμα τῆς καμπύλης $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2-ax=0$, τό εὑρισκόμενον εἰς τό πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων.

5. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\gamma}\frac{d\ell}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ὅπου γ εἶναι ἡ σπεῖρα $\rho\theta=1,\ \sqrt{3}\leq\theta\leq 2\sqrt{2}$.

6. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\gamma}\sqrt{(x^2+y^2)}\,d\ell$ ὅπου γ εἶναι τό τμῆμα τοῦ λημνίσκου τοῦ Bernoulli $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$ τό εὑρισκόμενον εἰς τήν πρώτην γωνίαν τῶν ἀξόνων.

7. Νά εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κ.β. τῆς ἕλικος $x=a\sigma\upsilon\nu t,\ y=b\eta\mu t,\ z=kt$, $0\leq t\leq 2\pi$, γνωρίζοντες ὅτι ἡ πυκνότης αὐτῆς εἶναι σταθερά.

8. Νά εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κ.β τοῦ παραβολικοῦ τόξου $x^2=1-z,\ y=0,\ 0\leq z\leq 1$ τό ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta=\sqrt{1+4x^2}$.

9. Νά εὑρεθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας I_x ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$ τοῦ ἐπιπέδου oxy καί μήκους ℓ τό ὁποῖον σχηματίζει μέ τόν ἄξονα τῶν x γωνίαν φ καί ἀπό τό ὁποῖον τό A ἀπέχει ἀπόστασιν a.

10. Ἐάν $\vec{F}=(x^2-y^2)\cdot i+2xy\cdot j$ νά ὑπολογισθῇ τό $\int_{\Gamma} \vec{F}d\vec{r}$ κατά μῆκος τῆς καμπύλης Γ τοῦ ἐπιπέδου oxy διδομένης ὑπό τῆς ἐξισώσεως $y=x^2-x$, ἀπό τό σημεῖον $A(1,0)$ μέχρι τοῦ σημείου $B(2,2)$. Δώσατε φυσικήν ἑρμηνείαν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος.

11. Νά ὑπολογισθῇ τό ἔργον τό παραγόμενον ὑπό τῆς δυνάμεως $\vec{F}=3x^2\cdot i+(2xz-y)\cdot j+z\cdot k$ μετακινούσης τό σημεῖον ἐφαρμογῆς κατά μῆκος.

α) Τῆς εὐθείας ἀπό τό σημεῖον $(0,0,0)$ μέχρι τοῦ $(3,2,1)$.

β) Τῆς καμπύλης τοῦ χώρου
$x=2t^2,\ y=t,\ z=4t^2-t$ ἀπό $t=0$ ἕως $t=2$.

γ) Τῆς καμπύλης ἡ ὁποία ἔχει ἐξισώσεις
$x^2=2y,\ 3x^3=8z$ ἀπό $x=0$ ἕως $x=2$.

12. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma} y^3dx-x^3dy$, ὅπου Γ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου $|x|+|y|=1$.

13. Ὑπολογίσατε τό $\oint_{\Gamma} x^2y^2dx-xy^3dy$, ὅπου Γ εἶναι τό περίγραμμα τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφάς $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$.

14. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma} ydx+zdy+xdz$, κατά μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου $x^2+y^2+z^2=a^2$ καί $x+z=a$.

15. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma}(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, ὅπου Γ εἶναι ἡ τομή τῶν ἐπιφανειῶν $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $a>b>0$, $z>0$

16. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\Gamma}\frac{xdy-ydx}{x^4-y^4}$, ὅπου Γ εἶναι τό τόξον τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς $x^2-y^2=a^2$, τό κείμενον εἰς τό $a^{ον}$ τεταρτημόριον.

17. Ὑπολογίσατε τό $\int_{\widehat{AB}} yzdx+zxdy+xydz$, ὅπου $\widehat{AB}$ εἶναι ἕνας τυχόν δρόμος μέ $A(1,1,1)$ καί $B(6,3,5)$.

Ὑπόδ. Δείξατε κατ' ἀρχάς ὅτι τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου).

18. Δείξατε ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AB}} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου $\widehat{AB}$. Ἐάν δέ εἶναι $A(1,1)$ καί $B(3,5)$ εὕρατε τήν τιμήν του.

19. Δείξατε ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\widehat{AB}} \eta\mu y\,dx + x\,\sigma\upsilon\nu y\,dy$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου $\widehat{AB}$. Ἐάν δέ εἶναι $A(0,0)$ καί $B(x_1,y_1)$ εὕρατε τήν τιμήν του.

20. Νά ἐπαληθευθῇ ὁ τύπος τοῦ Green διά τάς κάτωθι συναρτήσεις:

i) $P=e^x\,\sigma\upsilon\nu y$, $Q=e^x\,\eta\mu y$, ὅπου τό πεδίον $D=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$.

ii) $P=4x-2y$, $Q=2x+4y$, ὅπου τό πεδίον D εἶναι ἡ ἔλλειψις $x=2\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\eta\mu\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$.

iii) $P=2xy-x^2$, $Q=x+y^2$, ὅπου D εἶναι τό χωρίον τό ὁριζόμενον ὑπό τῶν παραβολῶν $y=x^2$, $y^2=x$.

21. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green νά ὑπολογισθῇ τό $\oint_{\Gamma} (x-y^3)\,dx + x^3\,dy$, ὅπου Γ εἶναι ἡ περιφέρεια $x^2+y^2=1$.

22. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma} (x^3-x^2y)\,dx + xy^2\,dy$, ὅπου Γ εἶναι τό σύνορον τοῦ χωρίου $D=\{(x,y): 4\le x^2+y^2\le 16\}$

23. Αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς ἐπικυκλοειδοῦς εἶναι:

$$x=(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu\theta-\beta\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)\theta$$

$$y=(\alpha+\beta)\,\eta\mu\theta-\beta\,\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)\theta$$

Διά καταλλήλου ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περιορίζεται ὑπό τῆς πρώτης ἁψῖδος τῆς ἐπικυκλοειδοῦς καί τοῦ τόξου τοῦ κύκλου ἐπί τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ κύλισις.

24. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας πού ὁρίζεται ὑπό τῆς ὑποκυκλοειδοῦς $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$.

25. Ἐφ' ὅσον ὁρίσετε τά κάτωθι ὁλοκληρώματα

$$\int_{\gamma_1} \Phi \cdot d\vec{r}, \int_{\gamma_1} \vec{F} \times d\vec{r}$$

ὅπου Φ εἶναι πραγματική συνάρτησις καί $\vec{F}$ διανυσματική καί γ_1 μία προσανατολισμένη καμπύλη, νά ὑπολογισθοῦν

i) $\int_{\gamma_1} \phi d\vec{r}$, ὅπου $\Phi = 2xyz^2$ καί ἡ καμπύλη γ_1 δίδεται ὑπό τῶν ἐξισώσεων $x = t^2, y = 2t, z = t^3$, ἀπό $t=0$ ἕως $t=1$.

ii) $\int_{\gamma_1} \vec{F} \times d\vec{r}$, ὅπου $\vec{F} = xyi - z \cdot j + x^2 k$, ἐπί τοῦ αὐτοῦ ὡς ἀνωτέρω τόξου τῆς γ_1

26. Εἰς ἕκαστον τῶν κάτωθι διαφορικῶν ω εὕρατε μίαν συνάρτησιν V (δυναμικόν) τοιαύτην, ὥστε $\omega = dV$.

i) $\omega = (3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy$

ii) $\omega = (xy\sigma\upsilon\nu xy + \eta\mu xy)dx + (x^2\sigma\upsilon\nu xy + y^2)dy$.

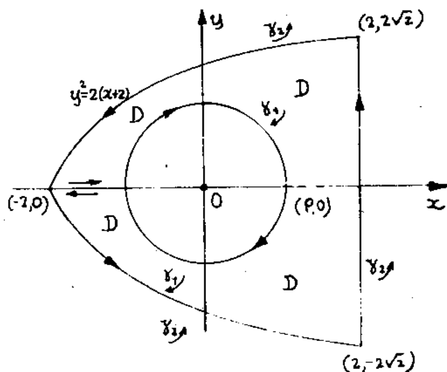
iii) $\omega = (2xyz^3 + z)dx + x^2z^3dy + (3x^2yz^2 + x)dz$

iv) $\omega = (1 + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - \frac{x}{y})dy$

v) $\omega = 2xe^{x^2}\eta\mu y dx + e^{x^2}\sigma\upsilon\nu y dy$

27. Ἔστω D ἕνα χωρίον κείμενον ἐντός προσανατολισμένου κύκλου γ_1 μέ ἐξίσωσιν $x^2 + y^2 = \rho^2$ (ἔνθα, ρ ὅσο θέλομεν μικρά αὐτίς) τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῆς παραβολῆς $y^2 = 2(x+2)$, τῆς εὐθείας $x=2$ καί τῶν ὁποίων τό προσανατολισμένον σύνορον ἔστω γ_{2}, (βλ Σχ.1). Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα:

$$\oint_{\gamma_3} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right)$$



Σχ. 1

Ὑπόδ. Ἔστω $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

Αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις δέν εἶναι ὡρισμέναι εἰς τήν ἀρχήν. Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green ἔχομεν:

$$\oint_{\gamma_2+\gamma_1} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right)=0 \quad \text{ἤ}$$

$$\oint_{\gamma_2} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right)=\int_{\gamma_1} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ δευτέρου ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος θέσατε $x=\rho\,\text{συν}\theta$, $y=\rho\,\text{ημ}\theta$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ κ.τ.λ).

28. Νά ὑπολογισθοῦν τά ὁλοκληρώματα 1ον/ $\oint_\Gamma \frac{y^3dx-xy^2dy}{(x^2+y^2)^2}$ 2ον/ $\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, ὅπου Γ εἶναι ἡ ἔλλειψις $x^2+3y^2=1$. (Ὑπόδ. Ἐφαρμόσατε τήν Πρότασιν XI-10-1).

29. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ $f(x,y)$ ἱκανοποιεῖ τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace $f''_{x^2}+f''_{y^2}=0$ ἐπί τοῦ πεδίου D. Δείξατε ὅτι: $\oint_{\Gamma^*}(f'_y\,dx-f'_x\,dy)=0$, ὅπου Γ^* εἶναι τό σύνορον κάθε πεδίου D^* ἐσωτερικοῦ τοῦ D.

30. Ἀφοῦ δείξετε ὅτι τό ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{AB}\left[(yze^{xyz}\,\text{συν}x-e^{xyz}\,\text{ημ}x+y\,\text{συν}xy+z\,\text{ημ}xz)dx+(yze^{xyz}\,\text{συν}x+x\,\text{συν}xy)dy+(xye^{xyz}\,\text{συν}x+x\,\text{ημ}xz)dz\right]$$

εἶναι ἀνεξάρτητο τοῦ δρόμου, νά ὑπολογίσετε τοῦτο μέ $\overrightarrow{AB}$ τυχόντα δρόμον διά A(0,0,0) καί B(−1,−2,−3).

31. Ἕνα ὑλικόν σημεῖον κινεῖται κατά μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τό ὁποῖον συνδέει τά σημεῖα $A(a_1,\beta_1,\gamma_1)$ καί $B(a_2,\beta_2,\gamma_2)$, ὑποκείμενον εἰς τήν δύναμιν $\vec{F}=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i}-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j}-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$. Εὕρατε τό παραγόμενον ἔργον καί δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι τό ἴδιο δι οἱονδήποτε δρόμον, ὁ ὁποῖος συνδέει τά A καί B καί δέν διέρχεται ἀπό τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

32. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\oint_\Gamma \frac{x^2ydx-x^3dy}{(x^2+y^2)^2}$ ὅπου 1ον/ Ἡ Γ εἶναι τό τετράγωνον μέ κορυφάς τά σημεῖα (1,1), (−1,1), (1,−1), (−1,−1). 2ον/ Ἡ Γ εἶναι τυχοῦσα κλειστή καμπύλη περικλείουσα τό σημεῖον (0,0).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

§ 1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΧΕΤΙΚΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ (Α' ΕΙΔΟΥΣ)

Θεωροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν S τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$ ἔχουσα τὰς παραμετρικὰς ἐξισώσεις $x=\varphi(u,v)$, $y=f(u,v)$, $z=\sigma(u,v)$ (1), ὅπου $(u,v)\in D$. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ συναρτήσεις φ, f, σ εἶναι συνεχεῖς μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως, ὡς πρὸς u καὶ v, συνεχεῖς, εἰς τὸ κλειστὸν καὶ φραγμένον χωρίον D τοῦ ἐπιπέδου ouv (**λεία ἐπιφάνεια**). Ἐπὶ πλέον ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ ὁρίζουσαι:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

δὲν μηδενίζονται συγχρόνως ἐπὶ τοῦ D.

Ἔστω δὲ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐπιφάνεια φράσσεται ὑπὸ τοῦ λείου τόξου L.

Ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ πλέον τὴν πραγματικὴν συνάρτησιν $\Phi(M)=\Phi(x,y,z)$ ὡρισμένην καὶ συνεχῆ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S.

Ἔστω $\mathcal{D}$ μία τυχοῦσα διαμέρισις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις τὴν χωρίζει εἰς τὰ τμήματα $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ἔχοντα ἀντιστοίχως ἐμβαδὰ $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω ἐπιφανειακῶν τμημάτων S_ρ, $\rho=1,2,\ldots,n$ λαμβάνομεν καὶ ἀπὸ ἕνα τυχὸν σημεῖον $N_\rho(x_\rho, y_\rho, z_\rho)$ καὶ ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα:

$$T_n = \sum_{\rho=1}^{n} \Phi(N_\rho)\cdot \Delta S_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} \Phi(x_\rho, y_\rho, z_\rho)\,\Delta S_\rho \qquad (2)$$

Τὸ (2) καλεῖται ***ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα*** ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πραγματικὴν συνάρτησιν $\Phi(M)$ καὶ τὴν διαμέρισιν $\mathcal{D}$.

Ἔστω $\delta(S_\rho)$ ἡ διάμετρος τοῦ τμήματος S_ρ (δηλ. ἡ διάμετρος τῆς ἐλαχίστης σφαίρας, ἥτις ἐγκλείει τὸ τμῆμα S_ρ).

<u>Ὁρισμὸς XII-1-1.</u> *Ἐὰν τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα T_n τείνῃ πρὸς ἕνα πεπερασμένον ὅριον καθὼς τὸ $\max\limits_{1\le\rho\le n}\delta(S_\rho)\longrightarrow 0$ (ὅτε καὶ $n\uparrow\infty$), τοῦτο τὸ*

ὅριον καλεῖται ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα α' εἴδους τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ ἐπί τῆς ἐπιφανείας S καί συμβολίζεται οὕτω: $\iint_S \Phi(M)ds$ ἤ $\iint_S \Phi(x,y,z)ds$.

Σχετικῶς ἰσχύει τό κάτωθι θεώρημα:

Θεώρημα XII-1-1. Ἔστω S μία λεία ἐπιφάνεια ὁριζομένη ὑπό τῶν ἐξισώσεων (1) καί $\Phi(x,y,z)$ μία φραγμένη συνάρτησις ὡρισμένη ἐπί τῆς S. Τότε ἔχομεν:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\,ds = \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v))\sqrt{E\cdot G - F^2}\,du\,dv,$$

ὅπου E, F, G ποσότητες ὡρισθεῖσαι εἰς τήν σελ. 296 ἤτοι: $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$, $G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$ καί $F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v$.

Τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει, ἐάν καί μόνον ἐάν, τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους ὑπάρχῃ.

Ἀπόδειξις: Χωρίζομεν τήν ἐπιφάνειαν S διά μιᾶς διαμερίσεως $\mathcal{D}$ εἰς n τό πλῆθος τμήματα S_ρ, $\rho=1,2,\dots,n$ μέ ἀντίστοιχα ἐμβαδά ΔS_ρ. Εἰς τήν διαμέρισιν $\mathcal{D}$ τῆς S ἀντιστοιχεῖ ἡ διαμέρισις Δ τοῦ χωρίου D μεταβολῆς τῶν u, v καί ἄς παραστήσωμεν διά $\Delta\sigma_\rho$ τά ἀντίστοιχα ἐμβαδά τῶν ὑποχωρίων D_ρ.

Θεωροῦμεν τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα:

$$T_n = \sum_{\rho=1}^{n} \Phi(x_\rho, y_\rho, z_\rho)\,\Delta S_\rho \qquad (1)$$

Ὑπάρχει σημεῖον $(u_\rho, v_\rho)\in D_\rho$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν: $x_\rho=\varphi(u_\rho,v_\rho)$, $y_\rho=f(u_\rho,v_\rho)$, $z_\rho=\sigma(u_\rho,v_\rho)$. Ἐξ ἄλλου τό ἐμβαδόν ΔS_ρ, ὡς γνωστόν (βλ. σελ. 298), θά παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Delta S_\rho = \iint_{D_\rho} \sqrt{E\cdot G - F^2}\,du\,dv \qquad (2)$$

ὅπου E, F, G ποσότητες ὡρισθεῖσαι εἰς τήν σελ. 296.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς, ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν:

$$\Delta S_\rho = \sqrt{E.G-F^2}\,\Big|_{(u_\rho^*, v_\rho^*)}\cdot\Delta\sigma_\rho \qquad (3),$$

ὅπου τό $(u_\rho^*, v_\rho^*)\in D_\rho$.

τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα (1), λόγῳ τῆς (3), γράφεται:

$$T_n = \sum_{\rho=1}^{n} \Phi\left(\varphi(u_\rho,v_\rho), f(u_\rho,v_\rho), \sigma(u_\rho,v_\rho)\right) \sqrt{E\cdot G-F^2}\Big|_{(u^*_\rho,v^*_\rho)} \cdot \Delta\sigma_\rho \qquad (4)$$

Ἀκολούθως θεωροῦμεν τό ἄθροισμα:

$$S_n = \sum_{\rho=1}^{n} \Phi\left(\varphi(u_\rho,v_\rho), f(u_\rho,v_\rho), \sigma(u_\rho,v_\rho)\right) \cdot \sqrt{E\cdot G-F^2}\Big|_{(u_\rho,v_\rho)} \cdot \Delta\sigma_\rho \qquad (5)$$

ὅπου $(u_\rho, v_\rho) \in D_\rho$.

Τό (5) εἶναι ἕνα ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_D \Phi\left(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)\right) \cdot \sqrt{E\cdot G-F^2}\, du\, dv \qquad (6)$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν E, F, G καί τῶν ὑποθέσεών μας, ἡ $\sqrt{E\cdot G-F^2}$ εἶναι μία συνεχής συνάρτησις τῶν u, v ἐπί τοῦ κλειστοῦ καί φραγμένου συνόλου D, ὡς ἐκ τούτου θά εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ. Ἤτοι διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἀριθμός $\delta_1(\varepsilon)>0$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\left| \sqrt{E\cdot G-F^2}\Big|_{(u_\rho,v_\rho)} - \sqrt{E\cdot G-F^2}\Big|_{(u^*_\rho,v^*_\rho)} \right| < \varepsilon \qquad (7)$$

ὅταν $|u_\rho - u_\rho^*| < \delta_1(\varepsilon)$, $|v_\rho - v_\rho^*| < \delta_1(\varepsilon)$.

Ἐξ ὑποθέσεως ἡ $\Phi(x,y,z)$ εἶναι φραγμένη ἐπί τῆς S, συνεπῶς

$$|\Phi(x_\rho, y_\rho, z_\rho)| \leq k \quad (k>0).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (7) συνεπάγεται ἡ ἀνισότης:

$$|T_n - S_n| = \left| \sum_{\rho=1}^{n} \Phi(x_\rho, y_\rho, z_\rho) \left[\sqrt{E\cdot G-F^2}\Big|_{(u^*_\rho,v^*_\rho)} - \sqrt{E\cdot G-F^2}\Big|_{(u_\rho,v_\rho)} \right] \Delta\sigma_\rho \right|$$

$$\leq k\cdot\varepsilon\cdot \sum_{\rho=1}^{n} \Delta\sigma_\rho = k\cdot\varepsilon\cdot\sigma \quad (8)$$ (ἔνθα σ τό ἐμβαδόν τοῦ D).

Ἤδη ἐάν τό ὁλοκλήρωμα (6) ὑπάρχῃ, τότε διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀριθμός $\delta_2(\varepsilon)>0$ τοιοῦτος ὥστε, ἐάν θεωρήσωμεν μίαν διαμέρισιν Δ τοῦ χωρίου D

μέ $\max\limits_{1\le p\le n} \delta(D_p) < \delta_2(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν:

$$\left| \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E\cdot G-F^2}\, du\, dv - S_n \right| < \varepsilon \quad (9)$$

Ἔστω $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$ καί θεωροῦμεν τήν διαμέρισιν τῆς ἐπιφανείας S μέ $\max\limits_{1\le p\le n} \delta(S_p) < \delta_3$. Προφανῶς ἡ διάμετρος ἑκάστου στοιχείου D_p τῆς Δ εἶναι μικροτέρα τοῦ δ_3.

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\left| \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E\cdot G-F^2}\, du\, dv - T_n \right|$$

$$= \left| \iint_D \Phi(\varphi, f, \sigma) \sqrt{E\cdot G-F^2}\, du\, dv - S_n + (S_n - T_n) \right|$$

$$\le \left| \iint_D \Phi(\varphi, f, \sigma) \cdot \sqrt{E\cdot G-F^2}\, du\, dv - S_n \right| + \left| S_n - T_n \right|$$

$$< \varepsilon + k\cdot\varepsilon\cdot\sigma = \varepsilon(1+k\cdot\sigma) \quad (10),$$ διά κάθε $\varepsilon > 0$.

Ὅθεν, $$\lim_{\substack{\max\delta(D_p)\to 0\\ 1\le p\le n}} T_n = \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E\cdot G-F^2}\, du\, dv \quad (11)$$

Κατά τόν ὁρισμόν τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι:

$$\lim_{\substack{\max\delta(D_p)\to 0\\ 1\le p\le n}} T_n = \iint_S \Phi(x,y,z)\, ds \quad (12)$$

Ἐκ τῶν (11) καί (12) λαμβάνομεν:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\, ds = \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E G-F^2}\, du\, dv.$$

§2. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

I. Ἐάν ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$r(u,v) = \varphi(u,v)\, i + f(u,v)\, j + \sigma(u,v)\, k$$

τότε, $$r_u(u,v) = \varphi_u(u,v)\, i + f_u(u,v)\, j + \sigma_u(u,v)\, k$$

$$r_v(u,v) = \varphi_v(u,v)\, i + f_v(u,v)\, j + \sigma_v(u,v)\, k.$$

Εἶναι δέ: $\tau_u \times \tau_v = \vec{n}(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi_u & f_u & \sigma_u \\ \varphi_v & f_v & \sigma_v \end{vmatrix} = (f_u\sigma_v - f_v\sigma_u)\, i +$

$$+ (\sigma_u\varphi_v - \varphi_u\sigma_v)\, j + (\varphi_u f_v - f_u\varphi_v)\, k$$

Ὅθεν: $|\tau_u \times \tau_v|^2 = |\vec{n}(u,v)|^2 = (f_u\sigma_v - f_v\sigma_u)^2 + (\sigma_u\varphi_v - \varphi_u\sigma_v)^2 + (\varphi_u f_v - f_u\varphi_v)^2$.

Ἐφαρμόζοντες τήν ταυτότητα τοῦ Lagrange ἔχομεν:

$$|\vec{n}(u,v)|^2 = (\varphi_u^2 + f_u^2 + \sigma_u^2)\cdot(\varphi_v^2 + f_v^2 + \sigma_v^2) - (\varphi_u\varphi_v + f_u f_v + \sigma_u\sigma_v)^2 = E\cdot G - F^2$$

διότι, $E = \varphi_u^2 + f_u^2 + \sigma_u^2$, $G = \varphi_v^2 + f_v^2 + \sigma_v^2$, $F = \varphi_u\varphi_v + f_u f_v + \sigma_u\cdot\sigma_v$.

Ἄρα: $$|\vec{n}(u,v)| = \sqrt{E\cdot G - F^2}\ .$$

Τό θεώρημα XII-1-1 εὐφράζεται καί ὑπό τοῦ τύπου:

$$\boxed{\iint_S \Phi(x,y,z)\,ds = \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v))\,|\tau_u \times \tau_v|\,du\,dv} \qquad (1)$$

II. Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια S ἔχῃ τήν ἐξίσωσιν $z = f(x,y)$, ὅπου $(x,y) \in D$, τότε δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ταύτην ἔχουσα τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις:

$$x = u,\ \ y = v,\ \ z = f(u,v).$$

Εἶναι δέ:

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1 + 0 + f_u^2 = 1 + f_u^2$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 0 + 1 + f_v^2 = 1 + f_v^2$$

$$F = x_u\cdot x_v + y_u\cdot y_v + z_u\cdot z_v = f_u\cdot f_v$$

Ὅτε: $$\sqrt{E\cdot G - F^2} = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\ .$$

Συνεπῶς:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\,ds = \iint_D \Phi(u,v,f(u,v))\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\,du\,dv.$$

Ἤ θεωροῦντες εἰς τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα εἰς τήν θέσιν τῶν u,v τά x,y ἔχομεν:

$$\boxed{\iint_S \Phi(x,y,z)\,ds = \iint_D \Phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy.} \qquad (2)$$

III. Ἐάν $\Phi(x,y,z)=1$, ἐκ τοῦ τύπου τοῦ θεωρήματος XII−1−1, λαμβάνομεν:

$$\iint_S ds = \iint_D \sqrt{E\cdot G - F^2}\, du dv \qquad (3)$$

Τό πρῶτον μέλος τοῦ τύπου (3) μᾶς δίδει, ὡς γνωστόν, τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας S, ἡ ὁποία ἔχει ἐξισώσεις τάς: $x=\varphi(u,v)$, $y=f(u,v)$, $z=\sigma(u,v)$, ὅπου $(u,v)\in D$.

Ὅθεν:

$$\boxed{\text{Ἐμβ}.S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\, du dv} \qquad (4)$$

Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια ἔχῃ ἐξίσωσιν $z=f(x,y)$ καί $\Phi(x,y,z)=1$, τότε ἐκ τοῦ τύπου (2) λαμβάνομεν:

$$\boxed{\text{Ἐμβ}.S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx dy} \qquad (5)$$

Ὁ τύπος (5) ἔχει ἐξ ἄλλου εὑρεθῆ εἰς τήν σελ. 192.

Ἐάν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δίδεται ὑπό τήν πεπλεγμένην μορφήν $F(x,y,z)=0$ ἀντί τῆς $z=f(x,y)$· διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἐμβαδοῦ της ἀκολουθεῖται ἡ κάτωθι πορεία:

Ἔστω ὅτι πληροῦνται διά τήν $F(x,y,z)$ αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων καί ἔστω $F_z>0$ καί ἔστω $z=z(x,y)$ ἡ ἐπιλύουσα αὐτῆς.

Ὡς γνωστόν θά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Ὁ τύπος (5) γράφεται:

$$\text{Ἐμβ}.S = \iint_D \sqrt{1+\frac{F_x^2}{F_z^2}+\frac{F_y^2}{F_z^2}}\, dx dy \qquad \text{ἤ}$$

$$\boxed{\text{Ἐμβ}.S = \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{F_z}\, dx dy} \qquad (6)$$

Ἐάν $F_z<0$ τότε $\text{Ἐμβ}S = -\iint_S \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{F_z}\, dx dy$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (4) καί ὅτι $\sqrt{EG-F^2}=|r_u \times r_v|$ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας S ἐκφράζεται καί οὕτω:

$$\text{Ἐμβ. } S = \iint_D |r_u \times r_v|\, du dv \qquad (7)$$

IV. Ἐάν ἡ $\Phi(x,y,z)$ εἶναι συνεχής ἐπί τῆς ἐπιφανείας S καί ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι λεία, τότε αἱ $x=\varphi(u,v)$, $y=f(u,v)$, $z=\sigma(u,v)$ εἶναι συνεχεῖς καί μέ μερικάς παραγώγους ὡς πρός u καί v $1^{ης}$ τάξεως συνεχεῖς διά $(u,v)\in D$. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι, ἡ $\Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v))\sqrt{E\cdot G-F^2}$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ D, ἄρα καί ὁλοκληρώσιμος ἐπ' αὐτοῦ.

Ὅθεν ὑπάρχει τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_S \Phi(x,y,z)\, ds$.

V. Ἐάν ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς συναρτήσεως $\Phi(x,y,z)$ γίνεται ἐπί τῆς κλειστῆς ἐπιφανείας S, τότε τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα τῆς Φ θά τό συμβολίζωμεν οὕτω:

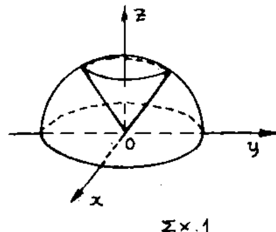
$$\oiint_S \Phi(x,y,z)\, ds.$$

<u>**Ἐφαρμογαί**</u> 1η/. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα: $\iint_S (y^2+z^2)\, ds$, ὅπου S εἶναι τό τμῆμα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ τό ἀποκοπτόμενον ὑπό τοῦ κώνου $z^2=x^2+y^2$.

<u>Λύσις</u>: Χρησιμοποιοῦντες σφαιρικάς συντεταγμένας διά τήν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ τμήματος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας S ἔχομεν:

$$x=\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta,\quad y=\eta\mu\varphi\,\eta\mu\theta,\quad z=\sigma\upsilon\nu\varphi,$$

ὅπου $0\le\theta<2\pi$ καί $0\le\varphi<\pi/2$. Ἐπειδή τό σύνορον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας θά κεῖται καί ἐπί τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας θά πρέπει νά ἔχωμεν:



Σχ. 1

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta \quad \text{ἤ}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\varphi, \text{ ἐξ ἧς } \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Ὅθεν: $D=\{(\theta,\varphi) : 0\le\theta<2\pi \text{ καί } 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\}$ (βλ. Σχ. 1).

Εἶναι λοιπόν $\iint_S (y^2+z^2)ds = \iint_D (\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\varphi)\sqrt{E\cdot G - F^2}\,d\varphi\,d\theta \quad (1)$

Εἶναι δέ: $E = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = \sigma\upsilon\nu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta + \eta\mu^2\varphi = 1$

$G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = \eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta + \eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\theta = \eta\mu^2\varphi$

$F = x_\varphi x_\theta + y_\varphi y_\theta + z_\varphi z_\theta = -\sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta + 0 = 0.$

Ὅθεν: $\sqrt{E\cdot G - F^2} = \eta\mu\,\varphi.$

Ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$\iint_S (y^2+z^2)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} (\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\varphi)\,\eta\mu\varphi\,d\theta$$

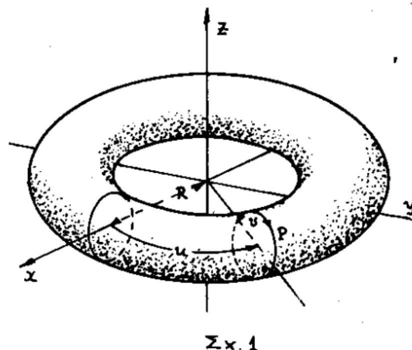
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\eta\mu^2\varphi + 2\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi)\,\eta\mu\varphi\,d\varphi$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sigma\upsilon\nu^2\varphi)\,\eta\mu\varphi\,d\varphi$$

$$= \pi\left[-\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}\,(16-7\sqrt{2}).$$

2ον/ Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας τύπου σαμπρέλλας, τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R-\sigma\upsilon\nu\upsilon)\,\sigma\upsilon\nu u \\ y &= (R-\sigma\upsilon\nu\upsilon)\,\eta\mu u \\ z &= \eta\mu\upsilon \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -\pi \le u \le \pi \\ -\pi \le \upsilon \le \pi \\ R > 1 \end{aligned}$$



Σχ. 1

__Λύσις__: Πρός τοῦτοις θά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (7), ἤτοι:

$$S = \iint_D |\tau_u \times \tau_\upsilon|\,du\,d\upsilon.$$

Εἶναι: $\tau_u = -(R-\sigma\upsilon\nu\upsilon)\,\eta\mu u\cdot i + (R-\sigma\upsilon\nu\upsilon)\,\sigma\upsilon\nu u\cdot j + 0k$

$\tau_\upsilon = \eta\mu\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu u\; i + \eta\mu\upsilon\,\eta\mu u\, j + \sigma\upsilon\nu\upsilon\cdot k.$

Δι' ἑνός ἁπλοῦ ὑπολογισμοῦ εὑρίσκομεν:

$$|\tau_u \times \tau_\upsilon| = (R-\sigma\upsilon\nu\upsilon)$$

Ὅθεν: $S = \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} (R-\sigma\upsilon\nu\upsilon)\,d\upsilon = 4\pi^2 R.$

§ 3. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

Μέ τήν βοήθειαν τῶν ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τήν μᾶζαν, τάς συντεταγμένας τοῦ κ.β. καθώς καί τήν ροπήν ἀδρανείας μιᾶς μάζης, ἡ ὁποία εἶναι κατανεμημένη ἐπί μιᾶς ὑλικῆς ἐπιφανείας.

Κατ' ἀρχάς ὁρίζομεν ὡς ἐπιφανειακήν πυκνότητα $\delta(x,y,z)$ εἰς τό σημεῖον $M(x,y,z)$ τῆς ἐπιφανείας τό ὅριον:

$$\delta(x,y,z) = \lim_{\Delta S \downarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS},$$ ἔνθα m ἡ μᾶζα τῆς ὑλικῆς ἐπιφανείας.

I. Ἡ μᾶζα m ἡ ὁποία εἶναι κατανεμημένη ἐπί τῆς ἐπιφανείας S παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$m = \iint_S \delta(x,y,z)\, ds.$$

II. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κ.β. τῆς ὑλικῆς ἐπιφανείας δίδονται ὑπό τῶν τύπων:

$$x_k = \frac{\iint_S x\delta(x,y,z)\,ds}{\iint_S \delta(x,y,z)\,ds}, \quad y_k = \frac{\iint_S y\delta(x,y,z)\,ds}{\iint_S \delta(x,y,z)\,ds}, \quad z_k = \frac{\iint_S z\delta(x,y,z)\,ds}{\iint_S \delta(x,y,z)\,ds}.$$

Εἰδικῶς, διά ὁμογενῆ ἐπιφάνειαν ἔχομεν:

$$x_k = \frac{\iint_S x\,ds}{\iint_S ds}, \quad y_k = \frac{\iint_S y\,ds}{\iint_S ds}, \quad z_k = \frac{\iint_S z\,ds}{\iint_S ds}.$$

III. Ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς S ὡς πρός τόν ἄξονα z εἶναι:

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,ds.$$

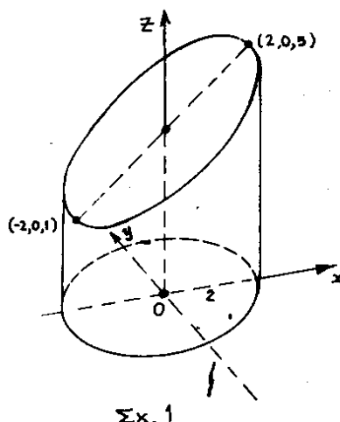
Ἀναλόγως εὑρίσκονται καί αἱ ροπαί ἀδρανείας I_x, I_y.

Ὡς πρός τό ἐπίπεδον oxy ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς ἐπιφανείας S θά εἶναι $I_{xy} = \iint_S z^2\delta(x,y,z)\,ds$. Προφανῶς $I_z = I_{yz} + I_{zx}$.

Ἐφαρμογή Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρός τό ἐπίπεδον oxy ὑλικῆς ἐπιφανείας S μέ $\delta(x,y,z)=1$, ἥτις περιορίζεται ὑπό τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2=4$ καί τῶν ἐπιπέδων $z=0$ καί $z=x+3$.

Λύσις: Ὁ τύπος ὁ διδων τήν ῥοπήν ἀδρανείας ὡς πρός τό ἐπίπεδον oxy τῆς ἐν λόγῳ ὑλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$I_{xy}=\iint_S z^2 ds \quad (1)$$



Σx. 1

Διά τήν ἀναλυτικήν παράστασιν τῆς ἐπιφανείας χρησιμοποιοῦμεν κυλινδρικάς συντεταγμένας, ἤτοι: $x=2\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=2\eta\mu\theta$, $z=z$, ὅπου $-\pi\leq\theta\leq\pi$ καί $0\leq z\leq 3+2\sigma\upsilon\nu\theta$ (βλ. Σx. 1).

Εἶναι δέ, $x_\theta=-2\eta\mu\theta$, $y_\theta=2\sigma\upsilon\nu\theta$, $z_\theta=0$

$$x_z=0,\ y_z=0,\ z_z=1.$$

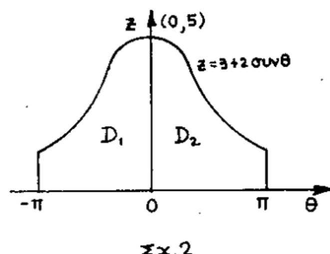
Ὅτε:
$$E=x_\theta^2+y_\theta^2+z_\theta^2=4$$
$$G=x_z^2+y_z^2+z_z^2=1$$
$$F=x_\theta\cdot x_z+y_\theta\cdot y_z+z_\theta\cdot z_z=0.$$

Συνεπῶς: $\sqrt{E\cdot G-F^2}=2$.

Εἶναι λοιπόν, $\iint_S z^2 ds=2\cdot\iint_D z^2 dz d\theta$

$$=2\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{3+2\sigma\upsilon\nu\theta}z^2dz=\frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\pi}(3+2\sigma\upsilon\nu\theta)^3d\theta=60\pi.$$

Διά τό χωρίον D μεταβολῆς τῶν (θ,z) βλ. Σx. 2.



Σx. 2

§ 4. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ.

I. Ἔστω ἡ λεία ἐπιφάνεια S τῆς ὁποίας ἡ διανυσματική ἐξίσωσις εἶναι $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, ὅπου $(u,v)\in D$. Ὑποθέτομεν ὅτι τό σύνορον (δ) τοῦ D εἶναι μία λεία καμπύλη.

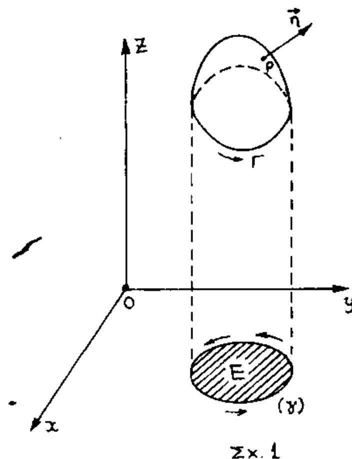
Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι λεία, τό ἐξωτερικόν γινόμενον $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\neq\mathbf{0}$ διά κάθε

$(u,v)\in D$. Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά ὡρίσωμεν τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα $\vec{\eta}$[1] τῆς ἐπιφανείας εἰς κάθε σημεῖον P αὐτῆς ὑπό τοῦ τύπου: $\vec{\eta}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$ (1) διά $(u,v)\in D$. Ἐπειδή ἐπί τῆς καθέτου ὑπάρχουν δύο φοραί ἐκλέγομεν τήν μίαν ἐξ αὐτῶν αὐθαιρέτως ὡς φοράν τοῦ μοναδιαίου καθέτου διανύσματος $\vec{\eta}$.

Θά λέγωμεν ὅτι μία λεία ἐπιφάνεια S εἶναι προσανατολίσιμος, ἐάν τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα $\vec{\eta}(\rho)$, ὡς ὡρίσθη ὑπό τοῦ τύπου (1), εἶναι μία συνεχής συνάρτησις τοῦ P ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας.

Ὅθεν, κάθε λεῖο τμῆμα τῆς ἐπιφανείας S εἶναι προσανατολίσιμον. Ἐάν $\vec{\eta}$ εἶναι τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα ἐπί τήν ἐπιφάνειαν, τότε τό $-\vec{\eta}$ εἶναι τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα τῆς ἀντιθέτου φορᾶς. Συνεπῶς κάθε προσανατολίσιμος ἐπιφάνεια ἔχει δύο δυνατούς προσανατολισμούς ἐν σχέσει μέ τό $\vec{\eta}$.

Καλοῦμεν *θετικήν ὄψιν* μιᾶς προσανατολίσιμου ἐπιφανείας ὡς πρός τό ἐπίπεδον Oxy, αὐτήν πρός τό μέρος τῆς ὁποίας εὑρισκόμενον τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα $\vec{\eta}$, σχηματίζει μετά τοῦ ἄξονος Oz ὀξεῖαν γωνίαν (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

Ἐπίσης καλοῦμεν *ἀρνητικήν ὄψιν* μιᾶς προσανατολισίμου ἐπιφανείας ὡς πρός τό ἐπίπεδον Oxy, αὐτήν πρός τό μέρος τῆς ὁποίας εὑρισκόμενον τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα $\vec{\eta}$, σχηματίζει μετά τοῦ ἄξονος Oz ἀμβλεῖαν γωνίαν.

Ὁρισθείσης τῆς μιᾶς ὄψεως ἐπιφανείας, τότε αὐτομάτως ὁρίζεται καί ἡ ἄλλη.

Ἰδιαιτέρως πρέπει νά προσέξωμε, ὅτι ὁ καθορισμός τῆς ὄψεως μιᾶς ἐπιφανείας ἐξαρτᾶται ἀπό τόν καθορισμόν τῆς φορᾶς τοῦ μοναδιαίου καθέτου διανύσματος $\vec{\eta}$, καθότι ἐπί τῆς διευθύνσεως τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας ὑπάρχουν δύο ἀντίθετοι φοραί.

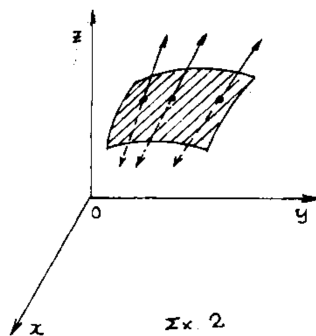
Αἱ ἐπιφάνειαι τάς ὁποίας δυνάμεθα νά προσανατολίσωμεν καλοῦνται *δίπλευροι ἐπιφάνειαι* ἐν ἀντιθέσει μέ τάς μή προσανατολισίμους αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *μονόπλευροι*.

Παραδείγματα 1ον/. Τό ἐπίπεδον εἶναι ἕνα χαρακτηριστικόν παράδειγμα διπλεύρου ἐπιφανείας

---

(1) *Θά συμβολίσωμεν τοῦτο μέ $\vec{\eta}$ ἐν ἀντιθέσει πρός τόν συμβολισμόν μέ N πού ἐχρησιμοποιήθη εἰς τήν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν.*

2ον/ Κάθε λεία ἐπιφάνεια διδομένη ὑπό τῆς ἐξισώσεως $z=f(x,y)$ εἶναι μία δίπλευρος ἐπιφάνεια (βλ. Σχ. 2).

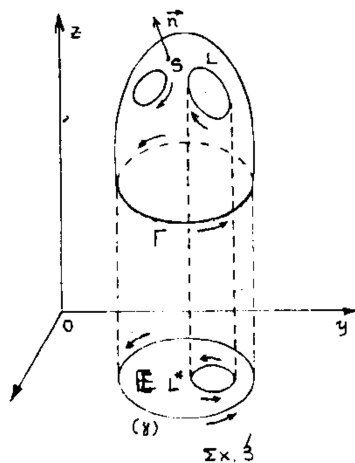


3ον/ α) Θεωροῦντες τήν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$ ἡ ἄνω θετική ὄψις εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας τό $\vec{n}$ κατευθύνεται πρός τά ἔξω τῆς σφαίρας, ἐνῶ ἡ κάτω ἤ ἀρνητική ὄψις εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας τό $-\vec{n}$ κατευθύνεται πρός τό κέντρον τῆς σφαίρας.[1]

β) Θεωροῦντες τήν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\leq 0$ ἡ ἄνω ἤ θετική ὄψις εἶναι ἐκείνη, ὅπου τό $\vec{n}$ κατευθύνεται πρός τό κέντρον τῆς σφαίρας, ἐνῶ ἡ κάτω ἤ ἀρνητική ὄψις εἶναι ἐκείνη ὅπου τό $-\vec{n}$ κατευθύνεται πρός τά ἔξω τῆς σφαίρας.

4ον/ Κάθε κλειστή ἐπιφάνεια ἥτις χωρίζεται εἰς δύο «ἴσα» μέρη εἶναι μία δίπλευρος ἐπιφάνεια, ὅπως τό ἐλλειψοειδές κ.τ.λ.

• Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια S ἡ ὁποία φράσσεται ὑπό τῆς ἁπλῆς καμπύλης (Γ) (περίγραμμα τῆς S). Ὁ προσανατολισμός τῆς (Γ) εἰσάγεται ὡς ἀκολούθως. Ἔστω (γ) ἡ προβολή τῆς (Γ) εἰς τό ἐπίπεδον xoy. Ὡς γνωστόν ἡ καμπύλη (Γ) δύναται νά διαγραφῇ κατά δύο ἔννοιες. Ἡ ἔννοια διαγραφῆς πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν θετικήν ὄψιν τῆς ἐπιφανείας (βλ. Σχ. 3) εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ αὐτή πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν διαγραφήν τῆς (γ) κατά τήν θετικήν φοράν δηλ. ἀντίθετον πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καί θά λέγωμεν τότε ὅτι ἡ (Γ) εἶναι



<u>θετικῶς προσανατολισμένη</u>. Εἰς τήν ἀρνητικήν ὄψιν τῆς ἐπιφανείας ἀντιστοιχοῦν ἐξ ὁρισμοῦ ἡ ἀντίθετη ἔννοια διαγραφῆς τῆς (Γ) ἐν σχέσει μέ τ' ἀνωτέρω καί θά λέγωμεν τότε, ὅτι ἡ (Γ) εἶναι *ἀρνητικῶς προσανατολισμένη*. Ἐάν E εἶναι τό χωρίον

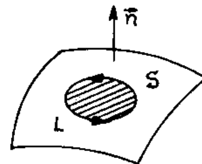
[1] *Ὁριοθείσης προφανῶς ὡς θετικῆς φορᾶς τοῦ $\vec{n}$, εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν, τήν ἐκ τοῦ κέντρου πρός τήν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας,*

τό περιυλειόμενον ὑπό τῆς (γ) τότε αὐτομάτως ὁρίζεται καί ὁ προσανατολισμός τοῦ E ἐν σχέσει μέ τόν τρόπον διαγραφῆς τῆς (γ) δηλ. εἰς θετικόν ἤ ἀρνητικόν.

Ἐάν L εἶναι μία αὐθαίρετος κλειστή καμπύλη φράσσουσα ἕνα τμῆμα τῆς προσανατολισμένης ἐπιφανείας S, ὁ θετικός προσανατολισμός διαγραφῆς τῆς καμπύλης ἐν σχέσει μέ τόν προσανατολισμόν τῆς S ἐκλέγεται πάλιν κατά ἀνάλογον τρόπον πού ἐκθέσαμεν ἀνωτέρω.

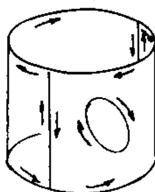
Ἀναλυτικώτερα (βλ. σχετ. καί Σχ. 4)

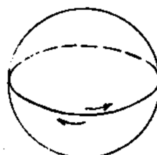
Ἐάν θεωρήσωμεν τήν προβολήν L^* τῆς L ἐπί τό ἐπίπεδον oxy ἡ θετική φορά διαγραφῆς τῆς L εἶναι τοιαύτη, ὥστε τά προβαλόμενα σημεῖα τῆς L ἐπί τό xoy νά διαγράφουν τήν L^* κατά τήν θετικήν φοράν διαγραφῆς αὐτῆς, δηλ. ἀντίθετον πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

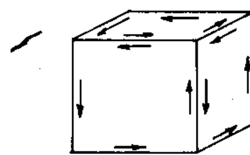


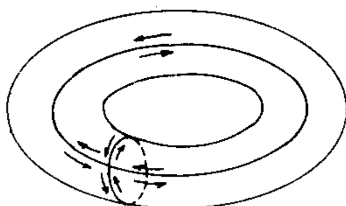
Σχ. 4

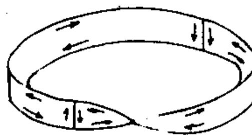
Τά κατωτέρω σχήματα δεικνύουν τόν τρόπον προσανατολισμοῦ τοῦ περιγράμματος (συνόρου) τῶν ἐπιφανειῶν.

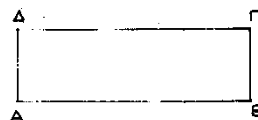

Σχ. 5


Σχ. 6


Σχ. 7


Σχ. 8


Σχ. 9



Σχ. 9′

Παρατήρησις: Ἕνα χαρακτηριστικόν παράδειγμα ἐπιφανείας μέ μίαν ὄψιν μονόπλευρον εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Möbius.

Δέν θά δώσωμεν τήν ἀναλυτικήν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἀλλά δι' ἑνός πρακτικοῦ τρόπου θά ἴδωμεν πῶς κατασκευάζεται αὐτή (διά τήν ἐξίσωσιν ταύτης

βλ. Advanced Calculus, R. GREIGTON BUCK éd Mc GRAW-HILL, 1956, σελ. 282).

Πρός τούτοις, (βλ. Σχ 9) μέ κατάλληλη στροφή καί στρέψη φέρομεν εἰς σύμπτωσιν τάς πλευράς ΒΓ καί ΔΑ τῆς χάρτινης ὀρθογωνιακῆς λωρίδος ΑΒΓΔ (βλ. Σχ. 9΄) οὕτως, ὥστε ἡ κορυφή Β νά ταυτισθῇ μέ τήν Δ καί ἡ κορυφή Γ μέ τήν Α. Ἔχομεν οὕτω ἐπιτύχει μίαν μονόπλευρον ἐπιφάνειαν.

§ 5. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ Β^{ου} ΕΙΔΟΥΣ

I Ἔστω μία λεία (ἤ τμηματικῶς λεία) καί προσανατολισμένη (δίπλευρος) ἐπιφάνεια S καί ἡ διανυσματική συνάρτησις:

$$\vec{F} = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)\cdot j + R(x,y,z)k \qquad (1)$$

ὡρισμένη καί συνεχής ἐπί τῆς S.

Ἔστω $\vec{n}$ τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας· τούτου τά διευθύνοντα συνημίτονα ἔστωσαν συνα, συνβ, συνγ, τό δέ ἐσωτερικόν γινόμενον $\vec{F}\cdot\vec{n} = P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma$ εἶναι μία συνεχής συνάρτησις τῶν x, y, z ἐπί τῆς ἐπιφανείας S.

<u>Ὁρισμός XIII-5-1</u>. *Καλοῦμεν ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα β^{ου} εἴδους τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως* $\vec{F}(P, Q, R)$ *ἐπί τῆς λείας ἐπιφανείας* S *καί τό συμβολίζομεν οὕτω:* $\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ *τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα α^{ου} εἴδους τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως* $\vec{F}\cdot\vec{n}$ *ἐπί τῆς* S, *ἤτοι:*

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \underset{\text{Sp}}{=} \iint_S \left[P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma\right] dS \quad (2)$$

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \underset{\text{Sp}}{=} \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds \quad (2')$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1ον/. Τό $\vec{F}\cdot\vec{n}$ παριστᾷ τό μέτρον τῆς προβολῆς τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F}$ ἐπί τῆς διευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\vec{n}$.

2ον/ Τό ds εἶναι τό ἀπειροστόν ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας S αἱ δέ ἐκφράσεις συνα·ds, συνβ·ds, συνγ·ds, εἶναι, ἀντιστοίχως, τά ἐμβαδά τῶν προβολῶν τοῦ στοιχείου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἔχοντος ἐμβαδόν ds εἰς τά ἐπίπεδα oyz, ozx, oxy.

Αὐτό δικαιολογεῖ διατί παριστῶμεν αὐτάς τάς προβολάς τῶν ἀνωτέρω ἐπιπέδων διά τῶν $dydz$, $dzdx$, $dxdy$.

ΙΙ. Ὁ ὑπολογισμός τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος βου εἴδους ἀνάγεται εἰς τόν ὑπολογισμόν τῶν κάτωθι ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων αου εἴδους, ἤτοι τῶν:

$$\iint_S P\,\text{συν}\alpha\, ds, \quad \iint_S Q\,\text{συν}\beta\, ds, \quad \iint_S R\,\text{συν}\gamma\, ds.$$

Ἄς θεωρήσωμεν, π.χ., τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_S R\,\text{συν}\gamma \cdot ds \qquad (3)$$

καί ἔστω ὅτι αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας εἶναι $x=\varphi(u,v)$, $y=f(u,v)$, $z=\sigma(u,v)$, $(u,v)\in D$. Ὡς γνωστόν τό (3) μετασχηματίζεται εἰς τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_D R(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v))\,\text{συν}(\vec{n},\vec{k})\cdot\sqrt{E\cdot G-F^2}\,du\,dv \qquad (4)$$

Ἐπειδή εἶναι: $\text{συν}\gamma = \dfrac{1}{\pm\sqrt{EG-F^2}}\cdot\dfrac{D(\varphi,f)}{D(u,v)}$ (5) [6ει(294)] 6ει 297, (8)

τό ὁλοκλήρωμα (3), λόγῳ τῶν (4) καί (5), γράφεται:

$$\boxed{\iint_S R\,\text{συν}\gamma\, ds = \pm\iint_D R(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v))\,\frac{D(\varphi,f)}{D(u,v)}\,du\,dv} \qquad (6),$$

ὅπου τό + λαμβάνεται ὅταν ἡ ἐπιφάνεια S καί τό πεδίον D ἔχουν τόν αὐτόν προσανατολισμόν καί τό − ὅταν ἔχουν ἀντίθετον προσανατολισμόν.

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν τούς τύπους:

$$\iint_S Q\,\text{συν}\beta\, ds = \pm\iint_D Q(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v))\,\frac{D(\sigma,\varphi)}{D(u,v)}\,du\,dv \qquad (7)$$

$$\iint_S P\,\text{συν}\alpha\, ds = \pm\iint_D P(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v))\,\frac{D(f,\sigma)}{D(u,v)}\,du\,dv \qquad (8)$$

Οἱ τύποι (6), (7) καί (8) διά προσθέσεως μᾶς δίδουν:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \pm\iint_D \left[P\cdot\frac{D(f,\sigma)}{D(u,v)} + Q\frac{D(\sigma,\varphi)}{D(u,v)} + R\frac{D(\varphi,f)}{D(u,v)}\right]du\,dv \qquad (9)$$

ὅπου ἐτέθη:

$$P = P\;(\varphi(u,v),\, f(u,v),\, \sigma(u,v))$$
$$Q = Q\;(\varphi(u,v),\, f(u,v),\, \sigma(u,v))$$
$$R = R\;(\varphi(u,v),\, f(u,v),\, \sigma(u,v)).$$

III. Ἐάν ἡ λεία ἐπιφάνεια περιορίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως $z = z(x,y)$, διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος, ἔστω τοῦ ὁλοκληρώματος:

$$\iint_S R(x,y,z)\,\sigma\upsilon\nu\gamma\,ds$$

ἀρκεῖ νά λάβωμεν ὡς παραμετρικάς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας τάς $x=x$, $y=y$, $z=z(x,y)$. Τότε θά ἔχωμεν:

$$\frac{D(x,y)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} x_x & y_x \\ x_y & y_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Συνεπῶς ὁ τύπος (6) γράφεται:

$$\iint_S R\,\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot ds = \iint_{D_1} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy \qquad (10)$$

ὅπου τό D_1 εἶναι ἡ προβολή ἐπί τό οxy τῆς ἐπιφανείας S.

Ἐάν τό ὁλοκλήρωμα ληφθῇ ἐπί τῆς κάτω ὄψεως τῆς ἐπιφανείας, τότε:

$$\iint_S R\,\sigma\upsilon\nu\gamma\,ds = -\iint_{D_1} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy \qquad (10')$$

Ἀναλόγως ἐξάγονται καί οἱ τύποι:

$$\iint_S P\,\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot ds = \pm\iint_{D_2} P(x(y,z),y,z)\,dy\,dz \qquad (11)$$

$$\iint_S Q\,\sigma\upsilon\nu\beta\cdot ds = \pm\iint_{D_3} Q(x,y(z,x),z)\,dz\,dx \qquad (12)$$

ὅπου ἡ ἐπιφάνεια S ἔχει τήν ἐξίσωσιν $x=x(y,z)$ διά τό ὁλοκλήρωμα (11) καί τήν ἐξίσωσιν $y=y(z,x)$ διά τό ὁλοκλήρωμα (12). Τό + λαμβάνεται ὅταν ἡ κάθετος $\vec{n}$ ἐπί τήν ἐπιφάνειαν $x=x(y,z)$ σχηματίζῃ ὀξεῖαν γωνίαν μέ τόν ox καί το − ὅταν σχηματίζῃ ἀμβλεῖαν γωνίαν. Ἀνάλογος καθορισμός τῶν ± γίνεται καί διά τό ὁλοκλήρωμα (12). Τά σύμβολα D_2, D_3 παριστοῦν τάς προβολάς τῆς ἐπιφανείας S εἰς τό ἐπίπεδον oyz διά τό ὁλοκλήρωμα (11) καί εἰς τό ozx διά τό (12).

IV. Ἔστω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια S ἔχει τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις $x=\varphi(u,v)$, $y=f(u,v)$, $z=\sigma(u,v)$, $(u,v)\in D$. Ἔστω $\vec{n}$ τό μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα αὐτῆς καί ἔστω $\vec{n}$ (συνα, συνβ, συνγ). Ὡς γνωστόν θά εἶναι:

$$\text{συν}\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{E\cdot G-F^2}}\cdot\frac{D(f,\sigma)}{D(u,v)},\ \text{συν}\beta=\frac{1}{\pm\sqrt{E\cdot G-F^2}}\,\frac{D(\sigma,\varphi)}{D(u,v)},\ \text{συν}\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{E\cdot G-F^2}}\cdot\frac{D(\varphi,f)}{D(u,v)}.$$

Κατόπιν τούτου τό δεύτερον μέλος τοῦ τύπου (9) γίνεται:

$$\iint_D\left[P\cdot\frac{D(f,\sigma)}{D(u,v)}+Q\cdot\frac{D(\sigma,\varphi)}{D(u,v)}+R\cdot\frac{D(\varphi,f)}{D(u,v)}\right]\frac{1}{\sqrt{E\cdot G-F^2}}\cdot\sqrt{E\cdot G-F^2}\,du\,dv=$$

$$=\iint_D\vec{F}\cdot\vec{n}\cdot\sqrt{E\cdot G-F^2}\,du\,dv\quad(13),\ \text{ὅπου } \vec{F}=(P,Q,R).$$

Μελετῶμεν ἤδη τήν περίπτωσιν ὅπου εἶναι δυνατόν νά ἐκλέξωμεν ὡς καμπυλογράμμους συντεταγμένας u, v τάς καρτεσιανάς συντεταγμένας x, y. Τό D θά εἶναι τότε ἡ προβολή εἰς τό ἐπίπεδον oxy τῆς S καί κάθε παράλληλος πρός τόν oz θά τέμνῃ εἰς ἕνα τό πολύ σημεῖον τήν ἐπιφάνειαν S.

Ἐν προκειμένῳ θά ἔχωμεν:

$$\sqrt{E\cdot G-F^2}=\frac{1}{\text{συν}\gamma}=\frac{1}{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}.$$

Τό δέ ὁλοκλήρωμα (13) γράφεται:

$$\iint_D\vec{F}\cdot\vec{n}\cdot\frac{1}{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}\,dx\,dy.$$

Ὅθεν, ἐάν ἡ ἐπιφάνεια S ἔχῃ μίαν προβολήν D ἐπί τοῦ ἐπιπέδου oxy, τότε ἰσχύει:

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_D\vec{F}\cdot\vec{n}\cdot\frac{1}{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}\,dx\,dy\qquad(14)$$

Έστω $z=f(x,y)$ είναι ή εξίσωσις τής ανωτέρω επιφανείας είς Καρτεσιανάς συντεταγμένας και τής όποίας ή προβολή είς τό επίπεδον oxy είναι D.
Ώς γνωστόν έκ τής Γεωμετρίας (βλ. σελ. 294, τύπος (5)) έχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\ ,\quad \sigma\upsilon\nu\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\ ,\quad \sigma\upsilon\nu\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

Καί ό τύπος (14) διά τήν προσανατολισμένη επιφάνεια S γίνεται:

$$\boxed{\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\pm\iint_D\left[-P\cdot f_x-Q f_y+R\right]dxdy} \qquad (15)$$

Ό τύπος (15) είναι εύχρηστος όταν ή επιφάνεια έχη τήν εξίσωσιν $z=f(x,y)$, καθότι μετατρέπει ένα επιφανειακόν ολοκλήρωμα είς ένα διπλό τοιούτον. Άς σημειωθή ότι τό εμφανιζόμενον z είς τάς συναρτήσεις P, Q, R εκφράζεται, λόγω τής σχέσεως $z=f(x,y)$, συναρτήσει τών x,y.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά υπολογισθή τό επιφανειακόν ολοκλήρωμα:

$$\iint_S x\,dydz+y\,dzdx-2z\,dxdy,$$

όπου S είναι ή επιφάνεια τής σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$, ή όποία κείται άνω τού επιπέδου oxy.

<u>Λύσις</u>: Συμφώνως πρός τόν ορισμόν τού επιφανειακού ολοκληρώματος $\beta^{ου}$ είδους τό ανωτέρω ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I=\iint_S x\,dydz+y\,dzdx-2z\,dxdy=\iint_S\left[x\sigma\upsilon\nu\alpha+y\sigma\upsilon\nu\beta-2z\sigma\upsilon\nu\gamma\right]ds \qquad (1),$$

όπου συνα, συνβ, συνγ είναι τά διευθύνοντα συνημίτονα τής καθέτου $\vec{n}$ (τής όποίας υποθέτομεν ότι ή θετική φορά διευθύνεται πρός τό εξωτερικόν τής επιφανείας) μέ τούς άξονας ox, oy, oz. Είναι δέ: $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{x}{R}$, $\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{y}{R}$, $\sigma\upsilon\nu\gamma=\frac{z}{R}$, ότε ό τύπος (1) γράφεται:

$$I=\frac{1}{R}\iint_S\left[x^2+y^2-2z^2\right]ds \qquad (2).$$

Διά τόν υπολογισμόν τού ολοκληρώματος (2) ($\alpha^{ου}$ είδους) εφαρμόζομεν τό

Θεώρημα XII-1-1. Πρός τούτοις χρησιμοποιοῦμεν σφαιρικάς συντεταγμένας, ἤτοι:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = R\,\eta\mu\varphi\,\eta\mu\theta \\ z = R\,\sigma\upsilon\nu\varphi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}$$

Εὐκόλως δέ εὑρίσκομεν ὅτι, $\sqrt{EG-F^2} = R^2\eta\mu\varphi$, (βλ. σχετικῶς Ἐφαρμογή 1η, §2).
Τό (2) λοιπόν γράφεται:

$$I = \frac{1}{R}\iint_D R^2\left[\eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta - 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right]R^2\eta\mu\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

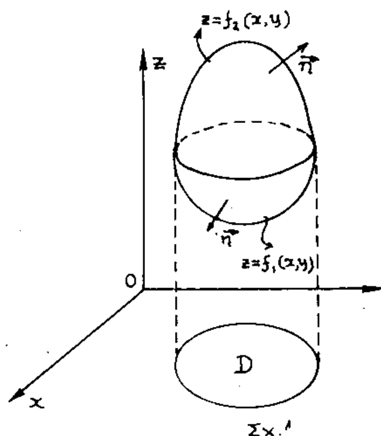
$$= R^3\iint_D\left[3\eta\mu^2\varphi - 2\right]\eta\mu\varphi\,d\varphi\,d\theta = 3R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^3\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta - 2R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta =$$

$$= 3R^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi - 2R^3\cdot 1\cdot 2\pi = 0\,.$$

§ 6. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ Β'' ΕΙΔΟΥΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ-ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

I. Ὄγκος στερεοῦ περικλειομένου ὑπό κλειστῆς ἐπιφανείας.

Θεωροῦμεν μίαν κλειστήν καί λείαν ἐπιφάνειαν S τεμνομένην εἰς δύο τό πολύ σημεῖα ὑπό ἑκάστης παραλλήλου πρός τόν ἄξονα oz καί τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα: $\oiint_S z\,\sigma\upsilon\nu\gamma\,ds$, ὅπου συνγ εἶναι τό συνημίτονον τοῦ καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν διανύσματος $\vec{n}$ μετά τοῦ ἄξονος Oz. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ θετική φορά τοῦ $\vec{n}$ κεῖται πρός τό ἐξωτερικόν τῆς ἐπιφανείας. Δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη S_1 καί S_2 κάτω μέρος καί ἄνω μέρος αὐτῆς ἔχοντα ἀντιστοίχως ἐξισώσεις $z=f_1(x,y)$ καί $z=f_2(x,y)$. Ἄς παραστήσωμεν διά τοῦ D τήν προβολήν τῆς ἀνωτέρω ἐπιφανείας εἰς τό ἐπίπεδον oxy (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

Έχομεν λοιπόν:

$$\oiint_S z\,\sigma\upsilon\nu\gamma\, ds = \iint_{S_2} z\,\sigma\upsilon\nu\gamma\, ds + \iint_{S_1} z\,\sigma\upsilon\nu\gamma\, ds \qquad (1)$$

Διά τό τμήμα S_2 τής έπιφανείας έχομεν:

$$dxdy = ds\,\sigma\upsilon\nu\gamma,\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \sigma\upsilon\nu\gamma > 0.$$

Διά τό τμήμα S_1 τής έπιφανείας έχομεν:

$$dxdy = -ds\,\sigma\upsilon\nu\gamma,\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \sigma\upsilon\nu\gamma < 0.$$

Έκ τού τύπου (1) λαμβάνομεν:

$$\oiint_S z\,\sigma\upsilon\nu\gamma\, ds = \iint_D f_2\, dxdy - \iint_D f_1\, dxdy \qquad (2).$$

Η διαφορά τών όλοκληρωμάτων τού δευτέρου μέλους τής (2) παριστᾶ προφανώς τόν όγκον τού στερεού τού περιοριζομένου ύπό τής άνωτέρω ώρισθείσης έπιφανείας S. Όθεν, ό όγκος V τού στερεού πού περικλείεται ύπό τής κλειστής έπιφανείας S, δίδεται ύπό τού τύπου:

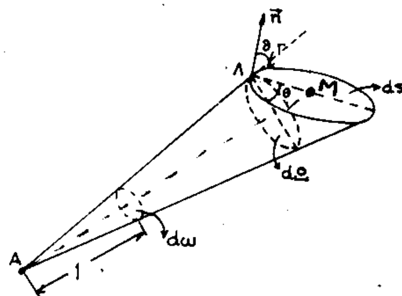
$$\boxed{V = \oiint_S z\,\sigma\upsilon\nu\gamma\, ds} \qquad (3)$$

II. Υπολογισμός τού μέτρου στερεάς γωνίας.

Μία συνήθης έπίπεδος γωνία μετρᾶται άπό τό μέτρον τού τόξου, τό όποίον αί πλευραί της άποκόπτουν άπό έναν μοναδιαίον κύκλον μέ κέντρον τήν κορυφήν τής γωνίας. Η γνώσις αύτη δύναται νά έπεκταθῇ καί είς μίαν στερεάν γωνίαν ή όποία περιορίζεται ύπό μιᾶς κωνικής έπιφανείας ώς άκολούθως: Τό μέτρον τής στερεᾶς γωνίας είναι, έξ όρισμού, ίσον πρός τό έμβαδόν τό όποίον άποκόπτεται έπί τής έπιφανείας τής μοναδιαίας σφαίρας, έχούσης κέντρον τήν κορυφήν τής στερεᾶς γωνίας, ύπό τής κωνικής έπιφανείας ήτις περιορίζει τήν στερεάν γωνίαν.

Ούτω τό μέτρον τής τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας ήτις όρίζεται ύπό τών άξόνων: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ είναι $\frac{4\pi \cdot 1^2}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη μίαν ἐπιφάνειαν S, ἥτις φράσσεται ὑπό τῆς κλειστῆς καμπύλης Γ καί ἕνα σταθερόν σημεῖον A κείμενον ἐκτός τῆς ἐπιφανείας S καί τῆς καμπύλης Γ. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ τό μέτρον τῆς στερεᾶς γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ὁδηγόν τήν καμπύλην Γ τῆς ἐπιφανείας S. Πρός τούτοις θεωροῦμεν ἕνα στοιχειῶδες ἐμβαδόν ds ἐπί τῆς ἐπιφανείας πέριξ τοῦ σημείου M (βλ. Σx. 1), τοῦτο δέ ὁρίζει μίαν στοιχειώδην κωνικήν ἐπιφάνειαν μέ κορυφήν τό σημεῖον A. Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν τήν μοναδιαῖαν σφαῖραν κέντρου A ἐπί τῆς ὁποίας ἡ κωνική ἐπιφάνεια ἀποκόπτει ἕνα ἐμβαδόν, ἔστω $d\omega$, τό ὁποῖον εἶναι τό μέτρον τῆς στοιχειώδους στερεᾶς γωνίας.



Σx. 1.

Ἔστω $\vec{n}$ τό μοναδιαῖον κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν S διάνυσμα εἰς τό σημεῖον Λ καί θ ἡ γωνία αὐτοῦ μετά τῆς ἀκτῖνος $\vec{A\Lambda}$. Ὡς γνωστόν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}|}$.
Ἐξ ἄλλου ἐάν ἐκ τοῦ σημείου Λ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τήν $\vec{AM}$, τότε ἐπειδή ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἔχουσα ἐμβαδόν ds εἶναι ἀπειροστή, δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἐπίπεδος καί ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἔχουσα ἐμβαδόν $d\Omega$ θεωρεῖται ὡς ἡ ὀρθή προβολή τῆς ds ἐπί τοῦ ἐπιπέδου της. Συνεπῶς θά ἔχωμεν:

$d\Omega = ds\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$ (1).

Ὡς γνωστόν, $\frac{d\omega}{d\Omega} = \frac{1}{r^2}$ (2), ὅπου $r = |\vec{r}|$. Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$d\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{r^2}\cdot ds \qquad (3)$$

Ὅθεν, τό μέτρον τῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι:

$$\boxed{\omega = \iint_S \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{r^2}\, ds} \qquad (4)$$

Ἡ στερεά γωνία εἶναι θετική ἤ ἀρνητική, καθ' ὅσον ἡ γωνία θ εἶναι ὀξεῖα ἤ ἀμβλεῖα.

ὁ τύπος (4) γράφεται καί οὕτω:

$$\omega = \iint_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}\,ds}{r^3} \qquad (5)$$

Ἐάν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου A εἶναι (a,b,c) καί τοῦ M εἶναι (x,y,z), τότε $\vec{AM}\,(x-a,\ y-b,\ z-c)$, ὅπου O ἡ ἀρχή τῶν συντεταγμένων, τότε $\vec{r}\cdot\vec{n} = (x-a)\,\text{συν}\alpha + (y-b)\,\text{συν}\beta + (z-c)\,\text{συν}\gamma$, ὅπου $(\text{συν}\alpha, \text{συν}\beta, \text{συν}\gamma)$ τά διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ $\vec{n}$. ὁ τύπος (5) γράφεται λοιπόν:

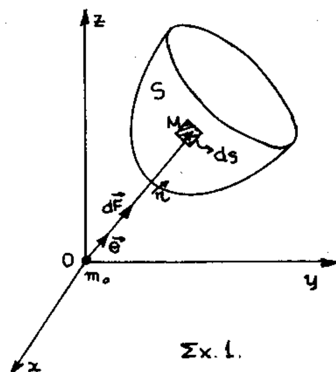
$$\omega = \iint_S \frac{[(x-a)\text{συν}\alpha+(y-b)\text{συν}\beta+(z-c)\text{συν}\gamma]\,ds}{[r^2]^{3/2}} \qquad \text{ἤ}$$

$$\omega = \iint_S \frac{(x-a)\,dy\,dz+(y-b)\,dz\,dx+(z-c)\,dx\,dy}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}} \qquad (6)$$

III. Δύναμις ἕλξεως:

Νά ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἕλξεως, ἥτις ἀσκεῖται ἐπί ἑνός ὑλικοῦ σημείου μάζης m_0 ὑπό μιᾶς ὑλικῆς ἐπιφανείας S, τῆς ὁποίας ἡ μᾶζα ἔχει κατανομήν πυκνότητος $\delta(x,y,z)$.

Λύσις: Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου m_0 εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων (βλ. Σχ. 1). Θεωροῦμεν πέριξ τοῦ σημείου $M(x,y,z)$ τῆς ἐπιφανείας ἕνα στοιχειῶδες ἐμβαδόν ds τούτου δέ ἡ μᾶζα θά εἶναι $\delta\cdot ds$ καί ὡς ἐκ τούτου, ἡ στοιχειώδης ἕλξις πού ἀσκεῖ τοῦτο ἐπί τοῦ ὑλικοῦ σημείου m_0 θά εἶναι $d\vec{F} = \frac{k\cdot m_0\cdot\delta(x,y,z)\,ds}{r^2}\,\vec{e}$, ὅπου $\vec{e}$ τό μοναδιαῖον διάνυσμα ἐπί τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\vec{r}$. Αἱ προβολαί τῆς στοιχειώδους δυνάμεως ἐπί τῶν ἀξόνων θά εἶναι:



Σχ. 1.

$$\left.\begin{aligned} dX &= \frac{km_0\,\delta(x,y,z)\,ds}{r^2}\cdot\frac{x}{r} \\ dY &= \frac{km_0\,\delta(x,y,z)\,ds}{r^2}\cdot\frac{y}{r} \\ dZ &= \frac{km_0\,\delta(x,y,z)\,ds}{r^2}\cdot\frac{z}{r} \end{aligned}\right\}$$

Ὅθεν, αἱ συντεταγμέναι τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, ἥτις ἀσκεῖται ἐπὶ τῆς ὑλικῆς μάζης m_0 ὑπὸ τῆς ὑλικῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι:

$$X = km_0 \iint_S \delta(x,y,z)\cdot\frac{x}{r^3}\,ds,\; Y = km_0 \iint_S \delta(x,y,z)\frac{y}{r^3}\,ds,\; Z = km_0 \iint_S \delta(x,y,z)\frac{z}{r^3}\,ds,$$

ὅπου $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

§ 7. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ STOKES.

Ἔστω S μία προσανατολισμένη ἐπιφάνεια ἀνοικτή, τῆς ὁποίας αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις εἶναι:

$$x=\varphi(u,v),\; y=f(u,v),\; z=\sigma(u,v),\; (u,v)\in D.$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ S περιορίζεται ὑπὸ τῆς κλειστῆς καμπύλης Γ. Ὅταν τὸ σημεῖον $M(x,y,z)$ κινεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τὸ σημεῖον $M'(u,v)$ διαγράφει εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν u,v ἕνα χωρίον D περιοριζόμενον ὑπὸ τῆς κλειστῆς καμπύλης (γ). Ὁρίζομεν τὴν θετικὴν φορὰν διαγραφῆς τῆς καμπύλης (Γ) ἐν σχέσει μὲ τὸν θετικὸν προσανατολισμὸν τῆς ἐπιφανείας οκυ (βλ. σχετικῶς § 4).

Ἤδη ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα:

$$I = \oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad (1)$$

ἐκτεινόμενον ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης καμπύλης Γ.

Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα (1)

$$x=\varphi(u,v),\; y=f(u,v),\; z=\sigma(u,v),$$

ὅτε τὸ (1) γράφεται:

$$I = \oint_\gamma P\left\{\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right\} + Q\left\{\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right\} + R\left\{\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right\} \quad \text{ἤ}$$

$$I = \oint_{\gamma} \left\{ P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial y}{\partial u} + R\frac{\partial z}{\partial u} \right\} du + \left\{ P\frac{\partial x}{\partial v} + Q\frac{\partial y}{\partial v} + R\frac{\partial z}{\partial v} \right\} dv \qquad (2)$$

Τό (2) εἶναι ἕνα ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἰς τό ἐπίπεδον Ouv περικλειόμενον ὑπό τῆς προσανατολισμένης καμπύλης (γ). Ἐάν διά τοῦτο ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τοῦ Green διά τό ἐπίπεδον ἔχομεν:

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v} + Q\frac{\partial y}{\partial v} + R\frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial y}{\partial u} + R\frac{\partial z}{\partial u} \right) \right] \cdot du\,dv \qquad (3)$$

Εἰς τήν συνάρτησιν ὑπό τό σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως $\iint$, οἱ ὅροι οἱ περιέχοντες τό P γράφονται:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} -$$

$$- \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right) \qquad (4)$$

θέτοντες $J_1 = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $J_2 = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $J_3 = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$,

τότε ἡ σχέσις (4) γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} J_3 + \frac{\partial P}{\partial z} J_2 \qquad (5)$$

Κατ' ἀναλογίαν εὑρίσκομεν:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(Q\frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(Q\frac{\partial x}{\partial u} \right) = -\frac{\partial Q}{\partial z} J_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} J_3 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(R\frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(R\frac{\partial x}{\partial u} \right) = -\frac{\partial R}{\partial x} J_2 + \frac{\partial R}{\partial y} J_1 \qquad (7)$$

Ὁ τύπος (3), ἕνεκα τῶν (5), (6) καί (7), γράφεται:

$$I = \iint_D \left[J_1\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + J_2\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + J_3\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] du\,dv \qquad (8)$$

'Εάν καλέσωμεν, χάριν συντομίας, συνα, συνβ, συνγ τά διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ διανύσματος $\vec{n}$, τότε, ὡς γνωστόν, θά ἔχωμεν:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{J_1}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{J_2}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{J_3}{\sqrt{EG-F^2}}$$

καί ὁ τύπος (8) γράφεται:

$$I = \iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\sigma\upsilon\nu\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\sigma\upsilon\nu\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\sigma\upsilon\nu\gamma\right]\cdot\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \quad \text{ἤ}$$

$$I = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\sigma\upsilon\nu\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\sigma\upsilon\nu\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\sigma\upsilon\nu\gamma\right]ds \qquad (9)$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (10)$$

Ὅθεν, ἔχομεν ἐκ τῶν (1) καί (9) ἤ ἐκ τῶν (1) καί (10) τόν τύπον τοῦ Stokes, ἤτοι:

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\sigma\upsilon\nu\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\sigma\upsilon\nu\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\sigma\upsilon\nu\gamma\right]ds \qquad (11)$$

ἤ

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (12)$$

Παρατηρήσεις: 1η/ 'Εάν ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι ἕνα παράλληλον τμῆμα πρός τό ἐπίπεδον oxy, τότε $dz = 0$ καί ὁ τύπος τοῦ Stokes γίνεται:

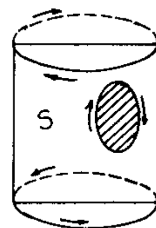
$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

ἤτοι λαμβάνομεν τόν τύπον τοῦ Green, ὅστις θεωρεῖται ὡς μερική περίπτωσις τοῦ τύπου τοῦ Stokes.

2α/ Τό θεώρημα τοῦ Stokes ἐφαρμόζεται καί εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό σύνορον τῆς ἐπιφανείας S ἀποτελεῖται ἀπό διαφόρους χωριζομένας καμπύλας (β2. Σχ. 1). Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

πρέπει νά ληφθῇ κατά μῆκος τῶν προσανατολισμένων καμπύλων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τό σύνορον τῆς S. Οὕτω π.χ. ἐάν λάβωμεν τήν κυρτήν ἐπιφάνειαν ἑνός κυλίνδρου ἐπί τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀνοίξει μίαν «ὀπήν» (βλ. Σχ. 1) καί ἐάν θεωρήσωμεν τήν ἐξωτερικήν πλευράν τῆς ἐπιφανείας, τό θεώρημα τοῦ Stokes ἐκφράζει τήν σχέσιν μεταξύ τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος καί τοῦ ἐπικαμπυλίου τοιούτου κατά μῆκος τῶν τριῶν καμπύλων αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν καί τό σύνορον τῆς S κατά τήν διεύθυνσιν ἥτις δεικνύεται είς τό Σχ. 1.



Σχ. 1

3ον/. Ἐπί τῇ βάσει τοῦ τύπου τοῦ Stokes θά δείξωμεν τήν ἱκανήν συνθήκην τοῦ θεωρήματος XI-9-3, ἤτοι:

Ἐάν αἱ συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ εἶναι συνεχεῖς καί ἔχουν μερικάς παραγώγους α' τάξεως συνεχεῖς ἐπί ἑνός ἁπλῶς συνεκτικοῦ χωρίου V τοῦ $\mathbb{R}^3$, τότε αἱ συνθῆκαι:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

εἶναι ἱκαναί, ἵνα τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου κατά μῆκος πάσης λείας καμπύλης κειμένης ἐντός τοῦ V.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν μίαν κλειστήν καμπύλην (γ) κειμένην ἐντός τοῦ V καί θεωροῦμεν μίαν ἐπιφάνειαν S ἐξ ὁλοκλήρου κειμένην ἐντός τοῦ V καί τῆς ὁποίας τό σύνορον εἶναι ἡ κλειστή καμπύλη (γ). Μία τοιαύτη ἐπιφάνεια ὑπάρχει καθ' ὅτι, τό χωρίον V εἶναι ἁπλῶς συνεκτικόν. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Stokes συνάγομεν ὅτι, θά εἶναι $\oint_{\gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$. Συμφώνως, δέ πρός τό θεώρημα XI-9-1 τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ εἶναι

ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου κατά μῆκος τῆς Γ, ὅπου ἡ καμπύλη Γ κεῖται ἐντός τοῦ V.

4ον/ Κατά τήν ἀπόδειξιν τοῦ τύπου Stokes ἐθεωρήσαμεν τήν ἐπιφάνειαν S ὑπό παραμετρικήν μορφήν. Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια ἔχη τήν ἐξίσωσιν $z=f(x,y)$, πάλιν ὁ τύπος ἰσχύει ἀρκεῖ νά λάβωμεν ὡς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας $x=x$, $y=y$, $z=f(x,y)$.

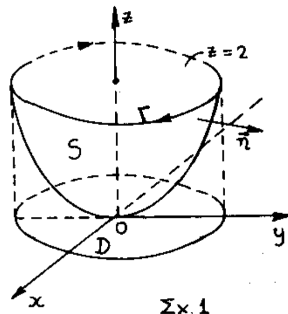
<u>Ἐφαρμογή</u>. Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα τοῦ Stokes διά τήν συνάρτησιν $\vec{F}=3yi-xzj+yz^2k$, ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραβολοειδοῦς $2z=x^2+y^2$ φρασσομένη ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $z=2$.

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν $P=3y$, $Q=-xz$, $R=yz^2$. Ἔστω δέ Γ τό σύνορον τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας. Θά ἐπαληθεύσωμεν διά τῶν ἀνωτέρω δεδομένων τήν ἰσχύν τοῦ τύπου (11), ἤτοι:

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\sigma\upsilon\nu\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\sigma\upsilon\nu\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma\right]ds.$$

Κατ' ἀρχάς ὑπολογίζομεν τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα:

$$I=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz \quad (1)$$



Σχ.1

Ἡ προσανατολισμένη καμπύλη Γ (βλ. Σχ.1), εἶναι περιφέρεια κύκλου μέ ἐξισώσεις $x^2+y^2=4$, $z=2$. Αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις ταύτης εἶναι $x=2\sigma\upsilon\nu t$, $y=2\eta\mu t$, $z=2$, $0\le t<2\pi$.

Συνεπῶς τό ὁλοκλήρωμα (1) γράφεται:

$$\int_{2\pi}^{0}\left[3(2\eta\mu t)(-2\eta\mu t)\;-\;(2\sigma\upsilon\nu t)\cdot 2\cdot(2\sigma\upsilon\nu t)\right]dt=\int_0^{2\pi}(12\eta\mu^2 t+8\sigma\upsilon\nu^2 t)dt=20\pi.$$

Ἤδη θά ὑπολογίσωμεν τό βον μέλος τοῦ τύπου τοῦ Stokes. Τά διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ καθέτου διανύσματος $\vec{n}$ εἶναι:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,,\ \sigma\upsilon\nu\beta\,\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ \ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \sigma\upsilon\nu\gamma=-\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Ἐξ ἄλλου: $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=z^2+x,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-z-3$.

Μετά τάς ἀντικαταστάσεις τό 6ον μέλος γίνεται:

$$I'=\iint_S \frac{(z^2+x)x+(z+3)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,ds=\iint_D \left[z^2x+x^2+z+3\right]dxdy$$

ὅπου D εἶναι ὁ κύκλος $x^2+y^2\leq 4$. θέτοντες $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ λαμβάνομεν τελικῶς:

$$I'=\iint_D \left[x\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2+x^2+\frac{x^2+y^2}{2}+3\right]dxdy$$

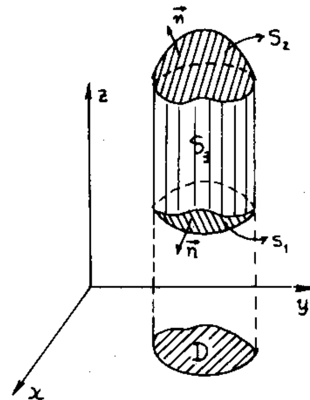
Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ τελευταίου ὁλοκληρώματος χρησιμοποιοῦμεν πολικάς συντεταγμένας, ὅτε ἔχομεν:

$$I'=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left\{\rho\,\text{συν}\varphi\cdot\frac{\rho^4}{4}+\rho^2\text{συν}^2\varphi+\frac{\rho^2}{2}+3\right\}\rho\,d\rho\,d\varphi=20\pi.$$

Ὅθεν, $I=I'$.

§8. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΣ Ἤ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ OSTROGRADSKY Ἤ ΤΟΥ GAUSS.

Ἔστω ἕνα χωρίον V περιοριζόμενον ὑπό δύο τμημάτων λείων καί προσανατολισμένων ἐπιφανειῶν S_1 καί S_2 τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶναι $z=f_1(x,y)$, $z=f_2(x,y)$ ἀντιστοίχως, ὅπου $f_2(x,y)\geq f_1(x,y)$ καί ὑπό μιᾶς κυρτῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας S_3 τῆς ὁποίας αἱ γενέτειραι εἶναι παράλληλοι πρός τόν ἄξονα Oz. (βλ. Σχ. 1). Ἡ ἕνωσις τῶν τριῶν ἀνωτέρω ἐπιφανειῶν ἀποτελεῖ τό σύνορον τοῦ χωρίου V καί τό ὁποῖον ἄς τό συμβολίσωμεν διά τοῦ S. Ἔστω δέ D ἡ προβολή τοῦ συνόρου S εἰς τό ἐπίπεδον Oxy. Ὑποθέτομεν ἐπί πλέον ὅτι τό σύνορον S τέμνεται ὑπό τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων πρός τόν ἄξονα Oz εἰς δύο σημεῖα.



Σχ. 1.

Ἔστω συνγ τό συνημίτονον τῆς γωνίας τοῦ καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν διανύσματος $\vec{n}$ μέ τόν ἄξονα τῶν z. Θεωροῦμεν ἤδη τήν συνάρτησιν $R(x,y,z)$ ὡρισμένην εἰς τό χωρίον V καί ἔχουσα συνεχῆ μερικήν παράγωγον ὡς πρός z. Ἄς θεωρήσωμεν τό ὁλοκλήρωμα:

$$I=\iiint_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dxdydz \quad (1)$$

Ὁλοκληρώνοντες ὡς πρός z ἔχομεν:

$$I=\iint_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dx dy = \iint_D R(x,y,f_2(x,y))dxdy - \iint_D R(x,y,f_1(x,y))\cdot dxdy \qquad (2)$$

Τό συνγ εἶναι θετικόν ἐπί τοῦ τμήματος S_2, ἀρνητικόν ἐπί τοῦ τμήματος S_1 καί μηδέν ἐπί τοῦ τμήματος S_3.

Ἐάν θεωρήσωμεν ἕνα στοιχεῖον ds τῆς ἐπιφανείας S, θά ἔχωμεν τότε:

$$dxdy = \text{συν}\gamma\, ds\,, \quad \text{ἐάν} \quad \text{συν}\gamma > 0$$

$$-dxdy = \text{συν}\gamma\, ds\,, \quad \text{''} \quad \text{συν}\gamma < 0$$

$$dxdy = 0 \quad , \quad \text{''} \quad \text{συν}\gamma = 0.$$

Ὅθεν δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\iint_D R(x,y,f_2(x,y))\,dxdy = \iint_{S_2} R(x,y,z)\,\text{συν}\gamma\, ds$$

$$-\iint_D R(x,y,f_1(x,y))\,dxdy = \iint_{S_1} R(x,y,z)\,\text{συν}\gamma\, ds.$$

Διά προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων λαμβάνομεν:

$$I=\iint_D R(x,y,f_2(x,y))\,dxdy - \iint_D R(x,y,f_1(x,y))dxdy$$

$$=\iint_{S_2} R(x,y,z)\,\text{συν}\gamma\, ds + \iint_{S_1} R(x,y,z)\,\text{συν}\gamma\, ds \qquad (3)$$

Προσθέτοντες εἰς τήν (3) καί τό $\iint_{S_3} R(x,y,z)\,\text{συν}\gamma\, ds=0$, θά ἔχωμεν:

$$I=\iint_{S_2} R(x,y,z)\text{συν}\gamma ds+\iint_{S_1} R(x,y,z)\text{συν}\gamma ds+\iint_{S_3} R(x,y,z)\text{συν}\gamma ds=\iint_S R(x,y,z)\text{συν}\gamma ds \quad (4)$$

Ὅθεν, $$\iiint_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\, dxdydz = \iint_S R(x,y,z)\,\text{συν}\gamma\, ds \qquad (5).$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (5) συνάγομεν ὅτι:

Ἐάν αἱ συναρτήσεις P, Q, R καθώς καί αἱ μερικαί παράγωγοι αὐτῶν $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ εἶναι συνεχεῖς εἰς τό φραγμένον χωρίον V, τοῦ ὁποίου τό σύνορον ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα πεπερασμένον ἀριθμόν λείων ἐπιφανειῶν καί συνα, συνβ, συνγ

εἶναι τά διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν S διανύσματος $\vec{n}$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S (P\text{συν}\alpha+Q\text{συν}\beta+R\text{συν}\gamma)\,ds \qquad (6)$$

Ἐκ τῆς (6) προκύπτει ὁ τύπος τοῦ Ostrogradsky, ἤτοι:

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy} \qquad (7)$$

Ἐάν θέσωμεν $\vec{F}=(P,Q,R)$ καί $\vec{n}$ εἶναι τό μοναδιαῖον κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν S διάνυσμα, προφανῶς ὁ (7) γράφεται καί οὕτω:

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds} \qquad (8)$$

Παρατήρησις: Τόν ἀνωτέρω τύπον τόν συναντῶμεν συχνά ὑπό τήν ὀνομασίαν Θεώρημα ἀποκλίσεως ἤ Θεώρημα τοῦ Gauss.

Ἐφαρμογαί: 1η/ Ἐάν S εἶναι μία κλειστή καί λεία ἐπιφάνεια περικλείουσα ἕνα ἁπλῶς συνεκτικόν χωρίον ἔχον ὄγκον V, δείξατε ὅτι:

$$V=\frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy.$$

Λύσις: Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς ἀποκλίσεως τοῦ Ostrogradsky ἔχομεν:

$$\iint_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=\iiint_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iiint_V 3\,dx\,dy\,dz=3\iiint_V dx\,dy\,dz=3V,$$

ἐξ ἧς ἔχομεν τό ἀποδεικτέον.

2α/. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα:

$$I=\iint_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$$

ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Λύσις: Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Θεωρήματος τῆς ἀποκλίσεως ἤ τοῦ τύπου τοῦ Ostro-

gradsky λαμβάνομεν:

$$I = 3 \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

ὅπου V εἶναι ἡ σφαῖρα $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$.

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἀνωτέρω τριπλοῦ ὁλοκληρώματος εἰσάγομεν σφαιρικάς συντεταγμένας, ὅτε ἔχομεν:

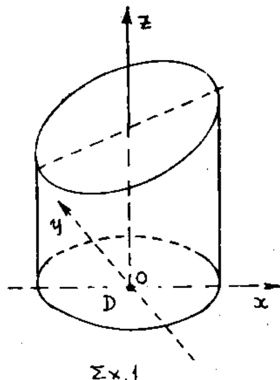
$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} P^4 \eta\mu\varphi \, dP = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

3ῃ/ Δίδεται τό χωρίον V περιοριζόμενον ὑπό τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2=1$ καί τῶν ἐπιπέδων $z=0$ καί $z=x+2$. Ἐπί πλέον δίδεται καί ἡ διανυσματική συνάρτησις $\vec{F}=(x^2+ye^z)i+(y^2+ze^x)j+(z^2+xe^y)k$. Δἰ' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς ἀποκλίσεως τοῦ Ostrogradsky νά ὑπολογισθῇ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, ἔνθα S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἡ περικλείουσα τό χωρίον V.

<u>Λύσις</u>: Εἶναι $P=x^2+ye^z$, $Q=y^2+ze^x$, $R=z^2+xe^y$ καί

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 2(x+y+z)$$

Ὅθεν, δἰ' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς ἀποκλίσεως ἔχωμεν:



Σχ.1

$$I = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = 2\iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\iint_D dx\,dy \int_0^{x+2} (x+y+z)\,dz$$

$$= \iint_D \Big[2(x+y)z+z^2\Big]_0^{x+2} dx\,dy = \iint_D (3x^2+8x+2xy+4y+4)\,dx\,dy.$$

Ἡ ἐπιφάνεια S καθώς καί τό χωρίον D (κύκλος) δεικνύονται εἰς τό Σχ.1. Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ τελευταίου διπλοῦ ὁλοκληρώματος χρησιμοποιοῦμεν πολικάς συντεταγμένας.

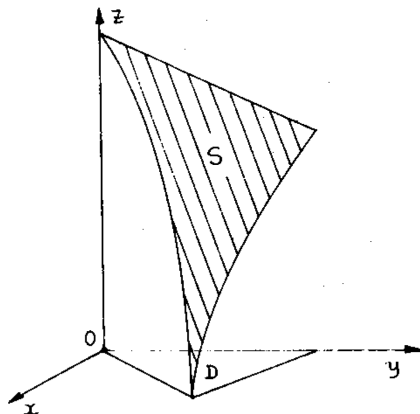
Συνεπῶς, $I=\int_0^1\int_0^{2\pi}(3\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+8\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta+2\rho^2\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta+4\rho\,\eta\mu\theta+4)\,\rho\, d\rho\, d\theta.$

$$=3\int_0^1\rho^3d\rho\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^2\theta\, d\theta+8\int_0^1\rho^2d\rho\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta+2\int_0^1\rho^3d\rho\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta\, d\theta+4\int_0^1\rho^2d\rho\int_0^{2\pi}\eta\mu\theta\, d\theta+4\int_0^1\rho\, d\rho\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{19}{4}\pi.$$

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

1. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς $2z=x^2+y^2$, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐξωτερικῶς τοῦ κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. Θεωροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν S τὴν ἔχουσα ἐξίσωσιν: $z=2-x^2-y$, ὅπου τὰ (x,y) μεταβάλλονται εἰς τὸ τρίγωνον D, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν: $x=0$, $y=1$, $y=x$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας S (βλ. ἔναντι σχῆμα).



3. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ παραβολοειδὲς $z=x^2+y^2$.

4. Ὑπολογίσατε τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_{S^+} z\left(\frac{x\,\text{συν}\alpha}{a^2}+\frac{y\,\text{συν}\beta}{b^2}+\frac{z\,\text{συν}\gamma}{c^2}\right)ds$$

εἰς τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, z\geq 0$, ὅπου ἡ ἐπιφάνεια S^+ ἔχει τὸν θετικὸν προσανατολισμόν.

5. Ἐὰν P εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον $P(x,y,z)$ καὶ ds τὸ στοιχειῶδες ἐμβαδὸν πέριξ τοῦ σημείου P τῆς ἐπιφανείας S τοῦ ἐλλειψοειδοῦς τότε δείξατε ὅτι:

i) $\oiint_S P\,ds=4\pi\alpha\beta\gamma$, ii) $\oiint_S \frac{1}{P}\,ds=\frac{4\pi}{3\alpha\beta\gamma}(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)$.

6. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\oiint_S H\,ds$ λαμβανόμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς μοναδιαίας σφαίρας μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, ὅπου εἶναι

$$H=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2.$$

7. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τμήματος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2+z^2=R^2$ τεμνομένης ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $z=h$.
('Απάντ. $(0,0,\frac{R+h}{2})$).

8. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους ὁμογενοῦς τμήματος τῆς ἐπιφανείας $3z=2(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})$ πού περικλείεται ἀπό τά ἐπίπεδα $x=0, y=0, x+y=1$.

9. Νά εὑρεθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ χωρίου τοῦ ὁμογενοῦς παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς $x^2+y^2=2\gamma z$, τό ὁποῖον τέμνεται ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $z=\gamma$, ὡς πρός τόν ἄξονα Oz.

10. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_S \frac{c\,ds}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\gamma)^2}}$, ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a\neq\gamma$ καί $\sigma=$ σταθερά.
('Αξίζει νά σημειωθῇ ὅτι τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα παριστᾷ τό δυναμικόν εἰς τό σημεῖο $(0,0,\gamma)$, ὅταν εἰς τήν σφαιρικήν ἐπιφάνειαν ἔχουν κατανεμηθῇ φορτία μέ σταθερά πυκνότητα $\delta=c$).

11. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, ἐπί τοῦ τμήματος τῆς ἐπιπέδου ἐπι-ἐπιφανείας $S: \varphi(x,y,z)\equiv 2x+2y+z-6=0, x,y,z\geqq 0$, ὅπου εἶναι: $\vec{F}=xyi-x^2j+(x+z)k$.

12. Ὑπολογίσατε τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, ὅπου $\vec{F}=(x+1)\cdot i-(2y+1)\cdot j+z\cdot k$ καί S εἶναι τό τρίγωνο μέ κορυφές $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $\Gamma(0,0,1)$ καί τό $\vec{n}$ ἔχει φορά τέτοια, ὥστε νά ἀπομακρύνεται τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ('Απ: 0).

13. Ὑπολογίσατε τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, ὅπου $\vec{F}=xi+yj+zk$ καί S εἶναι τό τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς $2z=x^2+y^2$, τό ὁποῖον εὑρίσκεται ἐσωτερικῶς τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=2x$, προσανατολισμένον ἐκ τῶν ἔσω πρός τά ἔξω (δηλ. ἐν προκειμένῳ $\vec{n}\cdot\vec{k}>0$).

14. Ὑπολογίσατε τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, ὅπου $\vec{F}=y^2i+z\,j-x\,k$ καί S εἶναι τό τμῆμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου $y^2=1-x$ μεταξύ τῶν ἐπιπέδων $z=0$ καί $z=x$, $x\geq 0$, μέ $\vec{n}\cdot\vec{i}>0$. ('Απ: $4/15$).

15. Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα τοῦ Stokes διά τήν συνάρτησιν $\vec{F}=(2x\cdot y)i-yz^2j-y^2zk$, ὅπου S εἶναι τό ἄνω μέρος τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ καί Γ τό σύνορον αὐτοῦ.

16. Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα τοῦ Stokes διά τήν συνάρτησιν $\vec{F}=y\cdot i+z\cdot j+x\cdot k$, ὅπου S εἶναι τό τμῆμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ μεταξύ τῶν ἐπιπέδων $z=0$ καί $z=x+2$, προσανατολισμένο ἐκ τῶν ἔσω πρός τά ἔξω.

17. Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα τοῦ Stokes διά τήν συνάρτησιν $\vec{F}=z\cdot i+xz\cdot j+y\cdot k$, ὅταν ὡς ἐπιφάνεια S ληφθῇ τό τετράγωνον κέντρου (0,0,1) καί πλευράς παραλλήλους πρός τούς ἄξονας O_x, O_y μήκους 2, καμπύλη δέ Γ ἡ περίμετρος τοῦ ἐν λόγῳ τετραγώνου μέ φοράν διαγραφῆς τῆς Γ ἡ θετική.

18. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Stokes ὑπολογίσατε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\oint_\Gamma xydx+y^2dy+zdz$ ἐπί τῆς περιφερείας Γ, ἡ ὁποία ἀποκόπτεται ἀπό τήν ἐπιφάνειαν S τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς: $2-z=x^2+y^2$ ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $z=1$.

19. Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα ἀποκλίσεως ἤ θεώρημα τῶν Ostrogradsky-Gauss λαμβάνοντες ὡς διανυσματικήν συνάρτησιν τήν $\vec{F}=4xi-3y^2j+z^2k$ καί ὡς τρισδιάστατον χωρίον V τό ὁριζόμενον ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν: $x^2+y^2=4$, $z=0$ καί $z=3$.

20. Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα ἀποκλίσεως λαμβάνοντες ὡς διανυσματικήν συνάρτησιν τήν:

$$\vec{F}=yx\,i+y^2j-\frac{z^2}{2}\,k$$

καί ὡς χωρίον V τό σφαιρικόν $x^2+y^2+z^2\leq R^2$

21. Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα ἀποκλίσεως διά τήν συνάρτησιν $\vec{F}=3xi-2yj+z\cdot k$, ὅπου V εἶναι τό χωρίον τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν:

$$x^2+z^2=4,\ y=0,\ x+y+z=3$$

22. Διά χρησιμοποιήσεως τοῦ θεωρήματος ἀποκλίσεως ὑπολογίσατε τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, ὅπου $\vec{F}=x^3 i+y^3 j+zk$ καί S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἥτις φράσσεται ὑπό τῶν $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=x+2$.

23. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος ἀποκλίσεως νά ὑπολογισθῇ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_S y\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy,$$

ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=a^2$ μέ $-h\leq z\leq h$.

24. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος ἀποκλίσεως νά ὑπολογισθῇ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$$

ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-\gamma)^2=R^2$ προσανατολισμένη ἐκ τῶν ἔσω πρός τά ἔξω.

25. Ὑπολογίσατε τά κάτωθι ἐπιφανειακά ὁλοκληρώματα:

i) $\iint_S dy\,dz+dz\,dx+dx\,dy$, ὅπου S εἶναι τό ἡμισφαίριον: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leq 1$, προσανατολισμένο ἐκ τῶν ἔσω πρός τά ἔξω.

ii) $\iint_S (x\,\text{συν}a-y\,\text{συν}b+z\,\text{συν}\gamma)\,ds$, ὅπου S ἡ ἀνωτέρω ἐπιφάνεια τοῦ ἡμισφαιρίου.

iii) $\iint_S x^2 z\,ds$, ὅπου S εἶναι ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια: $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq 1$.

26. Ὑπολογίσατε τά ἐπιφανειακά ὁλοκληρώματα τῆς ἀσκ. 25, μέ τήν βοήθειαν τῶν παραμετρικῶν παραστάσεων ἀντιστοίχως.

i) $x=\text{ημ}u\,\text{συν}v$, $y=\text{ημ}u\,\text{ημ}v$, $z=\text{συν}u$.

ii) Ὁμοίως, ὡς εἰς (i).

(iii) $x=\text{συν}u$, $y=\text{ημ}u$, $z=v$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ - ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΩΝ

§1. ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

I. Ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου. Καλοῦμεν *πεδίον* μία περιοχήν τοῦ χώρου ἐντός τῆς ὁποίας ἔχει κατανεμηθῆ ἕνα φυσικόν μέγεθος εἰς τρόπον, ὥστε εἰς κάθε σημεῖον τῆς περιοχῆς τοῦ χώρου νά ἀντιστοιχῆ μία τιμή τοῦ μεγέθους τούτου.

Ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου εἶναι ἡ βάσις διά διαφόρους ἐννοίας τῆς συγχρόνου φυσικῆς. Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά διαπραγματευθοῦμε στοιχεῖα τῆς μαθηματικῆς θεωρίας, ἥτις ἐφαρμόζεται εἰς τήν μελέτην τῶν φυσικῶν πεδίων. Εἰς τήν Μηχανικήν, εἰς τήν Ἠλεκτρολογίαν, εἰς τήν Ὑδροδυναμικήν καί ἀλλαχοῦ συνήθως ἀσχολούμεθα μέ ποσότητας δύο βασικῶν τύπων, δηλαδή βαθμωτές καί διανυσματικές. Ἀντιστοίχως θά θεωροῦμεν δύο τύπους πεδίων: τά βαθμωτά καί τά διανυσματικά πεδία.

α) ***Βαθμωτόν*** καλεῖται τό πεδίον ὅταν εἰς κάθε σημεῖον του $M(x,y,z)$ ἀντιστοιχῆ ἡ τιμή $f(M)$ ἑνός βαθμωτοῦ μεγέθους. Ἡ πραγματική συνάρτησις f καλεῖται τότε *βαθμωτή συνάρτησις*, ἄλλως *βαθμωτόν πεδίον* καί γράφομεν:

$$f(M)=f(x,y,z) \qquad (1)$$

Εἰς τά ἑπόμενα ἡ συνάρτησις (1) θά θεωρῆται συνεχής καί θά ἔχη συνεχεῖς μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως ὡς πρός τάς μεταβλητάς x,y,z.

Βαθμωτά πεδία συναντοῦμε συχνά εἰς τάς διαφόρους ἐφαρμογάς τῶν μαθηματικῶν εἰς τάς φυσικάς ἐπιστήμας καί τήν τεχνολογίαν. Ὅταν, π.χ., εἰς κάθε σημεῖον M τῆς ἀτμοσφαίρας ἀντιστοιχίζωμεν ἕναν πραγματικόν ἀριθμόν $f(M)$, ὅστις παριστᾶ τήν θερμοκρασίαν εἰς τό σημεῖον M, τότε ἡ οὕτως ὁριζομένη συνάρτησις f εἶναι ἕνα βαθμωτόν πεδίον. Ὁμοίως βαθμωτόν εἶναι τό πεδίον τό καθορίζον τήν πυκνότητα $\delta=\delta(x,y,z)$ εἰς τά διάφορα σημεῖα ἑνός σώματος.

Ὁ προσδιορισμός ἑνός βαθμωτοῦ πεδίου ὡς πρός ἕνα σταθερόν σύστημα συντεταγμένων καί ἡ ἀντίστοιχος συνάρτησις $f(x,y,z)$ δέν εἶναι πάντοτε ἱκανά διά τήν μελέτην τοῦ πεδίου. Διά νά ἔχουμε μίαν περισσότερο πλήρη περιγραφήν τῆς δομῆς τοῦ πεδίου, χρησιμοποιοῦμε τάς καλουμένας ***ἰσοβαρεῖς*** ἤ ***ἰσοσταθμικάς***

ἐπιφανείας.

Καλοῦμεν ***ἰσοβαρῆ*** ἢ ***ἰσοσταθμικὴν ἐπιφάνειαν*** ἑνός βαθμωτοῦ πεδίου $f(M)$ τό σύνολον τῶν σημείων $M(x,y,z)$ τοῦ χώρου εἰς τά ὁποῖα ἡ f λαμβάνει σταθεράν τιμήν ἴσην μέ C. Τό ἐν λόγῳ σύνολον εἶναι μία ἐπιφάνεια μέ ἐξίσωσιν:

$$f(x,y,z) = C \qquad (2)$$

Ἐάν ἡ τιμή $f(x,y,z)$ τῆς f εἶναι ἡ θερμοκρασία εἰς τό σημεῖον $M(x,y,z)$, τότε αἱ ἰσοσταθμικαί ἐπιφάνειαι ἀντιστοιχοῦσαι εἰς διαφόρους τιμάς τῆς σταθερᾶς C λεγόνται ***ἰσόθερμοι*** ἐπιφάνειαι.

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ἰσοσταθμικαί ἐπιφάνειαι (2), αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ὅλας τάς δυνατάς τιμάς τοῦ C πληροῦν ὅλον τόν χῶρον εἰς τόν ὁποῖον ὁρίζεται τό βαθμωτόν πεδίον καί ὅτι δύο ἐπιφάνειαι: $f_1(x,y,z)=C_1$ καί $f_2(x,y,z)=C_2$ δέν ἔχουν κοινά σημεῖα, ὅταν $C_1 \neq C_2$.

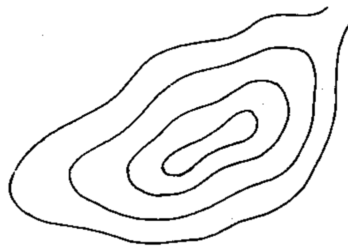
Ὁ προσδιορισμός ὅλων τῶν ἰσοσταθμικῶν ἐπιφανειῶν καί οἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τοῦ C μᾶς παρέχουν μίαν πλήρη περιγραφήν τῆς δομῆς τοῦ πεδίου. Αὐτή ἡ μέθοδος παρουσιάσεως τοῦ πεδίου εἶναι εἰδικῶς κατάλληλη ὅταν τό πεδίον ὁρίζεται ὑπό μιᾶς διαφορισίμου συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν $f(x,y)$ μέ τιμές πραγματικές. Τό σύνολον τῶν σημείων (x,y) μέ:

$$f(x,y) = C \qquad (3)$$

παριστᾶ μία μονοπαραμετρικήν οἰκογένειαν γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ***ἰσοβαρεῖς*** ἢ ***ἰσοσταθμικαί γραμμαί*** τοῦ πεδίου.

Εἶναι φανερόν ὅτι μία ἰσοσταθμική γραμμή εἶναι π ρ ο β ο λ ή τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας $z=f(x,y)$ καί τοῦ ἐπιπέδου $z=c$ ἐπί τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου Oxy.

Αἱ ἰσοσταθμικαί γραμμαί ἐφαρμόζονται εὐρέως εἰς τήν χαρτογραφίαν διά τήν παράστασιν τοῦ ἀναγλύφου τῆς Γῆς. Οὕτω διά νά δείξωμεν τό ὕψος εἰς εἰς ἕνα τοπογραφικόν χάρτην φέρομεν "περιμετρικάς" γραμμάς (βλ. Σχ. 1), τά σημεῖα τῶν ὁποίων ἔχουν τό αὐτό ὑψόμετρον.

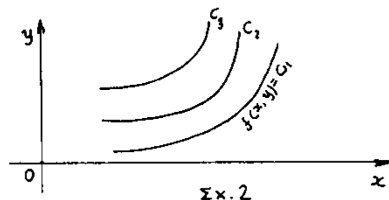


Σχ. 1

Ἐάν ἡ $f(x,y)$ παριστᾷ τήν θερμοκρασίαν εἰς τό σημεῖον $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου

τότε αἱ ἰσοσταθμικαί γραμμαί καλοῦνται *ἰσόθερμοι γραμμαί* (βλ. Σχ. 2).

Ἐάν θεωρήσωμεν τήν οἰκογένειαν τῶν ἰσοσταθμικῶν ἐπιφανειῶν $f(x,y,z)=c$, ἀντιστ. ἰσοσταθμικῶν γραμμῶν $f(x,y)=c$, τότε ἐξ ἑκάστου σημείου $M_0(x_0,y_0,z_0)$ τοῦ χώρου, ἀντιστοίχως $M_0(x_0,y_0)$ τοῦ ἐπιπέδου, διέρχεται μία ἰσοσταθμική ἐπιφάνεια, ἀντιστοίχως γραμμή ἥτις ἔχει, προφανῶς, τήν ἐξίσωσιν: $f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$, ἀντιστοίχως τήν: $f(x,y)=f(x_0,y_0)$.



Σχ. 2

β) *Διανυσματικόν* καλεῖται τό πεδίον, ὅταν εἰς κάθε σημεῖον του $M(x,y,z)$ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμή $\vec{F}(M)$ ἑνός διανυσματικοῦ μεγέθους. Ἡ διανυσματική συνάρτησις:

$$\vec{F}(M) \equiv \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\cdot i + Q(x,y,z)\cdot j + R(x,y,z)\cdot k \qquad (4)$$

ὡρισμένη διά κάθε σημεῖον $M(x,y,z)$ τοῦ πεδίου, καλεῖται καί διανυσματικόν πεδίον.

Συχνά εἶναι ἀναγκαῖον νά θεωροῦμεν διανυσματικά πεδία τά ὁποῖα μεταβάλλονται ὡς πρός μίαν παράμετρον, ὡς π.χ. ὁ χρόνος t. Εἰς αὐτάς τάς περιπτώσεις γράφομεν:

$$\vec{F} = \vec{F}(M,t) \qquad (5)$$

Ἕνα χαρακτηριστικόν παράδειγμα διανυσματικοῦ πεδίου εἶναι τό πεδίον τῶν ταχυτήτων τῶν μορίων ἑνός ρευστοῦ: Ἔστω D ἕνας τόπος ροῆς ἑνός ρευστοῦ μέ ταχύτητα $\vec{v}$, ἥτις εἶναι ἀνεξάρτητος μέν τοῦ χρόνου, ἀλλάζει ὅμως διεύθυνσιν ἀπό σημεῖο εἰς σημεῖον. Ἐάν εἰς κάθε σημεῖον $M \in D$ ἀντιστοιχίζωμεν τό διάνυσμα $\vec{v}=\vec{v}(M)$ φθάνομεν εἰς ἕνα διανυσματικόν πεδίον, τό ὁποῖον εἶναι τό πεδίον τῶν ταχυτήτων τῶν μορίων ἑνός ρευστοῦ. Γενικώτερον δυνάμεθα νά μελετήσωμεν τήν κίνησιν ἑνός ρευστοῦ ὅταν σέ κάθε χρονική στιγμή t γνωρίζωμεν τό πεδίον $\vec{v}(M)$ τῶν ταχυτήτων τῶν ὑλικῶν σημείων ἀπό τά ὁποῖα συνίσταται τό ρευστόν, ἤτοι ἔχομεν τό διανυσμ. πεδίον:

$$\vec{v} = \vec{v}(M,t),\ t = \text{χρόνος}$$

Ὅταν τό πεδίον τῶν ταχυτήτων δέν μεταβάλλεται μετά τοῦ χρόνου t, ἡ κίνησις τοῦ ρευστοῦ καλεῖται *μόνιμη*.

Ἄλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα διανυσματικῶν πεδίων εἶναι τά ἀκόλουθα: Τό πεδίον τῶν πιέσεων ἐπί τῶν σημείων μιᾶς ἐπιφανείας εὑρισκομένης ἐντός ρευστοῦ. Τό

πεδίον τῆς ἠλεκτρικῆς ἐντάσεως: $\vec{E}=\vec{E}\,(M,t)$ καί τό πεδίον τῆς μαγνητικῆς ἐντάσεως: $\vec{H}=\vec{H}\,(M,t)$ εἶναι ἐπίσης διανυσματικά πεδία. Τά δύο τελευταῖα, ὅταν δέν μεταβάλλωνται μέ τόν χρόνον t, λέγονται τό μέν πρῶτο ***ἠλεκτροστατικόν***, τό δέ δεύτερον ***μαγνητοστατικόν πεδίον***.

Γραμμαί διευθύνσεως καί διανυσματικαί ἐπιφάνειαι. Ἔστω $\vec{F}(M)$ ἕνα διανυσματικόν πεδίον. Μία καμπύλη (γ) κειμένη εἰς τόν χῶρον $\mathbb{D}$ θά καλῆται ***γραμμή διευθύνσεως*** τοῦ πεδίου, ἄλλως ***διανυσματική γραμμή***, ἐάν εἰς ἕκαστον σημεῖον M αὐτῆς τό διάνυσμα $\vec{F}(M)$ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς καμπύλης.

Αἱ γραμμαί διευθύνσεως τοῦ πεδίου:

$$\vec{F}=\vec{F}(M)=P(x,y,z)\cdot i+Q(x,y,z)\cdot j+R(x,y,z)\cdot k$$

εἶναι λύσεις τῆς διανυσματικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως:

$$\vec{F}\times d\vec{r}=0 \qquad (6)$$

ὅπου $\vec{r}=\vec{r}\,(x,y,z)=x\cdot i+y\cdot j+z\cdot k$ εἶναι τό διάνυσμα θέσεως τοῦ τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (6), ἄν $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ εἶναι αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις μιᾶς γραμμῆς διευθύνσεως, εἶναι ἰσοδύναμος πρός τό σύστημα:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad (7)$$

ἤ

$$\begin{cases} y'(x)=\dfrac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)} \\[2mm] z'(x)=\dfrac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)} \end{cases},\quad \text{ὅπου}\quad P(x,y,z)\neq 0 \qquad (7')$$

δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους συναρτήσεις: τάς δύο συντεταγμένας y, z λαμβανομένας ὡς συναρτήσεις τῆς τρίτης x.

Αἱ γραμμαί διευθύνσεως εἶναι ὅθεν αἱ ὁλοκληρωτικαί γραμμαί αὐτοῦ τοῦ συστήματος.

Ὅταν τό διανυσματικόν πεδίον εἶναι τό πεδίον τῶν ταχυτήτων μιᾶς μονίμου κινήσεως ρευστοῦ, τότε αἱ γραμμαί διευθύνσεως λέγονται ***ρευματικαί γραμμαί***, καθόσον συμπίπτουν μέ τάς τροχιάς πού διαγράφουν τά μόρια τοῦ ὑγροῦ.

Εἰς τό ἠλεκτροστατικόν καί εἰς τό μαγνητοστατικόν πεδίον αἱ γραμμαί διευθύνσεως λέγονται ***δυναμικαί γραμμαί***.

Μία ἐπιφάνεια (E) παραγομένη ὑπό γραμμῶν διευθύνσεως ἑνός διανυσματικοῦ πε-

δίου $\vec{F}=\vec{F}(M)$ καλεῖται ***διανυσματική ἐπιφάνεια***. Προφανῶς εἰς κάθε σημεῖον τῆς διανυσμ. ἐπιφανείας (E) ἡ κάθετος ἐπί τήν ἐπιφάνειαν εἶναι ὀρθογώνιος πρός τό διάνυσμα $\vec{F}$ εἰς τό ἐν λόγῳ σημεῖον.

Ἐάν $f(x,y,z)=C_1$, $g(x,y,z)=C_2$ (C_1,C_2 = σταθεραί) εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος (7) ἤ (7'), τότε ἡ ἐξίσωσις:

$$\Phi(f,g)=0 \qquad (8)$$

παριστᾷ μίαν διανυσματικήν ἐπιφάνειαν τοῦ πεδίου $\vec{F}(M)$.

• Εἰς τά προβλήματα φυσικῆς πού ἀναφέρονται εἴτε σέ βαθμωτά εἴτε σέ διανυσματικά πεδία, ἔχει μεγάλην σπουδαιότητα τό νά γνωρίζωμεν τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον μεταβάλλεται τό πεδίον ὅταν μεταβαίνωμεν ἀπό ἕνα σημεῖον εἰς ἕνα ἄλλο. Εἰς τήν περίπτωσιν τῆς μιᾶς διαστάσεως, τοῦτο τό γνωρίζομεν ἀπό τάς μεταβολάς τῆς παραγώγου, διά γενικώτερα ὅμως πεδία χρησιμοποιοῦμε τάς μερικάς παραγώγους.

Εἶναι φανερόν ὅτι ὅταν σχηματίζωμεν μίαν μερικήν παράγωγον, θεωροῦμεν τό πεδίον ὡς συνάρτησιν μιᾶς μόνον μεταβλητῆς, μέ σταθεράς τάς ἄλλας μεταβλητάς. Κάθε μερική παράγωγος, συνεπῶς, παριστᾷ τόν συντελεστήν μεταβολῆς τοῦ πεδίου κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ ἀντιστοίχου πρός τήν μεταβλητήν αὐτήν ἄξονα συντεταγμένων. Εἶναι ὅμως περισσότερον φυσικόν νά ζητήσωμεν νά εὕρωμεν μίαν εὐρυτέραν ἔννοιαν τῆς παραγώγου, τοιαύτην ὥστε: ἀντί νά μᾶς περιορίζῃ εἰς τάς εἰδικάς μόνον διευθύνσεις τῶν ἀξόνων, νά μᾶς παρέχῃ τήν δυνατότητα τῆς μελέτης τῆς συμπεριφορᾶς τοῦ πεδίου πρός κάθε διεύθυνσιν. Τόν σκοπόν αὐτόν ἐξυπηρετεῖ ἡ παράγωγος, τήν ὁποίαν θά εἰσαγάγωμεν εἰς τήν παράγραφον 3 τοῦ παρόντος κεφαλαίου.

• <u>Παραδείγματα</u>: 1ον/ Νά εὑρεθοῦν αἱ γραμμαί διευθύνσεως τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου:

$$\vec{F}(x,y,z)=-4yz\cdot i-x\cdot j+4xy\cdot k.$$

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν $P(x,y,z)=-4yz$, $Q(x,y,z)=-x$, $R(x,y,z)=4xy$ καί ἑπομένως αἱ γραμμαί διευθύνσεως τοῦ δοθέντος πεδίου θά εἶναι αἱ ὁλοκληρωτικαί γραμμαί τοῦ συστήματος:

$$\frac{dx}{-4yz}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{4xy}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἔχομεν: $xdx+zdz=0$, $4ydy+dz=0$,

Ὁλοκληρώνοντες εὑρίσκομεν τάς ἐξισώσεις: $x^2+z^2=C_1$, $2y^2+z=C_2$.

2ον/ Νά προσδιορισθοῦν αἱ γραμμαί διευθύνσεως τοῦ πεδίου:

$$\vec{F}(x,y,z)=yz\cdot i+zx\cdot j+xy\cdot k.$$

<u>Λύσις</u>: Κατά τόν τύπον (7) ἔχομεν:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy} \Longrightarrow \begin{cases} xdx - ydy = 0 \\ ydy - zdz = 0. \end{cases}$$

Δι᾽ ὁλοκληρώσεως αὐτῶν ἔχομεν: $x^2 - y^2 = C_1$, $y^2 - z^2 = C_2$.

Αἱ γραμμαί διευθύνσεως εἶναι αἱ τομαί τῶν δύο αὐτῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν.

II. <u>Ὁρισμός τοῦ ἐσωτερικοῦ καί ἐξωτερικοῦ γινομένου δύο διανυσματικῶν συναρτήσεων</u>.

Ἔστωσαν αἱ διανυσματικαί συναρτήσεις:

$$f: U \to \mathbb{R}^3 \text{ καί } g: U \to \mathbb{R}^3$$

ὅπου U εἶναι ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}^3$.

Δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τάς συναρτήσεις:

$$f \cdot g: U \to \mathbb{R} \text{ καί } f \times g: U \to \mathbb{R}^3$$

ὡς ἑξῆς:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ καί } (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \text{ διά κάθε } x \in U.$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ $f \cdot g$ (<u>ἐσωτερικόν γινόμενον τῶν συναρτήσεων</u>) εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ U ἐντός τῆς πραγματικῆς εὐθείας, ἐνῶ ἡ $f \times g$ (<u>ἐξωτερικόν γινόμενον τῶν συναρτήσεων</u>) εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ U ἐντός τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$.

Ἀναλόγως ὁρίζομεν καί τά ἑξῆς: Ἐάν

$$\varphi: U \to \mathbb{R} \text{ καί } f: U \to \mathbb{R}^3,$$

τότε παριστοῦμεν διά τοῦ συμβόλου $\varphi \cdot f$ ἤ $f \cdot \varphi$ τήν διανυσματικήν συνάρτησιν, ἥτις ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$(\varphi \cdot f)(x) = \varphi(x) \cdot f(x) \text{ διά κάθε } x \in U.$$

§2. <u>ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$)</u>

Ἔστω μία διανυσματική συνάρτησις $f(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, ὅπου I ἕν διάστημα, ἥτις λαμβάνει τιμάς ἐν $\mathbb{R}^p$, ἤτοι $f(t) \in \mathbb{R}^p$. Διά κάθε $t \in I$ ἔχομεν:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)),$$

ὅπου $f_1, f_2, \dots, f_p$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις τῆς f (§2, Κεφ. II).

Ἔστω ἕν σημεῖον $t_0 \in I$· ὁρίζομεν τήν κάτωθι συνάρτησιν:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_p(t) - f_p(t_0)}{t - t_0} \right), \; t \in I - \{t_0\}.$$

Δίδομεν τώρα τόν κάτωθι ὁρισμόν:

Ὁρισμός XIII - 2-1 *Καλοῦμεν (πρώτην) παράγωγον τῆς συναρτήσεως f εἰς τό σημεῖον $t_0 \in I$ καί τήν συμβολίζομεν μέ:*

$$f'(t_0) \text{ εἴτε μέ } \frac{df(t_0)}{dt}$$

τήν κάτωθι, ἄν ὑπάρχῃ, ὁριακήν τιμήν:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

ἤτοι:

$$f'(t_0) = \frac{df(t_0)}{dt} \underset{\text{ὁρσ}}{\equiv} \lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ὁριακή τιμή ὑπάρχει, τότε καί μόνον τότε, ἄν ὑπάρχῃ ἡ ὁριακή τιμή: $\lim_{t \to t_0} \frac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0} = \frac{df_i(t_0)}{dt}$ $\forall\ i=1,2,\dots,p$, ἰσχύει δέ:

$$f'(t_0) = \frac{df(t_0)}{dt} = \left(f_1'(t_0), f_2'(t_0), \dots, f_p'(t_0)\right) = \left(\frac{df_1(t_0)}{dt}, \frac{df_2(t_0)}{dt}, \dots, \frac{df_p(t_0)}{dt}\right).$$

Ἐάν ἡ παράγωγος $\frac{df(t)}{dt}$ ὑπάρχῃ $\forall\, t \in I$, τότε ὁρίζεται μία συνάρτησις $\frac{df(t)}{dt}$, $t \in I$, ἡ ὁποία καλεῖται ***ἡ πρώτη παράγωγος τῆς f ἐν I***.

Ἡ παράγωγος τῆς ὡς ἄνω διανυσματικῆς συναρτήσεως $f'(t)$, $t \in I$, ἐάν ὑπάρχῃ, καλεῖται: ***ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς f ἐν I*** καί συμβολίζεται μέ $f''(t)$ εἴτε μέ $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$. Αὕτη ὑπάρχει, τότε καί μόνον τότε, ἄν ὑπάρχῃ ἡ $\frac{d^2 f_i(t)}{dt^2}$ $\forall\ i=1,2,\dots,p$ καί $\forall\, t \in I$, ἰσχύει δέ:

$$f''(t) = \left(f_1''(t), f_2''(t), \dots, f_p''(t)\right).$$

Διά τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἔχομεν:

$$\boxed{f^{(n)}(t) = \left(f_1^{(n)}(t), f_2^{(n)}(t), \dots, f_p^{(n)}(t)\right)}$$

Παραδείγματα: 1ον/ Νά ὑπολογισθῇ ἡ πρώτη καί ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $f(t) = (\text{συν}t, \text{ημ}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Λύσις: Ἔχομεν: $f'(t) = (-\text{ημ}t, \text{συν}t, 1)$ καί $f''(t) = (-\text{συν}t, -\text{ημ}t, 0)$.

2ον/ Νά ὑπολογισθῇ ἡ πρώτη καί δευτέρα παράγωγος τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $f(t) = (\text{ημ}t\,\text{συν}t, \text{συν}^2 t, \text{ημ}t)$ καί ἀκολούθως νά δειχθῇ ὅτι: $f(t) \cdot f'(t) = 0$.

Λύσις: Ἔχομεν μετά τάς παραγωγίσεις:

$$f'(t) = (\text{συν}2t, -\text{ημ}2t, \text{συν}t), \quad f''(t) = (-2\text{ημ}2t, -2\text{συν}2t, -\text{ημ}t).$$

Ὡς γνωστόν, ἐάν $F=(f_1,f_2,\dots,f_p)$ καί $G=(g_1,g_2,\dots,g_p)$, ἰσχύει:

$$F\cdot G=f_1\cdot g_1+f_2\cdot g_2+\cdots+f_p\cdot g_p$$

Ὅθεν: $f\cdot f'=(\text{ημ}t\,\text{συν}t,\ \text{συν}^2t,\ \text{ημ}t)\cdot(\text{συν}2t,-\text{ημ}2t,\text{συν}t)$

$$=\cdots=\text{ημ}t\,\text{συν}t\,(-\text{ημ}^2t-\text{συν}^2t)+\text{ημ}t\cdot\text{συν}t=0.$$

Οἱ βασικοί κανόνες παραγωγίσεως διανυσματικῶν συναρτήσεων πραγματικῆς μεταβλητῆς καλύπτονται ἀπό τάς κάτωθι προτάσεις:

<u>Πρότασις XIII – 2 - 1</u>. <u>Ἐάν</u> $f=(f_1,f_2,\dots,f_p)$ <u>καί</u> $g=(g_1,g_2,\dots,g_p)$ <u>εἶναι δύο παραγωγίσιμοι διανυσματικαί συναρτήσεις ὡρισμέναι εἰς ἕν διάστημα</u> $I\subset\mathbb{R}$ <u>καί</u> $\varphi: I\to\mathbb{R}$ <u>εἶναι μία παραγωγίσιμος πραγματική συνάρτησις, τότε διά κάθε</u> $t\in I$ <u>ἰσχύει</u>:

i) $\dfrac{d}{dt}(f\pm g)=\dfrac{df}{dt}\pm\dfrac{dg}{dt}$, ii) $\dfrac{d}{dt}(\varphi\cdot f)=\varphi\dfrac{df}{dt}+\dfrac{d\varphi}{dt}\cdot f$

iii) $\dfrac{d}{dt}(f\cdot g)=f\dfrac{dg}{dt}+g\dfrac{df}{dt}$.

<u>Ἀπόδειξις</u>. i) Ἡ ἀπόδειξις ὡς ἁπλῆ παραλείπεται.

Αἱ ii) καί iii) ἔχουν τόν τύπον τοῦ γινομένου, ἄν καί ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι διαφορετικός εἰς κάθε περίπτωσιν. Ἐφ' ὅσον ἡ μέθοδος τῆς ἀποδείξεως εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδία εἰς κάθε περίπτωσιν, θά ἀποδείξωμεν μόνον τήν iii).

Ὡς γνωστόν ἰσχύει:

$$f\cdot g=f_1\cdot g_1+f_2\cdot g_2+\cdots+f_p\cdot g_p=\sum_{i=1}^{p}f_i\cdot g_i,$$

ὅτε ἔχομεν:

$$\frac{d}{dt}(f\cdot g)=\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{p}f_i\cdot g_i\Big)=\sum_{i=1}^{p}f_i\,\frac{dg_i}{dt}+\sum_{i=1}^{p}g_i\cdot\frac{df_i}{dt}=f\cdot\frac{dg}{dt}+g\cdot\frac{df}{dt}.$$

<u>Πρότασις XIII – 2-2</u>. <u>Ἐάν</u> $f=(f_1,f_2,f_3)$ καί $g=(g_1,g_2,g_3)$ <u>εἶναι δύο παραγωγίσιμοι διανυσματικαί συναρτήσεις ὡρισμέναι εἰς ἕν διάστημα</u> $I\subset\mathbb{R}$, <u>τότε διά κάθε</u> $t\in I$ <u>ἰσχύει</u>:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(f\times g)=f\times\frac{dg}{dt}+\frac{df}{dt}\times g}$$

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἐφ' ὅσον αἱ $f(t)$ καί $g(t)$ εἶναι παραγωγίσιμοι διανυσματικαί συναρτήσεις, αὗται θά εἶναι καί συνεχεῖς (διατί;) καί συνεπῶς θά ἰσχύῃ:

$$\lim_{h\to 0}f(t+h)=f(t)\ ,\quad \lim_{h\to 0}g(t+h)=g(t).$$

Ἔστωσαν ἤδη t καί $t+h$ δύο σημεῖα τοῦ I, τότε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου (βλ. Ὁρισμόν XIII – 2-1) ἔχομεν:

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\times g(t)\big)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)\times g(t+h)-f(t)\times g(t)}{h} \qquad (1)$$

Τό δεύτερον μέλος τῆς (1) γράφεται καί ὡς ἑξῆς, ἄν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$0\equiv -f(t+h)\times g(t)+f(t+h)\times g(t):$$

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\times g(t)\big)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)\times g(t+h)-f(t+h)\times g(t)+f(t+h)\times g(t)-f(t)\times g(t)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f(t+h)\times\frac{g(t+h)-g(t)}{h}+\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times g(t)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}f(t+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times g(t)$$

$$=f(t)\times\frac{dg(t)}{dt}+\frac{df(t)}{dt}\times g(t),\ \text{διά κάθε } t\in I$$

Παραδείγματα: 1ον. Ἐάν $f(t)=(t,t^2,2t)$, $g(t)=(1+t^2,2-t,3)$ καί $\varphi(t)=t^2$, $t\in I\subset\mathbb{R}$, νά εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι:

$$\text{i) } \frac{d}{dt}(\varphi\cdot f),\quad \text{ii) } \frac{d}{dt}(f\cdot g),\quad \text{iii) } \frac{d}{dt}(f\times g).$$

Λύσις: i) Ἔχομεν, συμφώνως πρός τήν πρότασιν XIII – 2-1:

$$\frac{d}{dt}(\varphi\cdot f)=\varphi\frac{df}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\cdot f=(3t^2,4t^3,6t^2).$$

ii) ὁ εὐθύς ὑπολογισμός διά τό $f\cdot g$ δίδει:

$$\frac{d}{dt}(f\cdot g)=\frac{d}{dt}(t+t^3+2t^2-t^3+6t)=\frac{d}{dt}(7t+2t^2)=7+4t.$$

Ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τήν πρότασιν XIII – 2-1 διά τόν ἴδιον ὑπολογισμόν εὑρίσκομεν:

$$f\cdot\frac{dg}{dt}+g\cdot\frac{df}{dt}=(t,t^2,2t)\cdot(2t,-1,0)+(1+t^2,2-t,3)\cdot(1,2t,2)$$

$$=2t^2-t^2+0+1+t^2+4t-2t^2+6=7+4t.$$

iii) Ἐργαζόμενοι ὡς καί ἐν ii) μέ δύο διαφορετικούς τρόπους εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{d}{dt}(f\times g)=(10t-4)\,i+(6t^2-1)\,j+(2-4t-4t^3)\cdot k.$$

2ον/ Δείξατε ὅτι: ἐάν τό μέτρον μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως $R(t)$ εἶναι σταθερόν, τότε $R\,\frac{dR}{dt}=0$, ἐφ' ὅσον αἱ R καί $\frac{dR}{dt}$ εἶναι διάφοροι τῆς σταθερᾶς συναρτήσεως **0**.

Λύσις: Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $R\cdot R=|R|^2=C$. Αὐτή παραγωγιζομένη ὡς πρός t δίδει:

$$R\cdot\frac{dR}{dt}+\frac{dR}{dt}\cdot R=0,\ \text{ἤ}\ \ 2R\cdot\frac{dR}{dt}=0.$$

§ 3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΚΑΤΑ ΔΟΘΕΙΣΑΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΙΝ

Ἔστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^3$. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως διὰ κάθε $(x,y,z)\in U$ καὶ εἶναι συνεχεῖς. Ἔστω $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ U καὶ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$.

Ἔστω ἐπὶ πλέον καὶ τὸ σημεῖον $M(\xi+h,\eta+k,\zeta+\ell)$ μὲ $\overrightarrow{M_0M}\in U$ καὶ $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{u}$, ἤτοι

$$\overrightarrow{M_0M}=\lambda\cdot\vec{u},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Δίδομεν τώρα τὸν κάτωθι ὁρισμόν:

Ὁρισμὸς XIII – 3-1: ***Καλοῦμεν παράγωγον τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ σημεῖον $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, συντόμως κατευθυνομένη παράγωγος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον M_0 κατὰ τὴν κατεύθυνσιν $\vec{u}$, καὶ τὴν συμβολίζομεν μέ:***

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\vec{u}}\ \text{ἤ}\ f'_{\vec{u}}(M_0)$$

τὴν κάτωθι, ἂν ὑπάρχῃ, ὁριακὴν τιμήν:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\lambda},\ \lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 0$$

ὥστε:

$$\boxed{f'_{\vec{u}}(M_0)\underset{\text{ὁρ}}{=}\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\lambda}}$$

Λόγῳ τῶν ὑποθέσεων διὰ τὴν $f(x,y,z)$ θὰ ἔχωμεν:

$$f(\xi+h,\eta+k,\zeta+\ell)-f(\xi,\eta,\zeta)=f'_x(\xi,\eta,\zeta)\cdot h+f'_y(\xi,\eta,\zeta)\cdot k+f'_z(\xi,\eta,\zeta)\cdot\ell+\|M-M_0\|\cdot\varepsilon(\|M-M_0\|),$$

ὅπου $\varepsilon(\|M-M_0\|)\to 0$ τοῦ $M\to M_0$ κατὰ μῆκος τῆς θεωρηθείσης διευθύνσεως.

Λόγῳ τοῦ ὅτι $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{u}$ θὰ ἔχωμεν: $h=\lambda u_1$, $k=\lambda\cdot u_2$, $\ell=\lambda\cdot u_3$ καὶ $\|M-M_0\|=\lambda$.

Ὅθεν:

$$\frac{f(M)-f(M_0)}{\lambda}=f'_x(\xi,\eta,\zeta)\cdot\frac{h}{\lambda}+f'_y(\xi,\eta,\zeta)\frac{k}{\lambda}+f'_z(\xi,\eta,\zeta)\cdot\frac{\ell}{\lambda}+\varepsilon(\lambda).$$

Λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω σχέσεως διὰ $\lambda\to 0$ ἔχομεν:

$$\boxed{\frac{\partial f(M_0)}{\partial\vec{u}}=f'_{\vec{u}}(M_0)=f'_x(\xi,\eta,\zeta)\cdot u_1+f'_y(\xi,\eta,\zeta)\cdot u_2+f'_z(\xi,\eta,\zeta)u_3}\quad(1)$$

Ἡ σχέσις (1) μᾶς ἀποδεικνύει συγχρόνως τὴν ὕπαρξιν τῆς $f'_{\vec{u}}(M_0)$, πληρουμένων φυσικὰ τῶν προαναφερθεισῶν ὑποθέσεων διὰ τὴν $f(x,y,z)$ δηλ. τὴν συνέχεια τῶν f'_x, f'_y, f'_z.

Ἐπὶ πλέον ἐκ τῆς (1) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράγωγος τῆς f κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ

μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}\,(u_1,u_2,u_3)$ ἰσοῦται πρός τό ἐσωτερικόν γινόμενον τοῦ διανύσματος $\vec{u}$ ἐπί τό διάνυσμα πού ἔχει ὡς συντεταγμένας τάς: $f'_x(\xi,\eta,\zeta)$, $f'_y(\xi,\eta,\zeta)$, $f'_z(\xi,\eta,\zeta)$.

<u>Εἰδικαί περιπτώσεις</u>: Ἐάν $\vec{u}=(1,0,0)$, τότε: $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{u}} = f'_{\vec{u}}(M_0) = f'_x(\xi,\eta,\zeta)$,

δηλ. ἡ παράγωγος τῆς $f(x,y,z)$ εἰς τό σημεῖον $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ μοναδιαίου διανύσματος τοῦ ἄξονος τῶν x συμπίπτει μέ τήν μερικήν παράγωγον $f'_x(\xi,\eta,\zeta)$.

Ὁμοίως ἐάν $\vec{u}=(0,1,0)$ ἤ $\vec{u}=(0,0,1)$ θά ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{u}} = f'_y(\xi,\eta,\zeta) \text{ καί } \frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{u}} = f'_z(\xi,\eta,\zeta).$$

Μία ἰδιότης ἀπορρέουσα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\boxed{f'_{t\vec{u}}(M_0) = t\, f'_{\vec{u}}(M_0)}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1η). Τό πηλίκον $\dfrac{f(M)-f(M_0)}{\lambda}$ παριστᾷ τήν μέσην ταχύτητα μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως f κατά μῆκος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_0M}$.

2α). Ἡ ὡς ἄνω εἰσαχθεῖσα ἔννοια, ὅπως ἐξ ἄλλου φαίνεται ἐκ τῶν εἰδικῶν περιπτώσεων, περιέχει ὡς εἰδικήν περίπτωσιν ἐκείνην τῆς μερικῆς παραγώγου.

3η). Ἔστω ὅτι ἡ παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ ὑπάρχει διά κάθε κατεύθυνσιν $\vec{u}\,(u_1,u_2,u_3)$, τότε προφανῶς, θά ὑπάρχουν καί αἱ $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$. Τουναντίον <u>ἐνδέχεται νά ὑπάρχουν</u> ὅλαι αἱ <u>μερικαί παράγωγοι τῆς</u> $f(x,y,z)$, <u>χωρίς ὅμως αὐτό νά ἐξασφαλίζῃ τήν ὕπαρξιν τῆς παραγώγου τῆς</u> f <u>ὡς πρός κάθε κατεύθυνσιν</u> $\vec{u}$, ὡς δεικνύει τό κάτωθι παράδειγμα:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ἄν } xy=0 \\ 1, & \text{ἄν } xy\neq 0. \end{cases}$$

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης τάξεως τῆς f εἰς τό σημεῖον $(0,0)$ καί ἰσχύει:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}.$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τό διάνυσμα $\vec{u}\,(u_1,u_2)$ μέ $u_1 u_2 \neq 0$ καί $u_1^2+u_2^2=1$ καί ἄς ἐξετάσωμεν ἄν ὑπάρχῃ ἡ $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{u}}$.

Ἔχομεν:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{u}} \underset{\text{ὁρσ}}{=} \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\lambda u_1,\lambda u_2)-f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}.$$

Ἀλλά τό τελευταῖον ὅριον δέν ὑπάρχει, ὅθεν δέν ὑπάρχει εἰς τό σημεῖον $(0,0)$ ἡ παράγωγος τῆς f κατά τήν κατεύθυνσιν $\vec{u}$, καίτοι αἱ μερικαί παράγωγοι ὑπάρχουν.

4º) Ἡ ὕπαρξις τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως f εἰς ἓν σημεῖον $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ διά κάθε κατεύθυνσιν $\vec{u}$ δέν ἐξασφαλίζει τήν συνέχειαν τῆς f εἰς τό σημεῖον $M_0(\xi,\eta,\zeta)$, ὡς δεικνύει τό κάτωθι παράδειγμα:

Ἔστω ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{ἄν } x\neq 0\\[2ex] 0, & \text{ἄν } x=0\end{cases}$$

καί τό τυχόν μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{u}=(u_1,u_2)\neq\vec{0}$.

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τό σημεῖον $(0,0)$ κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\vec{u}$ καί μάλιστα ἰσχύει:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial\vec{u}}=\begin{cases}\dfrac{u_2^2}{u_1}, & \text{ἄν } u_1\neq 0\\[2ex] 0, & \text{ἄν } u_1=0\end{cases}$$

Ἐν τούτοις εἰς τό σημεῖον $(0,0)$ ἡ f δέν εἶναι συνεχής (διατί;).

Ἰδιότητες XIII-3-1. Ἔστωσαν $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ δύο συνεχεῖς συναρτήσεις ὡρισμέναι ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^3$ καί τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἡ παράγωγος διά κάθε $M(x,y,z)\in U$ κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$· ἰσχύουν τότε αἱ κάτωθι ἰδιότητες:

i) $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{u}}=0$, ἄν ἡ f εἶναι σταθερά, ii) $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial\vec{u}}=\dfrac{\partial f}{\partial\vec{u}}+\dfrac{\partial g}{\partial\vec{u}}$,

iii) $\dfrac{\partial(f\cdot g)}{\partial\vec{u}}=f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial\vec{u}}+g\cdot\dfrac{\partial f}{\partial\vec{u}}$, iv) $\dfrac{\partial(c\cdot f)}{\partial\vec{u}}=c\,\dfrac{\partial f}{\partial\vec{u}}$ διά κάθε σταθεράν c

v) $\dfrac{\partial}{\partial\vec{u}}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}-f\frac{\partial g}{\partial\vec{u}}}{g^2}$ $\forall(x,y,z)\in U$ μέ $g(x,y,z)\neq 0$.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων ἐπαφίεται ὡς ἄσκησις εἰς τόν ἀναγνώστην.

Παράδειγμα: Δίδεται ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. Νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἰς τό σημεῖον $M(1,1,1)$ κατά τό διάνυσμα $\vec{OM}$.

Λύσις: Εἶναι $\vec{OM}=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$. Λόγῳ τῆς (1) θά εἶναι:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial(\vec{OM})}=f'_x(1,1,1)\frac{1}{\sqrt3}+f'_y(1,1,1)\frac{1}{\sqrt3}+f'_z(1,1,1)\frac{1}{\sqrt3}$$

Ἐν προκειμένῳ ἔχομεν:

$$f'_x(x,y,z) = -x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \Longrightarrow f'_x(1,1,1) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$f'_y(x,y,z) = -y\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \Longrightarrow f'_y(1,1,1) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$f'_z(x,y,z) = -z\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \Longrightarrow f'_z(1,1,1) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Ὅθεν:

$$\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial \overline{OM}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -3\,\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

§ 4. ΚΛΙΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ (GRADIENT)

Ἔστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^3$. Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι α' τάξεως τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως διὰ κάθε $(x,y,z)\in U$ καὶ εἶναι συνεχεῖς. Δυνάμεθα λοιπὸν διὰ κάθε σημεῖον $(x,y,z)\in U$ νὰ ὁρίσωμεν τὸ διάνυσμα:

$i\cdot f'_x(x,y,z) + j\cdot f'_y(x,y,z) + k\, f'_z(x,y,z)$ τοῦ ὁποίου ἀρχὴ εἶναι τὸ σημεῖον (x,y,z).

Ὁρισμὸς XIII-4-1. *Καλοῦμεν κλίσιν (gradient) τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)$ -ἥτις πληροῖ τὰς ἀνωτέρω ὑποθέσεις εἰς τὸ σημεῖον $(x,y,z)\in U\subset\mathbb{R}^3$- τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν* $i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$.

Ταύτην δὲ συμβολίζομεν οὕτω grad f.

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμόν, προφανῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \vec{u}} = \vec{u}\cdot \text{grad} f(x,y,z)}$$

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι: Ἡ παράγωγος τῆς $f(x,y,z)$ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\vec{u}$ ἰσοῦται μὲ τὸ σχετικὸ μέτρο τῆς προβολῆς τοῦ διανύσματος grad$f(x,y,z)$ ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\vec{u}$.

Εἰδικῶς διὰ τὸν χῶρον $\mathbb{R}^2$ καὶ ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $z=f(x,y)$ τὸ gradient αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις: $\text{grad} f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς δύναται νὰ γενικευθῇ καὶ διὰ τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις $f(x_1,x_2,\dots,x_p)$ ὡρισμένων ἐπὶ ἑνὸς ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου τοῦ χώρου $\mathbb{R}^p$.

Δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν μερικῶν παραγώγων διαπιστοῦμεν εὐκόλως τάς κάτωθι ἰδιότητας τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως grad $f(x,y,z)$.

<u>Ἰδιότητες XIII-4-1.</u> <u>Ἰσχύουν τά κάτωθι</u>:

i) $\operatorname{grad}(\lambda\cdot f) = \lambda\cdot \operatorname{grad} f$, $\lambda =$ <u>σταθερά</u>

ii) $\operatorname{grad}(f) = 0$, <u>ἔνθα</u> f <u>σταθερά</u>

iii) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$

iv) $\operatorname{grad}(f\cdot g) = f\cdot \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$

v) $\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\cdot \operatorname{grad} f - f\cdot \operatorname{grad} g}{g^2}$, <u>ὅπου</u> $g(x)\neq 0$.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων ἐπαφίεται ὡς ἄσκησις εἰς τόν ἀναγνώστην.

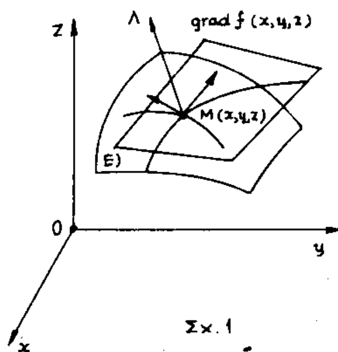
Ἤδη προτιθέμεθα νά δώσωμεν καί μίαν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως grad $f(x,y,z)$.

Πρός τοῦτο ἄς θεωρήσωμεν τήν ἐπιφάνειαν (E) τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις δίδεται ὑπό τήν πεπλεγμένην μορφήν $f(x,y,z)=0$.

Ἔστω τό σημεῖον $M(x,y,z)$ τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας (βλ. Σχ. 1). Καλοῦμεν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τό σημεῖον $M(x,y,z)$, τό ἐπίπεδον μέ ἐξίσωσιν:

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ὅτι τό διάνυσμα $\overrightarrow{M\Lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ εἶναι κάθετον εἰς τό ἀνωτέρω ἐπίπεδον.



Σχ. 1

Ἤτοι: <u>Τό</u> grad $f(x,y,z)$ <u>εἶναι ἕνα διάνυσμα κάθετον ἐπί τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας</u> (ἤτοι, <u>κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν)</u> $f(x,y,z)=0$ <u>εἰς τό σημεῖον</u> $M(x,y,z)$.

Τό δέ ἀπόλυτον μέτρον ἤ norm τοῦ διανύσματος grad $f(x,y,z)$ εἰς τό σημεῖον (x,y,z) θά εἶναι:

$$\|\operatorname{grad} f(x,y,z)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

<u>Ὁρισμός XIII-4-2.</u> *Καλοῦμεν ἀνάδελτα ἤ τελεστήν τοῦ Hamilton τόν διανυσματικόν τελεστήν:*

$$\nabla = i\,\frac{\partial}{\partial x} + j\,\frac{\partial}{\partial y} + k\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

Αὐτό καθ' ἑαυτό τό ∇ δέν ἔχει ἀριθμητικήν σημασίαν, ἀποκτᾶ ὅμως τοιαύτην ὅταν ἐφαρμόζεται εἰς μίαν συνάρτησιν.

Ὁ ἀνωτέρω τελεστής ἐφαρμοζόμενος εἰς τήν συνάρτησιν f δίδει:

$$\nabla f = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\cdot\frac{\partial}{\partial y} + k\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot f = i\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + j\,\frac{\partial f}{\partial y} + k\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = \text{grad}\, f.$$

Ὅθεν:

$$\boxed{\nabla f = \text{grad}\, f}$$

Ὁ τελεστής ∇ θά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἐξαιρετικά χρήσιμος. Μέ τό σύμβολον ∇ αἱ ἰδιότητες τῆς § 4-1 γράφονται:

$$\nabla\ (\lambda\cdot f) = \lambda\cdot\ \nabla f \text{ διά κάθε } \lambda \text{ σταθερόν}$$

$$\nabla f = 0, \text{ ἔνθα } f \text{ σταθερά}$$

$$\nabla (f+g) = \nabla f + \nabla g,\ \nabla(f\cdot g) = f\cdot\nabla g + g\cdot\nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}\ ,\ \text{ὅπου } g(x) \neq 0.$$

Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν τῆς $f = f(x,y)$ ἔχομεν:

$$\text{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,i + \frac{\partial f}{\partial y}\,j,\ \text{ἔνθα: } \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,i + \frac{\partial}{\partial y}\,j\,.$$

§ 5 ΑΠΟΚΛΙΣΙΣ (divergence)

Ἔστω ἡ διανυσματική συνάρτησις:

$$\vec{F}(x,y,z) = i\cdot P(x,y,z) + j\ Q(x,y,z) + k\cdot R(x,y,z) \qquad (1)$$

διά τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ καί εἶναι συνεχεῖς ἐπί ἑνός ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου $U \subseteq R^3$.

Ὁρισμός XIII-5-1. *Καλοῦμεν ἀπόκλισιν (divergence) τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως* (1) *καί τήν παριστῶμεν μέ* div $\vec{F}$ *τήν κάτωθι βαθμωτήν συνάρτησιν:*

$$\boxed{\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Τό div $\vec{F}$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἕνα καταχρηστικόν ἐσωτερικόν γινόμενον τῶν ∇ καί $\vec{F}$, ἤτοι:

$$\boxed{\text{div}\,\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}}$$

Τοῦτο δέ ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς:

$$\nabla\cdot\vec{F}=(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z})\cdot(i\cdot P+j\cdot Q+k\cdot R)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\text{div}\,\vec{F}.$$

Διά τήν διανυσματικήν συνάρτησιν:

$$\vec{F}(x,y)=i\cdot P(x,y)+j\,Q(x,y)$$

θά ἔχωμεν:

$$\text{div}\,\vec{F}(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\;.$$

Ἡ ἀπόκλισις ἔχει τάς ἀκολούθους ἰδιότητας:

Ἰδιότητες XIII-5-1. Ἰσχύουν τά κάτωθι:

i) $\text{div}\,(\lambda\cdot\vec{F})=\lambda\cdot\text{div}\,\vec{F}$ διά $\lambda\in\mathbb{R}$

ii) $\text{div}\,(\vec{F}+\vec{G})=\text{div}\,\vec{F}+\text{div}\,\vec{G}$

iii) $\text{div}\,(\varphi\cdot\vec{F})=\vec{F}\cdot\text{grad}\,\varphi+\varphi\cdot\text{div}\,\vec{F}$, ἔνθα φ βαθμωτή συνάρτησις.

(Πρέπει νά προσέξωμεν τό $\beta^{ον}$ μέλος τῆς ἰδιότητος (iii), ὅπου ὁ πρῶτος προσθετέος παριστᾷ ἐσωτερικόν γινόμενον δύο διανυσμάτων, ἐνῶ ὁ δεύτερος προσθετέος παριστᾷ γινόμενον δύο πραγματικῶν συναρτήσεων. Τό γινόμενον $\varphi\,\vec{F}$ τοῦ πρώτου μέλους παριστᾷ γινόμενον πραγματικῆς συναρτήσεως ἐπί τήν διανυσματικήν συνάρτησιν $\vec{F}$).

Ἀπόδειξις τῆς iii) ἰδιότητος. Ἔστω:

$$\vec{F}(x,y,z)=i\cdot P(x,y,z)+j\,Q(x,y,z)+k\cdot R(x,y,z)$$

ὅτε:

$$\varphi\cdot\vec{F}=i\,(\varphi\cdot P)+j\,(\varphi\cdot Q)+k\cdot(\varphi\cdot R).$$

Εἶναι δέ:

$$\begin{aligned}\text{div}\,(\varphi\cdot\vec{F})&=\frac{\partial(\varphi\cdot P)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi\cdot Q)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi\cdot R)}{\partial z}=\\&=(\varphi\frac{\partial P}{\partial x}+P\frac{\partial\varphi}{\partial x})+(\varphi\frac{\partial Q}{\partial y}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y})+(\varphi\frac{\partial R}{\partial z}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z})=\\&=\varphi(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})+(P\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z})=\\&=\varphi\cdot\text{div}\,\vec{F}+\vec{F}\cdot\text{grad}\,\varphi.\end{aligned}$$

Πρότασις XIII-5-1. Ἐάν ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x,y,z)$ ἔχῃ μερικάς παραγώγους δευτέρας τάξεως συνεχεῖς ἐπί τοῦ $U\subset\mathbb{R}^3$, τότε ἰσχύει:

$$\text{div}\,\text{grad}\,f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ὡς ἁπλῆ παραλείπεται.

Ὁ διαφορικός τελεστής $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ καλεῖται *διαφορικός τελεστής τοῦ Laplace* καί παρίσταται διά τοῦ Δ.

Ὅθεν τὴν παράστασιν:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

θὰ τὴν παριστῶμεν συχνὰ διὰ τῶν συμβόλων:

$$\text{div grad} f \;\text{ἢ}\; \Delta f \;\text{ἢ}\; \nabla^2 f=\nabla\cdot(\nabla f)$$

καὶ θὰ τὴν ὀνομάζωμεν **Laplacian** τῆς f.

Μία συνάρτησις f - ἡ ὁποία ἔχει συνεχεῖς δευτέρας τάξεως μερικὰς παραγώγους - τοιαύτη, ὥστε: $\text{div grad} f=0$ διὰ κάθε $(x,y,z)\in U$ καλεῖται: *ἁρμονικὴ συνάρτησις* ἐπὶ τοῦ U.

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ πληρουμένη ὑπὸ τῆς f καλεῖται ***ἐξίσωσις τοῦ Laplace***.

§6. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ (Rotation ἢ Curl)

Ἔστω ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις:

$$\vec{F}(x,y,z)=\mathbf{i}\,P(x,y,z)+\mathbf{j}\,Q(x,y,z)+\mathbf{k}\cdot R(x,y,z).$$

Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ P,Q,R ἔχουν μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^3$.

<u>Ὁρισμὸς XIII-6-1.</u> *Καλοῦμεν περιστροφὴν τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως* $\vec{F}$ *καὶ τὴν παριστῶμεν οὕτω* $\text{rot}\,\vec{F}$, *τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου*:

$$\text{rot}\,\vec{F}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Τὸ $\text{rot}\,\vec{F}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ καταχρηστικὸν ἐξωτερικὸν γινόμενον τῶν ∇ καὶ $\vec{F}$, ἤτοι:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}.}$$

Πρὸς τούτοις δίδεται ἡ ἀκόλουθος ἑρμηνεία χρησιμοποιοῦντες τὴν κάτωθι συμβολικὴν ὁρίζουσαν

$$\nabla\times\vec{F}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\mathbf{i}\cdot P+\mathbf{j}\cdot Q+\mathbf{k}\cdot R)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ Q&R\end{vmatrix}-\mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&R\end{vmatrix}+\mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ P&Q\end{vmatrix}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\text{rot}\,\vec{F}$$

Διά τήν διανυσματικήν συνάρτησιν $\vec{F}(x,y)=i\cdot P(x,y)+j\cdot Q(x,y)$ ἔχομεν:

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},$$

ἤτοι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν τό $\operatorname{rot}\vec{F}$ εἶναι πραγματική συνάρτησις.

Ἰδιότητες XIII – 6-1: Ἰσχύουν τά κάτωθι:

i) $\operatorname{rot}(\lambda\cdot\vec{F})=\lambda\cdot\operatorname{rot}\vec{F}$ διά $\lambda\in\mathbb{R}$

ii) $\operatorname{rot}(\vec{F}+\vec{G})=\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{rot}\vec{G}$

iii) $\operatorname{rot}(\varphi\cdot\vec{F})=(\operatorname{grad}\varphi)\times\vec{F}+\varphi\cdot\operatorname{rot}\vec{F}$.

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες δύνανται ν' ἀποδειχθοῦν δι' ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμοῦ.

(Τό $\varphi\cdot\vec{F}$ παριστᾷ τό γινόμενον τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως φ ἐπί τήν διανυσματικήν συνάρτησιν $\vec{F}$).

Πρότασις XIII – 6-1. Τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F}=i\,P+j\cdot Q+k\cdot R$ ἐάν αἱ συναρτήσεις P, Q, R ἔχουν μερικάς παραγώγους δευτέρας τάξεως συνεχεῖς ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^3$, τότε: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})=0$.

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν ὅτι:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{div}\left[i\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}=0.$$

Πρότασις XIII – 6-2. Ἐάν ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὡρισμένη ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ $\mathbb{R}^3$ ἔχῃ μερικάς παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως συνεχεῖς, τότε: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}f)=\mathbf{0}$.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλῆ.

Ὁρισμός XIII – 6-2. *Ἕνα διανυσματικόν πεδίον καλεῖται ἀστρόβιλον, τότε καί μόνον τότε, ἄν σέ κάθε σημεῖον τοῦ πεδίου ἡ περιστροφή εἶναι μηδέν, ἤτοι:*

$$\operatorname{rot}\vec{F}=0.$$

Οὕτω, π.χ. τό πεδίον:

$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=(x-2y+4z)\,i+(2x-3y-z)\,j+(4x-y+2z)\,k$ εἶναι ἀστρόβιλον.

Πράγματι, ἔχομεν ὅτι: $\operatorname{rot}\vec{F}=0$

• Κρίνομεν σκόπιμον νά όρίσωμεν καί άλλας έκφράσεις αί όποῖαι έμφανίζονται είς τήν Διανυσματικήν Άνάλυσιν καί αί όποῖαι παίζουν ένα σημαντικόν ρόλον είς αύτήν. Οὕτω:

i) Ἔστω ή διαν. συνάρτησις $\vec{F}=P(x,y,z)\,i+Q(x,y,z)\,j+R(x,y,z)\,k$.

ὁρίζομεν: $$\vec{F}\cdot\nabla=P\cdot\frac{\partial}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial}{\partial y}+R\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

Οὕτω τό άνωτέρω έσωτερικόν γινόμενον <u>παριστᾶ ένα τελεστήν</u> καί προφανῶς τοῦτο εἶναι διάφορον τοῦ $\nabla\cdot\vec{F}=\operatorname{div}\vec{F}$, τό όποῖον παριστᾶ ένα βαθμωτόν μέγεθος. Ἐφαρμοζόμενος ό άνωτέρω τελεστής είς τήν βαθμωτήν συνάρτησιν $f(x,y,z)$ δίδει:

$$(\vec{F}\cdot\nabla)f=P\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+R\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=\vec{F}\cdot(\nabla f).$$

ii) Τῆς άνωτέρω διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F}$ όρίζομεν ώς grad $\vec{F}$ τήν κάτωθι έκφρασιν:

$$\operatorname{grad}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,i+\frac{\partial}{\partial y}\,j+\frac{\partial}{\partial z}\,k\right)\cdot\left(P\cdot i+Q\,j+R\cdot k\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{F}$$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, τά έσωτερικά γινόμενα $\vec{F}\cdot\nabla$ καί $\nabla\cdot\vec{F}$ <u>οὔτε κάν συσχετίζονται</u>, καθότι τό ένα παριστᾶ τελεστήν, ένῶ τό άλλο παριστᾶ βαθμωτήν συνάρτησιν.

iii) Τέλος ή έκφρασις $\vec{F}\times\nabla$ όρίζεται ώς άκολούθως:

$$\vec{F}\times\nabla=\begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}=i\left(Q\frac{\partial}{\partial z}-R\frac{\partial}{\partial y}\right)+$$

$$+j\left(R\frac{\partial}{\partial x}-P\frac{\partial}{\partial z}\right)+k\left(P\frac{\partial}{\partial y}-Q\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Ὅθεν, ή άνωτέρω έκφρασις παριστᾶ, ώς λέγομεν, ένα ***διανυσματικόν τελεστήν***, έν άντιθέσει πρός τό $\nabla\times\vec{F}$ πού παριστᾶ ένα διάνυσμα.

Ὁ άνωτέρω τελεστής έφαρμοζόμενος έπί τῆς f πρέπει νά δίδει:

$$(\vec{F}\times\nabla)f=i\left(Q\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-R\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)+j\left(R\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-P\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)+k\left(P\cdot\frac{\partial f}{\partial z}-R\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

ἤτοι: $(\vec{F}\times\nabla)f=\vec{F}\times\nabla f$.

ΤΥΠΟΙ ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΕΣ ΤΟ ∇

Ἔστωσαν αἱ πραγματικαὶ συναρτήσεις $f(x,y,z)$ καὶ $g(x,y,z)$ ὡρισμεναι ἐπὶ ἑνός ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ R^3 καὶ ἔχουσαι μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχεῖς. Ἔστωσαν ἐπὶ πλέον καὶ αἱ διανυσματικαὶ συναρτήσεις $\vec{F}(x,y,z)$, $\vec{G}(x,y,z)$ ὡρισμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποσυνόλου καὶ τῶν ὁποίων αἱ συνιστῶσαι συναρτήσεις ἔχουν μερικάς παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως συνεχεῖς.

Θεωροῦντες τόν τελεστήν ∇ ὡς ἕνα συμβολικόν διάνυσμα δυνάμεθα νά ἔχωμεν τάς κάτωθι τύπους τινές τῶν ὁποίων ἐξάγονται ἄμεσα ἐκ τῶν προηγουμένων λεχθέντων:

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \Longleftrightarrow \text{grad}\,(f+g) = \text{grad}\,f + \text{grad}\,g$.
2. $\nabla\cdot(\vec{F}+\vec{G}) = \nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G} \Longleftrightarrow \text{div}\,(\vec{F}+\vec{G}) = \text{div}\,\vec{F}+\text{div}\,\vec{G}$
3. $\nabla\times(\vec{F}+\vec{G}) = \nabla\times\vec{F}+\nabla\times\vec{G} \Longleftrightarrow \text{rot}\,(\vec{F}+\vec{G}) = \text{rot}\,\vec{F}+\text{rot}\,\vec{G}$
4. $\nabla\cdot(f\cdot\vec{F}) = (\nabla f)\cdot\vec{F}+f(\nabla\cdot\vec{F})$
5. $\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{F})-\vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})$
6. $\nabla\times(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{F}\,(\nabla\cdot\vec{G})-\vec{G}\,(\nabla\cdot\vec{F})+(\vec{G}\cdot\nabla)\,\vec{F}-(\vec{F}\cdot\nabla)\,\vec{G}$.
7. $\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G}) = (\vec{F}\cdot\nabla)\,\vec{G}+(\vec{G}\cdot\nabla)\,\vec{F}+\vec{F}\times(\nabla\times\vec{G})+\vec{G}\times(\nabla\times\vec{F})$.
8. $\nabla\cdot(\nabla f) \equiv \nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (Laplacian τῆς f)
9. $\nabla\times(\nabla f)=0$, δηλ. ἡ περιστροφή τῆς κλίσεως τῆς f εἶναι μηδέν.
10. $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$, δηλ. ἡ ἀπόκλισις τῆς περιστροφῆς τῆς $\vec{F}$ εἶναι μηδέν.
11. $\nabla\times(\nabla\times\vec{F}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$.

§ 7. ΠΕΔΙΟΝ ΤΩΝ GRADIENTS – ΔΥΝΑΜΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

Ἔστω ἕνα βαθμωτόν πεδίον $f(M)$. Ἐάν εἰς κάθε σημεῖον $M(x,y,z)$ τοῦ βαθμωτοῦ πεδίου $f(M)$ θεωρήσωμεν τό διάνυσμα grad$f$ δημιουργοῦμεν ἕνα διανυσματικόν πεδίον, τό ὁποῖον εἶναι τό πεδίον τῶν gradients τῆς βαθμωτῆς συναρτήσεως f.

Δίδομεν τώρα τόν κάτωθι ὁρισμόν:

Ὁρισμός XIII-7-1. *Θά λέγωμεν ὅτι ἕνα διανυσματικόν πεδίον:*

$$\vec{F}(M) \equiv \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\cdot i + Q(x,y,z)\cdot j + R(x,y,z)\,k$$

ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ, ἐάν δύναται νά παρασταθῇ ὡς πεδίον τῶν gradients *τῆς*

βαθμωτῆς συναρτήσεως $f(M)$, ἤτοι ἄν:

$$\vec{F}(M) = \operatorname{grad} f(M). \qquad (1)$$

Δηλαδή, *ἄν ὑπάρχῃ μία βαθμωτή συνάρτησις* $f = f(x,y,z)$ *τοιαύτη ὥστε:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y,z), \; \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y,z), \; \frac{\partial f}{\partial z} = R(x,y,z) \qquad (2)$$

Ἡ συνάρτησις $f = f(x,y,z)$ καλεῖται τότε *δυναμικόν (δυναμική συνάρτησις)* τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{F}(M)$.

Ἐάν τό διανυσματικόν πεδίον $\vec{F}(M)$ ἀπορρέῃ ἐκ δύο δυναμικῶν, τότε αἱ δυναμικαί συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθεράν. Πράγματι, ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό $\vec{F}(M)$ ἀπορρέει ἐκ δύο δυναμικῶν συναρτήσεων f, g $(f \neq g)$ ἔχομεν:

$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g \Longrightarrow \operatorname{grad}(f-g) \equiv 0 \qquad (3)$$

Ἀλλά συμφώνως πρός τήν ἰδιότητα XIII-4-1 (ii) σελ.450 θά ἔχωμεν $f-g =$ σταθερά.

● <u>Ἰδιότης XIII-7-1</u>. <u>Αἱ γραμμαί διευθύνσεως τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου</u> $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ <u>εἶναι κάθετοι ἐπί τάς ἰσοσταθμικάς ἐπιφανείας</u> $f(x,y,z) = C$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ὡς γνωστόν, τό $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ εἶναι κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν $f(x,y,z) - c = 0$. Ἐξ ἄλλου ἐάν $d\vec{r}$ εἶναι τό ἐφαπτομενικόν στοιχεῖον τῆς διανυσματικῆς γραμμῆς τοῦ πεδίου $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ τότε, ὡς γνωστόν (βλ. σελ.440, τύπον (6)) θά ἔχωμεν $\operatorname{grad} f \times d\vec{r} = \mathbf{0}$. Ὅθεν, $d\vec{r} \parallel \operatorname{grad} f$, συνεπῶς τό $d\vec{r}$ εἶναι κάθετον ἐπί τήν ἰσοσταθμικήν ἐπιφάνειαν $f(x,y,z) - c = 0$.

● Ἤδη ἄς ἐξετάσωμεν ἐάν τό διανυσματ. πεδίον $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ.

Ἔχομεν: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = df$.

Ἤτοι, <u>ἡ</u> $f(x,y,z)$ <u>εἶναι ἡ δυναμική συνάρτησις τοῦ διαν. πεδίου</u> $\vec{F} = \operatorname{grad} f$.

Θέτοντες $(P,Q,R) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\oint_{(\gamma)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{(\gamma)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Ἐπομένως τό $\int_{\widehat{AM}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ἔχει τότε τιμήν, ἥτις ἐξαρτᾶται <u>μόνον</u>

ἀπό τήν ἀρχήν A καί τό τέλος M τοῦ δρόμου ὁλοκληρώσεως καί εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τόν δρόμον, ὅστις συνδέει τό σημεῖον A μέ τό M (βλέπε σχετικῶς καί Κεφ XI , σελίς 387). Συνεπῶς ἄν διατηρήσωμεν τό $A(x_0, y_0, z_0)$ σταθερόν καί μεταβάλομεν τό $M(x,y,z)$ μέσα εἰς τό πεδίον θά προκύψῃ μία συνάρτησις (βλ. σχετ. Κεφ XI , σελίς 389):

$$f(x,y,z) = \int_{\widehat{AM}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\widehat{AM}} P dx + Q dy + R dz = \int_{x_0}^{x} P(t,y,z) dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t,z) dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,t) dt + C \qquad (6)$$

ἥτις εἶναι ἕνα δυναμικόν (δυναμική συνάρτησις) τοῦ θεωρουμένου διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{F}(M)$, δηλαδή:

$$P(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

• Εἶναι τώρα εὔλογον νά ζητήσῃ κανείς τάς συνθήκας ὑπό τάς ὁποίας ἕνα διανυσματικόν πεδίον $\vec{F}(M)$ ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ. Τό ἀνωτέρω εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό ἐρώτημα: ἄν μᾶς δοθῇ τό πεδίον $\vec{F}(M)$, δηλαδή ἡ διανυσματική συνάρτησις $\vec{F}$, ὑπάρχει λύσις ὡς πρός f τῆς ἐξισώσεως: $\operatorname{grad} f = \vec{F}$;

Ἐάν δέ: $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ τό νά ἐπιλύσωμεν τήν ἐξίσωσιν $\operatorname{grad} f = \vec{F}$ σημαίνει νά εὕρωμεν μίαν βαθμωτήν συνάρτησιν $f = f(x,y,z)$, ἥτις νά ἱκανοποιῇ τάς τρεῖς ἐξισώσεις μέ μερικάς παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R(x,y,z) \qquad (7)$$

ὅπου P, Q, R εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις καί ἔχουν συνεχεῖς μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως.

Ὑπό τάς ἀνωτέρω ὑποθέσεις διά τάς P, Q, R καί ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τούς ὁρισμούς XIII – 6 – 1 καί XIII – 6 – 2 διατυποῦμεν τήν κάτωθι σπουδαίαν πρότασιν:

<u>Πρότασις XIII – 7 – 1.</u> <u>Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τό διανυσματικόν πεδίον $\vec{F}(M)$ ἀπορρέῃ ἐκ δυναμικοῦ εἶναι</u>: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, <u>ἡ δέ δυναμική συνάρτησις f δίδεται ὑπό τοῦ τύπου</u>:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y,z) dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t,z) dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,t) dt + C \qquad (8)$$

ὅπου (x_0, y_0, z_0) σημεῖον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς $\vec{F}(M)$.

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον) Ἔστω ὅτι τό διανυσμ. πεδίον $\vec{F}(M)$ ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ f, τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις (7).

Παραγωγίζοντες τάς δύο πρώτας ἐξισώσεις τῆς (7) ὡς πρός y καί x ἀντιστοίχως λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ἡ συνέχεια ὅμως τῶν $\frac{\partial P}{\partial y}$ καί $\frac{\partial Q}{\partial x}$ συνεπάγεται τήν συνέχεια ἄρα καί τήν ἰσότητα (βλ. Προτ. ΙΙΙ-6-1) τῶν δύο μικτῶν μερικῶν παραγώγων $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ καί $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Ἑπομένως ἔχομεν τήν ἰσότητα:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (9)$$

Ἀναλόγως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad (10)$$

Ἐκ τῶν (9) καί (10) συνάγομεν ὅτι: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

<u>Ἱκανόν</u>. Ἔστω $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, τότε πληροῦνται αἱ σχέσεις:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad (11)$$

Πληρουμένων τῶν ἀνωτέρω τριῶν σχέσεων ὑπάρχει (βλ. σχ. Κεφ. ΧΙ, σελὶς 390) μία συνάρτησις $f(x,y,z)$ τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = df \qquad (12)$$

μάλιστα δέ ἡ συνάρτησις f δίδεται τότε ὑπό τοῦ τύπου (8) (βλ. Κεφ. ΧΙ σελ. 391).

Ἡ σχέσις (12) εἶναι ἰσοδύναμος πρός τάς:

$$P(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

καί ὅθεν αἱ σχέσεις (11), δηλ. ἡ $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, συνεπάγεται ὅτι τό διαν. πεδίον $\vec{F}(M)$ ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ.

Ἡ πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη πλήρως.

Ἐφαρμογή: Δείξατε ὅτι τό διανυσμ. πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = 2xyz\,i + x^2 z\,j + x^2 y\,k$$

ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ καί νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν ἰσοσταθμικῶν ἐπιφανειῶν.

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$P(x,y,z)=2xyz\ ,\ Q(x,y,z)=x^2z,\ R(x,y,z)=x^2y\ ,\ \text{ὅτε}:$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xz=\frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=x^2=\frac{\partial R}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=2xy=\frac{\partial R}{\partial x}$$

Ἄρα rot $\vec{F}=0$ καί ἐπομένως τό διανυσμ. πεδίον $\vec{F}$ ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ, ἡ δέ $f(x,y,z)$ εἶναι:

$$f(x,y,z)=\int_0^x 2tyz\,dt+\int_0^y 0^2 z\,dt+\int_0^z 0\,dt+c'=x^2yz+c'$$

καί ἐπομένως αἱ ἰσοσταθμικαί ἐπιφάνειαι ἔχουν ἐξισώσεις:

$$x^2yz+c'=c.$$

§8. <u>ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΡΟΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ</u>

Ἔστω ἕνα διανυσματικόν πεδίον $\vec{F}(M)=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$, γ μία λεία κλειστή καί προσανατολισμένη καμπύλη καί S μία λεία καί προσανατολισμένη (δίπλευρος) ἐπιφάνεια μέ μοναδιαῖον κάθετον ἐπ' αὐτῆς διάνυσμα τό $\vec{n}$.

Δίδομεν τώρα τούς κάτωθι ὁρισμούς:

<u>Ὁρισμός XIII – 8-1</u>. *Καλοῦμεν κυκλοφορίαν τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου* $\vec{F}(M)$ *κατά μῆκος τῆς κλειστῆς καμπύλης* γ *τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα.*

$$\oint_{\gamma^+}\vec{F}\,d\vec{r}=\oint_{\gamma^+}Pdx+Qdy+Rdz \qquad (1)$$

Εἶναι φανερόν ὅτι ἄν $\vec{F}$ εἶναι ἕνα πεδίον δυνάμεων, τότε τό ὁλοκλήρωμα (1) παριστᾷ τό ἔργον τῆς $\vec{F}$ κατά μῆκος τῆς καμπύλης γ.

<u>Ὁρισμός XIII – 8 – 2</u>. *Καλοῦμεν ὁλικήν ροήν τοῦ διανυσμ. πεδίου* $\vec{F}(M)$ *διά μέσου τῆς ἐπιφανείας* S, *τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα*:

$$\iint_S(\vec{F}\vec{n})\,ds=\iint_S F_n\cdot ds \qquad (2)$$

ὅπου F_n *παριστᾷ τό μέτρον τῆς προβολῆς τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως* $\vec{F}$

ἐπί τῆς διευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\vec{n}$.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό $\vec{F}(M)$ εἶναι τό πεδίον τῶν ταχυτήτων τῶν μορίων ἑνός ρευστοῦ, ἡ ὀλική ροή τοῦ διανυσμ. πεδίου $\vec{F}$ διά μέσου τῆς ἐπιφανείας S εἶναι ἴση μέ τήν ποσότητα τοῦ ρευστοῦ πού διέρχεται διά μέσου τῆς ἐπιφανείας εἰς τήν μονάδα τοῦ χρόνου καί κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\vec{n}$ (παροχή).

Εἶναι φανερόν ὅτι ἐάν τό διανυσμ. πεδίον $\vec{F}(M)$ εἶναι ἄλλης φύσεως ἡ (ὀλική) ... τοῦ πεδίου δύναται νά ἔχῃ κάποιαν ἄλλην φυσικήν σημασίαν.

39. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΥΠΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΝ ΔΙΑΤΥΠΩΣΙΝ

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά ἐπαναλάβωμεν, ἀλλά ὑπό διανυσματικήν διατύπωσιν, τά γνωστά ἐκ τῶν Κεφ. XI-XII θεωρήματα: τῆς ἀποκλίσεως, τοῦ Green, τοῦ Stokes καί σχετικά ὁλοκληρωτικά θεωρήματα.

Ἔστω S μία κλειστή ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περικλείει ἕνα τριδιάστατο χωρίον ὄγκου V. Ἡ ἐπιφάνεια S καί τό χωρίον V ὑποθέτομεν ὅτι ἔχουν τάς κάτωθι ἰδιότητας:

(i) Τό τριδιάστατον χωρίον V προβάλλεται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου Oxy εἰς ἕν διδιάστατον χωρίον D. Ὁ κύλινδρος προβολῆς τοῦ V ἐπί τοῦ ἐπιπέδου Oxy μέ γενέτειραν παράλληλον πρός τόν Oz ἐφάπτεται τοῦ V κατά μίαν καμπύλην (Γ), ἡ ὁποία χωρίζει τήν ἐπιφάνειαν S εἰς δύο τμήματα. Ἀναλόγως διά τάς προβολάς τοῦ V ἐπί τῶν ἐπιπέδων Oyz καί Ozx.

(ii) Τό σύνορον τοῦ χωρίου V τέμνεται ὑπό εὐθειῶν παραλλήλων πρός τούς ἄξονας εἰς δύο τό πολύ σημεῖα.

(iii) Ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι δύο ὄψεων.

(iv) Ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι λεία ἤ κατά τμήματα λεία.

Ὑπό τάς ἀνωτέρω προϋποθέσεις ἰσχύουν οἱ κάτωθι ὁλοκληρωτικοί τύποι:

(I) Ὁ τύπος Gauss-Ostrogradsky ἤ ὁλοκληρωτικός τύπος κατά div:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dv = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{F})\,dv \qquad (1)$$

Πράγματι, ἄν $\vec{F}=(P,Q,R)$ καί $\vec{n}=(\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\gamma)$ εἶναι τό μοναδιαῖον κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν S διάνυσμα, ἔχομεν (βλ. Κεφ. XII, σελίς 430, τύπος (θ)):

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Ἀλλά:
$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F},$$

ὅθεν:
$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dv = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{F})\,dv.$$

(II) <u>Πρῶτος ὁλοκληρωτικός τύπος τοῦ Green</u>: Ἔστωσαν δύο βαθμωταί συναρτήσεις f, g μέ συνεχεῖς μερικάς παραγώγους δευτέρας τάξεως, τότε ἰσχύει ὁ κάτωθι τύπος:

$$\boxed{\iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\right)ds = \iint_S (f\,\nabla g)\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_V \left[f\,\nabla^2 g + (\nabla f)\cdot(\nabla g)\right]dv} \qquad (2)$$

Πράγματι, ὁ τύπος (1) διά $\vec{F}=f\nabla g$ γίνεται:

$$\iiint_V [\nabla\cdot(f\nabla g)]\,dv = \iint_S (f\nabla g)\cdot\vec{n}\,ds \qquad (\alpha)$$

Ἀλλά: $\nabla\cdot(f\nabla g) = f\,(\nabla\cdot\nabla g)+(\nabla f)\cdot(\nabla g) = f\cdot\nabla^2 g + (\nabla f)(\nabla g)$ καί $\nabla g\cdot\vec{n}$ εἶναι ἴσον μέ τήν κατευθυνομένην παράγωγον $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ τῆς g κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\vec{n}$.
Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (α) γίνεται:

$$\iiint_V \left[f\cdot\nabla^2 g + (\nabla f)\cdot(\nabla g)\right]dv = \iint_S f\nabla g\cdot\vec{n}\,ds = \iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\right)ds.$$

(III) <u>Δεύτερος ὁλοκληρωτικός τύπος τοῦ Green</u>: Μέ τάς ὡς ἄνω ὑποθέσεις διά τάς f καί g ἰσχύει ὁ κάτωθι τύπος:

$$\boxed{\iint_S \left(f\,\frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right)ds = \iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\,\vec{n}\,ds = \iiint_V \left[f\nabla^2 g - g\,\nabla^2 f\right]dV} \qquad (3)$$

ὅστις καλεῖται: *συμμετρική μορφή τοῦ θεωρήματος Green*.

Πράγματι, δι' ἐναλλαγῆς τῶν f καί g εἰς τήν (2) λαμβάνομεν:

$$\iint_S \left(g \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right) ds = \iint_S g \cdot \nabla f \cdot \vec{n}\, ds = \iiint_V \left[g \cdot \nabla^2 f + (\nabla g)\cdot(\nabla f)\right] dv \qquad (2^*)$$

Ἀφαιροῦντες δέ τήν (2*) ἀπό τήν (2) λαμβάνομεν τήν (3).

<u>Παρατήρησις</u>: Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι: $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f) = \Delta f$ καί $\nabla^2 g = \Delta g$ οἱ ὁλοκληρωτικοί τύποι (2) καί (3) συνήθως γράφονται ὑπό τήν μορφήν:

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \iint_S f\ \nabla g \cdot \vec{n}\, ds = \iiint_V (f \Delta g + \text{grad} f \cdot \text{grad} g)\, dv \qquad (2')$$

ἀντιστοίχως:

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right) ds = \iint_S (f \nabla g - g \nabla f)\cdot \vec{n}\, ds = \iiint_V (f \Delta g - g \Delta f)\, dv \qquad (3')$$

(IV) <u>Ὁ τύπος τοῦ Stokes</u>: Ἔστω S μία προσανατολισμένη ἀνοικτή ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περιορίζεται ὑπό τῆς κλειστῆς καμπύλης Γ. Τότε ἰσχύει ὁ κάτωθι τύπος:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds \qquad (4)$$

Πράγματι, ἄν $\vec{F} = P \cdot i + Q j + R \cdot k$ καί $\vec{n} = i \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + j \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + k \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$, τότε τό δεύτερον μέλος τοῦ τύπου (11) τῆς σελίδος 426 γράφεται:

$$\iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds \qquad (\alpha)$$

ἐνῶ τό:

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (\beta)$$

Ἐκ τῶν (α) καί (β) λαμβάνομεν τόν τύπον (4).

- Δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν ὁλοκληρώματα διανυσματικῶν συναρτήσεων μέ τιμάς εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^3$ ἤ καί γενικώτερον εἰς τόν χῶρον $\mathbb{R}^n$. Οὕτω π.χ. ἐάν ἔχωμεν

τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν $\vec{F}: V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τὸ ὁλοκλήρωμα $\iiint_V \vec{F}\,dv$ (διάνυσμα) ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως: Διὰ κάθε σταθερὸν διάνυσμα $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\vec{c} \cdot \iiint_V \vec{F}\,dv = \iiint_V \vec{c} \cdot \vec{F}\,dv \qquad (1) .$$

ὅπου τὸ β^{ον} μέλος τῆς (1) εἶναι τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως $\vec{c} \cdot \vec{F}$ (ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν $\vec{c}$ καὶ $\vec{F}$), ἐνῷ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τοῦ διανύσματος $\vec{c}$ καὶ τοῦ ὁριζομένου διανύσματος (ὁλοκληρώματος) $\iiint_V \vec{F}\,dv$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζονται καὶ τὰ ἐπιφανειακὰ ὁλοκληρώματα διανυσματικῆς συναρτήσεως, π.χ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F}$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S ὁρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως: $\vec{c} \cdot \iint_S \vec{F}\,ds = \iint_S \vec{c} \cdot \vec{F}\,ds \quad (2)$

ὅπου τὸ β^{ον} μέλος τῆς (2) εἶναι τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τῆς S τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως $\vec{c} \cdot \vec{F}$, ὅπου $\vec{c}$ τυχὸν σταθερὸν διάνυσμα τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$, ἐνῷ τὸ α^{ον} μέλος εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τοῦ διανύσματος $\vec{c}$ καὶ τοῦ ὁριζομένου $\iint_S \vec{F}\,ds$.

(V) Ὁ ὁλοκληρωτικὸς τύπος κατὰ grad:

$$\boxed{\iint_S f\vec{n}\,ds = \iiint_V \operatorname{grad} f \cdot dv = \iiint_V \nabla f\,dv} \qquad (5)$$

Πράγματι, ὁ τύπος (1) διὰ $\vec{F} = f \cdot \vec{c}$, ὅπου $\vec{c}$ = σταθερὸν διάνυσμα, γίνεται:

$$\iint_S f\vec{c} \cdot \vec{n}\,ds = \iiint_V \nabla \cdot (f\vec{c})\,dv$$

Ἀλλά:

$$\nabla \cdot (f\vec{c}) = (\nabla f) \cdot \vec{c} + 0 = \vec{c} \cdot \nabla f$$

καί

$$f\vec{c} \cdot \vec{n} = \vec{c} \cdot (f\vec{n})$$

Ὅθεν:

$$\iint_S \vec{c} \cdot (f\vec{n})\,ds = \iiint_V \vec{c} \cdot \nabla f\,dv$$

ἤ

$$\vec{c} \cdot \iint_S f\vec{n}\,ds = \vec{c} \cdot \iiint_V \nabla f\,dv$$

καὶ ἐφ' ὅσον $\vec{c}$ εἶναι ἕνα αὐθαίρετον σταθερὸν διάνυσμα ἔχομεν:

$$\iint_S f\vec{n}\,ds = \iiint_V \nabla f\,dv = \iiint_V \operatorname{grad} f\,dv.$$

(vi) <u>ὁ ὁλοκληρωτικὸς τύπος κατὰ rot</u>:

$$\boxed{\iint_S \vec{n}\times\vec{G}\,ds = \iiint_V \mathrm{rot}\,\vec{G}\,dv = \iiint_V (\nabla\times\vec{G})\,dv} \qquad (6)$$

Πράγματι, ὁ τύπος (1) διὰ $\vec{F}=\vec{G}\times\vec{C}$, ὅπου $\vec{C}$ = σταθ. διάνυσμα γίνεται:

$$\iint_S (\vec{G}\times\vec{C})\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot(\vec{G}\times\vec{C})\,dv$$

Ἀλλά:

$$\nabla\cdot(\vec{G}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{G}) - \vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{G})$$

καί

$$(\vec{G}\times\vec{C})\cdot\vec{n} = \vec{G}\cdot(\vec{C}\times\vec{n}) = (\vec{C}\times\vec{n})\cdot\vec{G} = \vec{C}\cdot(\vec{n}\times\vec{G})$$

Ὅθεν:

$$\iint_S \vec{C}\cdot(\vec{n}\times\vec{G})\,ds = \iiint_V \vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{G})\,dv$$

ἤ

$$\vec{C}\cdot\iint_S \vec{n}\times\vec{G}\,ds = \vec{C}\cdot\iiint_V (\nabla\times\vec{G})\,dv$$

καὶ ἐφ' ὅσον τὸ $\vec{C}$ εἶναι ἕν αὐθαίρετον σταθερὸν διάνυσμα ἔχομεν:

$$\iint_S \vec{n}\times\vec{G}\,ds = \iiint_V (\nabla\times\vec{G})\,dv = \iiint_V \mathrm{rot}\,\vec{G}\,dv.$$

• Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω δύο ἀξιολόγους προτάσεις:

<u>**Πρότασις XIII – 9-1**</u>. Ἐάν div $\vec{F}$ <u>παριστᾷ τὴν ἀπόκλισιν τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου</u> $\vec{F}$, <u>τότε ἰσχύει</u>:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds}{\Delta V},$$

<u>ὅπου</u> ΔV <u>εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας</u> ΔS.

<u>**Ἀπόδειξις**</u>: Ἐκ τοῦ ὁλοκλ. τύπου κατὰ div ἔχομεν:

$$\iiint_{\Delta V} \mathrm{div}\,\vec{F}\,dv = \iint_{\Delta S} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ θεωρήματος μέσης τιμῆς δι' ὁλοκληρώματα, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος γίνεται:

$$\overline{\mathrm{div}\,\vec{F}}\iiint_{\Delta V} dv = \overline{\mathrm{div}\,\vec{F}}\cdot\Delta V \qquad (2)$$

ὅπου $\overline{\operatorname{div}\vec{F}}$ εἶναι μία τιμή τοῦ $\operatorname{div}\vec{F}$ μεταξύ τῆς μεγίστης καί ἐλαχίστης τιμῆς τοῦ $\operatorname{div}\vec{F}$ διά μέσου τοῦ ΔV.

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$\overline{\operatorname{div}\vec{F}} = \frac{\iint\limits_{\Delta S} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds}{\Delta V} \qquad (3)$$

λαμβάνοντες τά ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (3) καθώς τό $\Delta v \to 0$, ἡ $\overline{\operatorname{div}\vec{F}}$ τείνει πρός τό $\operatorname{div}\vec{F}$, ὅθεν:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds}{\Delta V}$$

Σημείωσις: Ἀπό φυσικήν σκοπιάν ὁ λόγος:

$$\frac{\iint\limits_{\Delta S} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds}{\Delta V}$$

παριστᾷ τήν ροήν ἀνά μονάδα ὄγκου τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{F}$ διά μέσου τῆς ἐπιφανείας Δs.

Πρότασις XIII – 9-2. Ἐάν f εἶναι μία βαθμωτή συνάρτησις καί $\vec{F}$ μία διανυσματική, τότε ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι:

$$\text{(i)}\ \operatorname{grad} f = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} f\vec{n}\,ds}{\Delta V}, \quad \text{ii)}\ \operatorname{rot}\vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \vec{n}\times\vec{F}\,ds}{\Delta V}$$

ὅπου Δv εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου, τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῆς στοιχειώδους ἐπιφανείας Δs.

Ἀπόδειξις: (i) Ἐκ τοῦ ὁλοκλ. τύπου κατά grad ἔχομεν:

$$\iiint\limits_{\Delta V} \operatorname{grad} f\,dv = \iint\limits_{\Delta S} f\vec{n}\,ds,$$

ἐξ οὗ:

$$\iiint\limits_{\Delta V} (\operatorname{grad} f\cdot\vec{i})\,dv = \iint\limits_{\Delta S} f\vec{n}\cdot\vec{i}\,ds.$$

Ἔχοντες τώρα ὑπ' ὄψιν τήν σχέσιν (3) τῆς προηγουμένης προτάσεως λαμβάνομεν:

$$\overline{\operatorname{grad} f\cdot\vec{i}} = \frac{\iint\limits_{\Delta S} f\vec{n}\cdot\vec{i}\,ds}{\Delta V}$$

όπου $\overline{\text{grad}f\cdot\vec{i}}$ είναι μία μέση τιμή μεταξύ τοῦ maximum καί τοῦ minimum τοῦ $\text{grad}f\cdot\vec{i}$ διά μέσου τοῦ Δv.

Λαμβάνοντες τά ὅρια τῆς τελευταίας σχέσεως καθώς τό $\Delta v \to 0$, τό $\overline{\text{grad}f\cdot\vec{i}}$ τείνει πρός τό $\text{grad}f\cdot\vec{i}$, ὅθεν:

$$\text{grad}f\cdot\vec{i} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\iint_{\Delta S} f\cdot\vec{n}\cdot\vec{i}\cdot ds}{\Delta V} \qquad (1)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$\text{grad}f\cdot\vec{j} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\iint_{\Delta S} f\cdot\vec{n}\cdot\vec{j}\,ds}{\Delta V} \qquad (2)$$

καί

$$\text{grad}f\cdot\vec{k} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\iint_{\Delta S} f\cdot\vec{n}\cdot\vec{k}\,ds}{\Delta V} \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τάς (1), (2), (3) ἀντιστοίχως μέ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ καί προσθέτοντες κατά μέλη ταύτας, ἔχοντες δέ ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\vec{\text{grad}}f = (\text{grad}f\cdot\vec{i})\,\vec{i} + (\text{grad}f\cdot\vec{j})\,\vec{j} + (\text{grad}f\cdot\vec{k})\,\vec{k}$$

καί

$$\vec{n} = (\vec{n}\cdot\vec{i})\cdot\vec{i} + (\vec{n}\cdot\vec{j})\,\vec{j} + (\vec{n}\cdot\vec{k})\,\vec{k}$$

λαμβάνομεν τό ἀποδεικτέον.

ii) Ἐκ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τύπου κατά rot ἔχομεν:

$$\iiint_{\Delta V} \text{rot}\,\vec{F}\,dv = \iint_{\Delta S} \vec{n}\times\vec{F}\,ds.$$

Ἐργαζόμενοι τώρα ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν (i) δυνάμεθα εὐκόλως νά δείξωμεν:

$$(\text{rot}\,\vec{F})\cdot\vec{i} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}(\vec{n}\times\vec{F})\cdot\vec{i}\,ds}{\Delta V} \qquad (4)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$(\text{rot}\,\vec{F})\vec{j} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}(\vec{n}\times\vec{F})\cdot\vec{j}\,ds}{\Delta V} \qquad (5)$$

καί

$$(\text{rot}\,\vec{F})\cdot\vec{k} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}(\vec{n}\times\vec{F})\cdot\vec{k}\,ds}{\Delta v} \qquad (6)$$

Πολλαπλασιάζοντες τάς (4), (5), (6) ἀντιστοίχως μέ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ καί προσθέτοντες ἐν συνεχείᾳ κατά μέλη λαμβάνομεν τό ἀποδεικτέον.

§10. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΑΙ ΕΙΣ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΟΥΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ

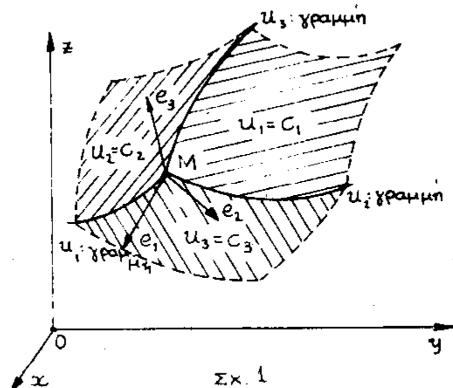
I. Ἔστω ὅτι αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι (x,y,z) ἑνός σημείου Μ ἐκφράζονται ὡς συναρτήσεις τῶν u_1, u_2, u_3 ὑπό τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3). \qquad (1)$$

Ἐφ' ὅσον ἡ Ἰακωβιανή $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u_1,u_2,u_3)} \neq 0$, τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) ἐπιλυόμενον ὡς πρός u_1, u_2, u_3 δίδει:

$$u_1 = u_1(x,y,z), \quad u_2 = u_2(x,y,z), \quad u_3 = u_3(x,y,z) \qquad (2)$$

Ὡς γνωστόν (βλ. Κεφ. VIII, §3) δοθέντος ἑνός σημείου Μ μέ ὀρθογωνίους συντεταγμένας (x,y,z) ἐκ τοῦ συστήματος (2) δυνάμεθα νά ἀντιστοιχίσωμεν μονοσημάντως τάς συντεταγμένας (u_1, u_2, u_3), αἱ ὁποῖαι ὡς γνωστόν καλοῦνται ***καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι τοῦ*** Μ. Οὕτω αἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) ὁρίζουν ἕναν ***μετασχηματισμόν τῶν συντεταγμένων***. Αἱ ἐπιφάνειαι $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$, ὅπου c_1, c_2, c_3 σταθεραί, καλοῦνται ***συντεταγμέναι ἐπιφάνειαι*** καί ἕκαστον ζεῦγος ἀπό αὐτάς τάς ἐπιφανείας τέμνεται κατά μίαν γραμμήν καλουμένη ***συντεταγμένη γραμμή*** (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

Εἰς τήν περίπτωσιν τομῆς αὐτῶν τῶν ἐπιφανειῶν κατά ὀρθήν γωνίαν, αἱ καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι σχηματίζουν ἕνα ***ὀρθοκανονικόν σύστημα***. Αἱ u_1, u_2 καί u_3 συντεταγμέναι γραμμαί ἑνός καμπυλογράμμου συστήματος εἶναι ἀνάλογοι πρός τάς συντεταγμένας x, y, z ἑνός ὀρθογωνίου συστήματος.

Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω δι' ἑκάστου σημείου $M(x_0, y_0, z_0)$ διέρχονται τρεῖς ἐπιφάνειαι ἤτοι αἱ $u_1(x,y,z) = u_1(x_0,y_0,z_0)$, $u_2(x,y,z) = u_2(x_0,y_0,z_0)$ καί $u_3(x,y,z) = u_3(x_0,y_0,z_0)$. Θά ὑποθέσωμεν ὅτι αὐταί αἱ τρεῖς ἐπιφάνειαι τέμνονται μεταξύ των ὀρθογωνίως. Αἱ ἐπιφάνειαι τεμνόμεναι ἀνά δύο θά μᾶς δώσουν τρεῖς γραμμάς αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὀρθογωνίως εἰς τό σημεῖον $M(x_0, y_0, z_0)$. Ἡ καμπύλη τῆς τομῆς τῶν ἐπιφανειῶν $u_1 = c_1$ καί $u_2 = c_2$ θά καλῆται u_3 γραμμή, ἐπειδή κατά μῆκος αὐτῆς τῆς γραμμῆς μόνον ἡ u_3 μεταβάλλεται.

Ἔστωσαν $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ τά μοναδιαῖα διανύσματα διερχόμενα διά τοῦ σημείου $M(x_0, y_0, z_0)$ ἐφαπτομενικά τῶν γραμμῶν u_1, u_2, u_3 ἀντιστοίχως. Ἤδη τό ∇u_3 εἶναι κάθετον εἰς τήν ἐπιφάνειαν $u_3(x,y,z) = u_3(x_0, y_0, z_0)$ καί κατά συνέπειαν τό ∇u_3 εἶναι παράλληλον πρός τό $\mathbf{e}_3$. Ἐντεῦθεν $\mathbf{e}_3 = h_3 \cdot \nabla u_3$ (3) ὅπου h_3 εἶναι ἕνας βαθμωτός παράγων τῆς ἀναλογίας μεταξύ τῶν $\mathbf{e}_3$ καί ∇u_3.

Ἔστω τώρα $d\mathbf{r}_3$ ἕνα ἐφαπτομενικόν διάνυσμα κατά μῆκος τῆς καμπύλης u_3, τότε $|d\mathbf{r}_3| = d\ell_3$. Προφανῶς θά ἔχωμεν $d\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = d\ell_3$ καί $d\mathbf{r}_3 \cdot u_3 = d\mathbf{r}_3 \cdot h_3 \nabla u_3$.

Εἶναι δέ, $d\ell_3 = d\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = d\mathbf{r}_3 \cdot h_3 \nabla u_3 = h_3 \cdot d\mathbf{r}_3 \cdot \nabla u_3$ (4)

Ἔστω $\mathbf{r}_3 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \Longrightarrow d\mathbf{r}_3 = dx\,\mathbf{e}_1 + dy\,\mathbf{e}_2 + dz\,\mathbf{e}_3$ (5)

Ἐξ ἄλλου $\nabla u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_3}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z}\mathbf{e}_3 = e^3$ (6)

Διά πολλαπλασιασμοῦ τῶν (5) καί (6) ἐσωτερικῶς λαμβάνομεν:

$$d\mathbf{r}_3 \cdot \nabla u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x}dx + \frac{\partial u_3}{\partial y}dy + \frac{\partial u_3}{\partial z} = du_3 \quad (7)$$

Ὅθεν, ἡ (4) λόγῳ τῆς (7) γράφεται: $d\ell_3 = h_3 du_3$. Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν:

$$\boxed{d\ell_1 = h_1 du_1,\ d\ell_2 = h_2 du_2,\ d\ell_3 = h_3 du_3} \quad (8)$$

Τό δέ διαφορικόν τοῦ μήκους τοῦ τόξου θά εἶναι:

$$d\ell^2 = d\ell_1^2 + d\ell_2^2 + d\ell_3^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \quad (9)$$

Κατ' ἀναλογίαν πρός τόν (3) θά ἔχωμεν:

$$\boxed{\mathbf{e}_1 = h_1 \nabla u_1,\ \mathbf{e}_2 = h_2 \nabla u_2,\ \mathbf{e}_3 = h_3 \nabla u_3} \quad (10)$$

Καί οὕτω λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Οἱ συντελεσταί h_1, h_2, h_3 καλοῦνται ***παράμετροι τοῦ Lamé***

Τό δέ μικτόν γινόμενον θά εἶναι:

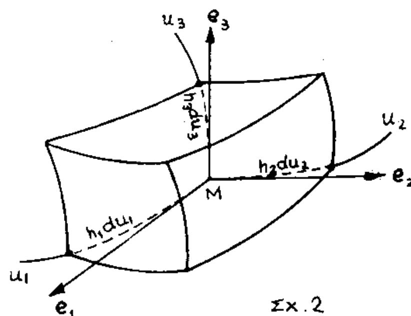
$$\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \cdot \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \quad (12)$$

Τό δέ διαφορικόν τοῦ ὄγκου θά εἶναι

$$dV = d\ell_1 \cdot d\ell_2\, d\ell_3 = h_1 h_2 h_3\, du_1 du_2 du_3 \quad (13)$$

βλ. σχετικῶς Σχ. 2 διά τό διαφορικόν τοῦ ὄγκου

II. Ἔστω $U(u_1,u_2,u_3)$ μία βαθμωτὴ συνάρτησις καὶ $\vec{F}(x,y,z)=A_1(x,y,z)\mathbf{e}_1+A_2(x,y,z)\mathbf{e}_2+A_3(x,y,z)\mathbf{e}_3$ μία διανυσματικὴ τοιαύτη ὡς πρὸς ἕνα ὀρθοκανονικὸν σύστημα καμπυλογράμμων συντεταγμένων u_1,u_2,u_3.



Σχ. 2

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύουν τὰ κάτωθι:

i) $\nabla U=\operatorname{grad}u=\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$ (1)

ii) $$\nabla\cdot\vec{F}=\operatorname{div}\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right] \quad (2)$$

iii) $$\nabla\times\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{F}\ \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial\cdot}{\partial u_1} & \frac{\partial\cdot}{\partial u_2} & \frac{\partial\cdot}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

iv) $$\nabla^2U=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_3}\right)\right] \quad (4)$$

Ἐὰν $h_1=h_2=h_3=1$ καὶ τὰ $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τῶν $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$, τότε οἱ ἀνωτέρω τύποι ἀνάγονται εἰς τὰς συνήθεις ἐκφράσεις τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων, ὅπου αἱ (u_1,u_2,u_3) ἔχουν ἀντικατασταθεῖ ὑπὸ τῶν (x,y,z).

<u>Ἀποδείξεις τῶν τύπων (1),(2) καὶ (4).</u> i) Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ gradien εἰς καμπυλογράμμους ὀρθογωνίους συντεταγμένας. Εἶναι γνωστόν, ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ gradient μιᾶς βαθμωτῆς συναρτήσεως $U=U(u_1,u_2,u_3)$ ἐπὶ ἑνὸς αὐθαιρέτου ἄξονος συμπίπτει μὲ τὴν παράγωγον τῆς U ὡς πρὸς κατεύθυνσιν αὐτὸν τὸν ἄξονα. Ὅθεν, πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος grad U ὡς πρὸς τὴν βάσιν $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὰς παραγώγους τῆς U ὡς πρὸς διευθύνσεις ποὺ καθορίζονται ὑπὸ αὐτῶν τῶν διανυσμάτων. Ἔστω ΔU εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως U εἰς τὰ σημεῖα M_1 καὶ M ὅπου $\overrightarrow{MM_1}=\ell_1\cdot e$. Τότε συμφώνως πρὸς τοὺς ὁρισμοὺς XIII-4-1 καὶ XIII-3-1 θὰ ἔχωμεν:

$$\mathbf{e}_1\cdot\operatorname{grad}U=\frac{\partial U}{\partial\mathbf{e}_1}=\lim_{\Delta\ell_1\to0}\frac{\Delta U}{\Delta\ell_1},\ \text{ὅπου}\ \overrightarrow{MM_1}=\ell_1\cdot\mathbf{e}_1$$

Ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς u_1 εἰς τὸ M εἶναι $\Delta\ell_1=h_1\Delta u_1$, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται:

$$\mathbf{e}_1\cdot\operatorname{grad}U=\lim_{\Delta u_1\to0}\frac{\Delta U}{h_1\cdot\Delta u_1}=\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_1}.$$

Κατ' ἀναλογίαν αἱ δύο ἄλλαι συνιστῶσαι τοῦ gradient θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς $\frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_2}$ καὶ $\frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_3}$.

Ἐντεῦθεν τελικῶς ἔχομεν:

$$\text{grad}\, U = \frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_3}\cdot\mathbf{e}_3 .$$

ii) λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (10) καὶ (11) θὰ ἔχωμεν:

$$\vec{F} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$$
$$= A_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 + A_2 h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 + A_3 h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2$$

Συνεπῶς λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους περιέχοντες τὸ ∇ τῆς §6 θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{F} = \text{div}\,\vec{F} = \nabla(A_1 h_2 h_3)\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 + A_1 h_2 h_3 \nabla\cdot(\nabla u_2\times\nabla u_3)\\ +\nabla(A_2 h_3 h_1)\cdot\nabla u_3\times\nabla u_1 + A_2 h_3 h_1\nabla\cdot(\nabla u_3\times\nabla u_1)\\ +\nabla(A_3 h_1 h_2)\cdot\nabla u_1\times\nabla u_2 + A_3 h_1 h_2\nabla\cdot(\nabla u_1\times\nabla u_2)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Εἶναι δέ, $\nabla(A_1 h_2 h_3)\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 = \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1}\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\cdot\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1}$.
Εἶναι δὲ καὶ $\nabla\cdot(\nabla u_2\times\nabla u_3) = 0$.

Κατ' ἀναλογίαν εὑρίσκομεν καὶ τὰς ἐκφράσεις τῶν ὑπολοίπων ὅρων τοῦ τύπου (1) καὶ ὅτε αὐτὸς τελικῶς γράφεται:

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3}\right]$$

iv) Ἔστω ἡ βαθμωτὴ συνάρτησις $U(u_1, u_2, u_3)$. Ὡς γνωστὸν συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (1) θὰ ἔχωμεν:

$$\nabla U = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u_1}\cdot\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_3}\cdot\mathbf{e}_3 \quad (1)$$

Θεωροῦντες ἤδη τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν ∇U καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (2) δι' αὐτὴν εὑρίσκομεν:

$$\nabla^2 U = \text{div}\,\nabla U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial u_3}\right)\right]$$

<u>Παρατήρησις</u>: Ὁ τύπος (3) ἀποδεικνύεται κατὰ τρόπον ἀνάλογον ὅπως ὁ (2).

§11. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΙΣ ΤΑΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑΣ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ

I. <u>Διαφορικὸν τόξου</u>. Ὡς γνωστὸν τὸ διαφορικὸν τόξου εἰς κυλινδρικὰς συντεταγμένας $x = \rho\,\text{συν}\theta$, $y = \rho\,\text{ημ}\theta$, $z = z$ ὅπου $\rho > 0$, καὶ $0 \le \theta < 2\pi$ εἶναι: $d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2$. (Μεταβληταὶ αἱ ρ, θ, z).

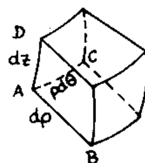
Συγκρίνοντες τόν τύπον αὐτόν μέ τόν (9) θά πρέπει νά λάβωμεν

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1.$$

Τό δέ διαφορικόν τοῦ τόξου εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας $x = \rho$συνθημφ, $y = \rho$ημθημφ, $z = \rho$συνφ ὅπου $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου: $d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \rho^2 \eta\mu^2\varphi d\theta^2$ (βλ. σελ. 101, 3η ἐφαρμογή).

Ἐδῶ μεταβληταί εἶναι αἱ ρ, θ, φ. Εἶναι δέ $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = \rho\eta\mu\varphi$.

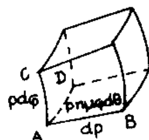
II. Διαφορικόν ὄγκου: Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (13) τῆς §10 τό διαφορικόν τοῦ ὄγκου διά κυλινδρικάς συντεταγμένας ὅπου $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$ καί $u_1 = \rho$, $u_2 = \theta$ καί $u_3 = z$ γίνεται: $dV = \rho d\rho d\theta dz$. (βλ. Σχ. 1)



Σχ. 1

Ἐάν ἀναφερόμεθα εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας τότε $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = \rho\eta\mu\varphi$ καί $u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$, $u_3 = \theta$ καί ὁ (13) γίνεται:

$$dV = \rho^2 \eta\mu\varphi d\rho d\varphi d\theta. \text{ (βλ. Σχ.2)}$$



Σχ. 2

III. Αἱ τελεστικαί διαφορικαί ἐκφράσεις εἰς κυλινδρικάς συντεταγμένας.

Εἰς τάς κυλινδρικάς συντεταγμένας ὅπως εἴδαμεν εἰς τό διαφορικόν τοῦ τόξου αἱ παράμετροι τοῦ Lamé θά πρέπει νά λάβουν τάς τιμάς $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$ καί ὡς ἐκ τούτου οἱ τύποι (1) → (4) τῆς § 10 διαμορφώνονται ἀναλόγως. Οὕτω ἔχομεν:

$$\text{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_z \qquad (1)$$

$$\text{div}\, \vec{F} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (2)$$

$$\text{rot}\, \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right) \mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (4)$$

ὅπου $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ παριστοῦν ἀντιστοίχως τά διανύσματα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τάς κυλινδρικάς συντεταγμένας ρ, θ, z καί A_ρ, A_θ, A_z εἶναι τά μέτρα τῶν προβολῶν τῆς $\vec{F}$ ἐπί τῶν $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$.

Ἐφαρμογή: Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\nabla^2 U=0$ ὑποθέτοντες $U=U(\rho)$, ὅπου $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$

Λύσις: Ἀπό τήν (4) ἔχομεν: $\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dU}{d\rho}\right)=0$ ἢ $\rho\cdot\frac{dU}{d\rho}=c_1$ καί $U=c_1\log\rho+c_2$

IV. Αἱ τελεστικαί διαφορικαί ἐκφράσεις εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας.

Εἰς τάς σφαιρικάς συντεταγμένας αἱ παράμετροι τοῦ Lamé λαμβάνουν τάς τιμάς $h_1=1$, $h_2=\rho$, $h_3=\rho\eta\mu\varphi$ καί ὡς ἐκ τούτου οἱ τύποι (1) → (4) τῆς § 10 καθίστανται ἀναλόγως. Οὕτω ἔχομεν:

$$\operatorname{grad}U=\frac{\partial U}{\partial\rho}\cdot e_\rho+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi}e_\varphi+\frac{1}{\rho\eta\mu\varphi}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}\cdot e_\theta \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\eta\mu\varphi}\cdot\frac{\partial(\eta\mu\varphi A_\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho\eta\mu\varphi}\cdot\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \qquad (2)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\frac{1}{\rho\eta\mu\varphi}\left(\frac{\partial(A_\theta\eta\mu\varphi)}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right)e_\rho+\left(\frac{1}{\rho\eta\mu\varphi}\cdot\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho}\right)e_\varphi+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)e_\theta \qquad (3)$$

$$\nabla^2U=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\eta\mu\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\eta\mu\varphi\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{\rho^2\eta\mu^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2} \qquad (4)$$

ὅπου e_ρ, e_φ, e_θ παριστοῦν ἀντιστοίχως τά διανύσματα e_1, e_2, e_3 ἀντιστοιχοῦντα εἰς τάς σφαιρικάς συντεταγμένας ρ,φ,θ καί $A_\rho, A_\varphi, A_\theta$ εἶναι τά μέτρα τῶν ἀντιστοίχων προβολῶν τῆς $\vec{F}$.

Ἄσκησις: Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\nabla^2U=0$ εἰς σφαιρικάς συντεταγμένας ἐάν $U=U(\rho)$, ὅπου $\rho=(x^2+y^2+z_2)^{1/2}$.

Ἐφαρμογαί 1η: Νά δειχθῇ ὅτι τό σύστημα τῶν κυλινδρικῶν συντεταγμένων εἶναι ὀρθογώνιον;

Ἀπόδειξις: Τό διάνυσμα θέσεως κάθε σημείου εἰς κυλινδρικάς συντεταγμένας εἶναι:

$$r=x\cdot i+y\cdot j+z\cdot k=\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta\cdot i+\rho\,\eta\mu\theta\cdot j+z\cdot k.$$

Τά ἐφαπτομενικά διανύσματα εἰς τάς ρ,θ καί z γραμμάς δίδονται ἀντιστοίχως ὑπό τῶν $\frac{\partial r}{\partial\rho}$, $\frac{\partial r}{\partial\theta}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$ ὅπου εἶναι:

$$\frac{\partial r}{\partial\rho}=\sigma\upsilon\nu\theta\cdot i+\eta\mu\theta\cdot j,\quad \frac{\partial r}{\partial\theta}=-\rho\eta\mu\theta\cdot i+\rho\sigma\upsilon\nu\theta\cdot j,\quad \frac{\partial r}{\partial z}=k$$

Τά δέ μοναδιαῖα εἰς αὐτάς τάς διευθύνσεις εἶναι:

$$e_1=e_\rho=\frac{\partial r}{\partial\rho}:\left|\frac{\partial r}{\partial\rho}\right|=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot i+\eta\mu\theta\cdot j}{\sqrt{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}}=\sigma\upsilon\nu\theta\cdot i+\eta\mu\theta\cdot j$$

$$e_2=e_z=\frac{\partial r}{\partial\theta}:\left|\frac{\partial r}{\partial\theta}\right|=\frac{-\rho\eta\mu\theta\cdot i+\rho\sigma\upsilon\nu\theta\cdot j}{\sqrt{\rho^2\eta\mu^2\theta+\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}}=-\eta\mu\theta\cdot i+\sigma\upsilon\nu\theta\cdot j$$

$$e_3=e_z=\frac{\partial r}{\partial z}:\left|\frac{\partial r}{\partial z}\right|=k.$$

Τότε, $\quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\theta = (\sigma\upsilon\nu\theta \mathbf{i} + \eta\mu\theta \cdot \mathbf{j})(-\eta\mu\theta \cdot \mathbf{i} + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \mathbf{j}) = 0$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z = (-\eta\mu\theta \cdot \mathbf{i} + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{k} \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \mathbf{i} + \eta\mu\theta \cdot \mathbf{j}) = 0$$

Ὅθεν, τὰ μοναδιαῖα διανύσματα $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ σχηματίζουν ὀρθογ. σύστημα.

2ª/. Νὰ παρασταθῇ τὸ διάνυσμα $\vec{F} = z \cdot \mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y \cdot \mathbf{k}$ εἰς κυλινδρικὰς συντεταγμένας δηλ. νὰ προσδιορισθοῦν τὰ A_ρ, A_θ, A_z.

Λύσις: Συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένη ἐφαρμογὴ ἔχομεν:

$$\mathbf{e}_\rho = \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \mathbf{i} + \eta\mu\theta \cdot \mathbf{j} \ (1); \quad \mathbf{e}_\theta = -\eta\mu\theta \cdot \mathbf{i} + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \mathbf{j} \ (2), \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k} \quad (3)$$

Ἐπιλύοντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ὡς πρὸς τὰ διανύσματα $\mathbf{i}$ καὶ $\mathbf{j}$ εὑρίσκομεν:

$\mathbf{i} = \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \mathbf{e}_\rho - \eta\mu\theta \cdot \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{j} = \eta\mu\theta \cdot \mathbf{e}_\rho + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \mathbf{e}_\theta$ εἶναι δὲ καὶ $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ $\vec{F}$ εὑρίσκομεν:

$$\vec{F} = (z\sigma\upsilon\nu\theta - 2\rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta)\mathbf{e}_\rho - (z\eta\mu\theta + 2\rho\sigma\upsilon\nu^2\theta)\mathbf{e}_\theta + \rho\eta\mu\theta\mathbf{e}_z$$

Ὅθεν, $A_\rho = z\sigma\upsilon\nu\theta - 2\rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta$, $A_\theta = -z\eta\mu\theta - 2\rho\sigma\upsilon\nu^2\theta$, $A_z = \rho\eta\mu\theta$.

3ª/. Δείξατε ὅτι εἰς κυλινδρικὰς συντεταγμένας (ρ, θ, z) ἰσχύει:

i) $\operatorname{rot}(z\,\operatorname{grad}\theta) = -\operatorname{grad}(\log\rho)$, ii) $\operatorname{rot}(\theta\,\operatorname{grad}\rho) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}(z)$

Ἀπόδειξις: i) Ἔχομεν: $\operatorname{grad}\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\theta}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = \left(0, \frac{1}{\rho}, 0\right)$

Ὅθεν, $\operatorname{rot}(z\,\operatorname{grad}\theta) = \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\rho}\cdot\rho\right), 0, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(z)\right) = \left(-\frac{1}{\rho}, 0, 0\right)$

καὶ $\operatorname{grad}(\log\rho) = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\log\rho, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\rho, \frac{\partial}{\partial z}\log\rho\right) = \left(\frac{1}{\rho}, 0, 0\right)$

Ὅθεν, $\operatorname{rot}(z\,\operatorname{grad}\theta) = -\operatorname{grad}(\log\rho)$.

4ª/. Δείξατε ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\vec{F} = 2\rho\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\theta\mathbf{e}_\rho - \rho\eta\mu\varphi\eta\mu\theta\mathbf{e}_\varphi + \rho\sigma\varphi\varphi\sigma\upsilon\nu\theta\mathbf{e}_\theta$, ὅπου ρ, θ, φ σφαιρικαὶ συντεταγμέναι εἶναι ἀστρόβιλον.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ ἤτοι:

$$\frac{1}{\rho\eta\mu\varphi}\left(\frac{\partial(A_\theta\eta\mu\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho\eta\mu\varphi}\cdot\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\theta = 0$$

Εἶναι: $A_\rho = 2\rho\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\varphi$, $A_\theta = -\rho\eta\mu\varphi\eta\mu\theta$, $A_\varphi = \rho\sigma\varphi\varphi\sigma\upsilon\nu\theta$

Ὅθεν, $\frac{\partial(A_\theta\eta\mu\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} = -\rho\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta + \rho\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta = 0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὁ μηδενισμὸς τῶν ὑπολοίπων καὶ οὕτω τὸ πεδίον εἶναι ἀστρόβιλον.

§ 10. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΜΗΔΕΝΙΚΗΝ ΑΠΟΚΛΙΣΙΝ (σωληνοειδῆ διανυσματικά πεδία)

Ἔστω ἕνα διανυσματικόν πεδίον $\vec{F}(M) = P\cdot i + Q\cdot j + R\cdot k$, ἔχον πρώτας μερικάς παραγώγους συνεχεῖς ἐπί ἑνός χωρίου D. —

Δίδομεν τόν κάτωθι ὁρισμόν:

Ὁρισμός XIII-10-1. *Τό διανυσμ. πεδίον $\vec{F}$ καλεῖται σωληνοειδές, ἄν εἰς κάθε σημεῖον του ἡ ἀπόκλισις εἶναι μηδέν, ἤτοι:*

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0.$$

Οὕτω τό πεδίον ταχυτήτων ἑνός ἀσυμπιέστου ὑγροῦ εἶναι ἕνα παράδειγμα σωληνοειδοῦς πεδίου.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό θεωρηθέν διανυσμ. πεδίον $\vec{F}(M)$ εἶναι τό διανυσματικόν πεδίον τῶν ταχυτήτων ἑνός μονίμου ρεύματος.

Ἡ ὁλική ροή διά μέσου μιᾶς ἁπλῆς κλειστῆς ἐπιφανείας S, συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν XIII-8-2 καί τόν ὁλοκληρωτικόν τύπον κατά div (βλ. σελ. 458) θά εἶναι:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_S F_n\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dv \qquad (1)$$

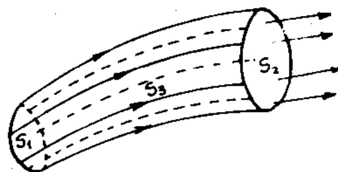
Ἐάν $\operatorname{div}\vec{F}>0$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου M, αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ ἐκροή ἀπό τό M εἶναι θετική, δηλ. ἀπό τήν περιοχήν τοῦ M θά ἐξέρχεται περισσότερο ρευστό, ἀπ' ὅτι εἰσέρχεται εἰς αὐτήν, διά τοῦτο τό σημεῖον M καλεῖται τότε μία *«πηγή»* (source). Ἀντιθέτως, ἐάν $\operatorname{div}\vec{F}<0$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου M, ἡ "ἐκροή" εἶναι τότε μία εἰσροή, καθόσον τότε θά εἰσέρχεται εἰς τήν περιοχήν τοῦ M περισσότερο ρευστό ἀπό ὅτι ἐξέρχεται ἐξ αὐτῆς. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν τό σημεῖον M καλεῖται *«καταβόθρα»* (sink), ἄλλως *«ἀρνητική πηγή»*.

Ἐάν εἰς μίαν περιοχήν τοῦ M δέν ὑπάρχουν πηγές ἤ καταβόθρες, τότε $\operatorname{div}\vec{F}=0$ (σωληνοειδές πεδίον). Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν, ὁ τύπος (1) δίδει ὅτι: ἡ ὁλική ροή διά μέσου μιᾶς οἱασδήποτε κλειστῆς ἐπιφανείας θά εἶναι 0, ἐπομένως τόσος ὄγκος ρευστοῦ θά ρέῃ ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ πρός τό ἐξωτερικόν της, ὅσος καί ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ πρός τό ἐσωτερικόν της.

Διά τά σωληνοειδῆ πεδία ἔχουμε τόν καλούμενον ***νόμο διατηρήσεως τῆς ροῆς*** τόν ὁποῖον ἐξάγομεν ἀμέσως κατωτέρω:

Ἔστω $\vec{F}$ ἕνα σωληνοειδὲς πεδίον, δηλ. $\operatorname{div}\vec{F}=0$. Θεωροῦμεν ἕναν «ρευματικὸν σωλῆνα» τοῦ διαν. πεδίου καὶ λαμβάνομεν τὸ μέρος του, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο τομῶν S_1 καὶ S_2 (βλ. Σχ. 1).

Αὐταὶ αἱ τομαὶ μαζὺ μὲ τὴν πλευρικὴν ἐπιφάνειαν S_3 δημιουργοῦν μίαν κλειστὴν ἐπιφάνειαν S.



Σχ. 1.

Ἐπειδὴ τὸ πεδίον ὑπετέθη σωληνοειδές, ὁ τύπος (1) δίδει:

$$\iint_S F_n ds = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = 0 \qquad (2)$$

Ἀλλά:

$$\iint_S F_n ds = \iint_{S_1} F_n ds + \iint_{S_2} F_n ds + \iint_{S_3} F_n ds \qquad (3)$$

ὅπου ἕκαστον ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα λαμβάνεται ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς πλευρᾶς τῆς ἀντιστοίχου ἐπιφανείας.

Ἡ ροὴ διὰ μέσου τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας S_3 εἶναι προφανῶς μηδέν, καθόσον ἐπ' αὐτῆς ἔχομεν $\vec{F}\perp\vec{n}$ καὶ ἐπομένως ὁ τύπος (2) δίδει: $\iint_{S_3} F_n ds = \iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = 0$ (4)

Ὅθεν: ἐκ τῶν (2), (3) καὶ (4) ἔχομεν:

$$\iint_{S_1} F_n ds + \iint_{S_2} F_n ds = 0,$$

ἤτοι:

$$\iint_{S_1} F_n ds = -\iint_{S_2} F_n ds \qquad (5)$$

Ἐὰν τώρα λάβωμεν τὴν ἐσωτερικὴν πλευρὰν τῆς S_1, δηλ. ἀντιστρέψωμεν τὴν διεύθυνσιν τοῦ καθέτου της διανύσματος καὶ διατηρήσωμεν τὴν ἐξωτερικὴν πλευρὰν τῆς ἐπιφανείας S_2, ἡ ἰσότης (5) γίνεται:

$$\iint_{S_1} F_n dS = \iint_{S_2} F_n ds \qquad (6)$$

Ὅθεν: <u>ἡ ροὴ τοῦ σωληνοειδοῦς διαν. πεδίου</u> $\vec{F}$ <u>διὰ μέσου κάθε τομῆς τοῦ «ρευματικοῦ σωλῆνος» ἔχει μία καὶ τὴν αὐτὴν τιμήν.</u>

'Εάν τό διανυσμ. πεδίον $\vec{F}$ λαμβάνεται ώς πεδίον ταχυτήτων ένός άσυμπιέστου ύγρού, τό όποίον δέν έχει πηγές ή καταβόθρες, ή σχέσις (6) δηλοί ότι: ή ποσότης τού ύγρού, ή όποία διέρχεται άπό μίαν τομήν τού «ρευματικού σωλήνος» είναι ή αύτή δι'όλας τάς τομάς.

§ 11. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

"Ως έφαρμογήν τών άνωτέρω έννοιών, άς έξάγωμεν μίαν άπό τάς βασικάς έξισώσεις τής κινήσεως τών ρευστών, τήν καλουμένην *έξίσωσιν συνεχείας*. Έστω $\vec{v}(P, Q, R)$ τό πεδίον τών ταχυτήτων ένός κινουμένου ύγρού, πυκνότητος $\rho=\rho(x,y,z,t)$, δηλαδή τό ύγρό δέν ύποτίθεται άσυμπίεστο καί ώς έκ τούτου ή πυκνότης του ρ δύναται νά έξαρτάται καί έκ τού χρόνου t.

'Εάν τώρα ύποθέσωμεν ότι είς ούδέν σημείον τού διανυσμ. πεδίου $\vec{v}$ ύπάρχουν πηγαί ή καταβόθραι, τότε μεταξύ τής ταχύτητος τού ύγρού καί τής μεταβολής τής πυκνότητος ύφίσταται ή σχέσις:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0, \text{ όπου } J = \rho \cdot \vec{v} \qquad (1)$$

Πράγματι· άς θεωρήσωμεν μίαν τυχούσαν έπιφάνειαν S, ή όποία περικλείει έναν όγκον V τού ύγρού.

'Η έντός τού όγκου V μάζα τού ύγρού είς οίανδήποτε χρονικήν στιγμήν είναι:

$$M = \iiint_V \rho \, dv$$

καί έξ αύτής λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dv = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \qquad (2)$$

'Εξ άλλου ή μεταβολή τής ποσότητος τού ύγρού, τό όποίον περιέχεται είς τόν όγκον V είναι ίση μέ τήν ροήν τού ύγρού διά μέσου τής έπιφανείας S, ήτοι:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\iint_S \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\, ds = -\iint_S (\rho\vec{v})_n ds \qquad (3)$$

όπου $\vec{n}$ είναι τό κάθετον διάνυσμα. Τό άρνητικόν σημείον έτέθη, διότι ή ποσότης τού ύγρού, ή όποία περιέχεται είς τόν όγκον V, έλαττούται όταν ή ταχύτης

κατευθύνεται πρός τά ἔξω.

Μετασχηματίζοντες τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα διά μέσου τοῦ ὁλοκληρ. τύπου κατά div ἔχομεν:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\iint_S (\rho\vec{v})_n ds = -\iiint_V div(\rho\vec{v})dv \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (2) καί (4) λαμβάνομεν:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\iiint_V div(\rho\vec{v})\, dv$$

ἤ

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v})\right] dv = 0 \qquad (5)$$

Ἐκ ταύτης, ἐφ' ὅσον τό V ἐλήφθη αὐθαίρετον, συνάγομεν ὅτι ἡ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις, ὑποτιθεμένη συνεχής, εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴση μέ μηδέν (διατί;)

Ὅθεν ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (6)$$

Οὕτως ἔχομεν εὕρει τήν ἐξίσωσιν ἡ ὁποία συνδέει τήν ταχύτητα καί τήν πυκνότητα ἑνός κινουμένου ὑγροῦ, διά κάθε περιοχήν ἡ ὁποία δέν ἔχει πηγές ἤ καταβόθρες.

Ἡ ἐξίσωσις (6) εἶναι γνωστή ὡς ἐξίσωσις συνεχείας. Εἰσάγοντες δέ τό διάνυσμα $J = \rho\vec{v}$, ἡ ἐξίσωσις (6) γράφεται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, J = 0, \quad \text{ὅπου} \quad J = \rho\vec{v} \qquad (7)$$

Ἐάν τό ρ εἶναι σταθερόν, τό ὑγρόν εἶναι ἀσυμπίεστον καί τότε $div\,\vec{v} = 0$, δηλ. τό διανυσματικόν πεδίον $\vec{v}$ εἶναι σωληνοειδές.

Ἡ ἐξίσωσις συνεχείας ἐμφανίζεται ἐπίσης εἰς τήν ἠλεκτρομαγνητικήν θεωρίαν, ὅπου τό ρ εἶναι ἐκεῖ τό «φορτίον πυκνότητος» καί τό $J = \rho\vec{v}$ εἶναι ἡ «ρευματική πυκνότης».

§12. ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΠΕΔΙΑ

Ἔστω τό σταθερόν σημεῖον $A(\alpha,\beta,\gamma)$ καί τό μεταβλητόν σημεῖον $M(x,y,z)$ καί τό διάνυσμα $\vec{r} = \vec{MA}$. Ἔστω $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$.

Ἕνα διανυσματικόν πεδίον τῆς μορφῆς:

$$\vec{F}(M) = \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \mu \frac{\vec{r}}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{3/2}}, \quad (1)$$

ὅπου μ σταθερά, καλεῖται *Νευτώνειον πεδίον*.

Τοῦτο ὁρίζεται εἰς ὁλόκληρον τόν χῶρον R^3 ἐκτός τοῦ σημείου $A(\alpha,\beta,\gamma)$.

Παραδείγματα:

1ον/. Τό πεδίον τῆς ἕλξεως τό ὁποῖον παράγει σῶμα μάζης m_o εὑρισκόμενον εἰς τό σημεῖον A, εἶναι:

$\vec{F}(M)=k\cdot m_o\frac{\vec{r}}{r^3}$, ὅπου k ἡ παγκόσμιος σταθερά καί $\vec{r}=\overrightarrow{MA}$, εἶναι ἕνα Νευτώνειον πεδίον. Εἶναι δέ $\|\vec{F}(M)\|=\frac{km_o}{r^2}$.

2ον/. Τό ἠλεκτροστατικόν πεδίον τό ὁποῖον παράγεται ἀπό ἕνα φορτίον q_o, τό ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τό σημεῖον A, εἶναι:

$\vec{E}(M)=-\frac{q_o}{\varepsilon}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$, ὅπου ε ἡ διηλεκτρική σταθερά, εἶναι ἕνα Νευτώνειον πεδίον.

Ἐκ τῆς (1) προκύπτει ἄμεσα ὅτι: $\text{rot}\,\vec{F}=\vec{O}$, $\text{div}\,\vec{F}=0$.

Ὅθεν συμφώνως πρός τούς ὁρισμούς XIII-6-2 καί XIII-10-1 τό Νευτώνειον πεδίον εἶναι ἀστρόβιλον καί σωληνοειδές.

Ὑπάρχει μία πραγματική συνάρτησις Φ τοιαύτη, ὥστε $\text{grad}\,\Phi=\vec{F}(M)$ καί ὡς τοιαύτη δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν:

$$\Phi(M)=\frac{\mu}{r}+c, \text{ ὅπου } c \text{ σταθερά}$$

Τήν συνάρτησιν $U(M)=-\Phi(M)=-\frac{\mu}{r}-c$, καλοῦμεν *δυναμικόν τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου* $\vec{F}(M)$.

Ἐάν δέ θέλωμεν τό ἀνωτέρω δυναμικόν νά μηδενίζεται εἰς τό ἄπειρον θά πρέπει νά λάβωμεν $c=0$ καί οὕτω ἡ συνάρτησις: $U(M)=-\frac{\mu}{r}$ (2) καλεῖται *Νευτώνειον δυναμικόν* τοῦ Νευτωνείου πεδίου (1).

Ἄν εἰς τόν χῶρον R^3 θεωρήσωμεν η τό πλῆθος σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\eta$, τότε τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F}(M)=\sum_{\rho=1}^{\eta}\mu_\rho\frac{\vec{r}_\rho}{r_\rho^3} \quad (3), \text{ ὅπου } \mu_\rho \text{ σταθεραί καί } \vec{r}_\rho=\overrightarrow{MA_\rho},$$

καλεῖται *Νευτώνειον πεδίον παραγόμενον ἀπό μίαν διακεκριμένη κατανομή σημείων*.

Τό Νευτώνειον δυναμικόν τοῦ πεδίου (3) θά εἶναι: $U(M) = -\sum_{\rho=1}^{n} \frac{\mu_\rho}{r_\rho}$, ὅπου $r_\rho = \|\vec{r}_\rho\|$.

Τό διανυσματικόν πεδίον τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τοῦ κάτωθι ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος:

$$\vec{F}(M) = \int_{c} \rho_\ell (P) \frac{\vec{r}}{r^3}\, d\ell, \text{ ὅπου } \vec{r} = \overrightarrow{MP} \quad (P \in c \text{ καί } M \notin c)$$

καλεῖται *ἐπικαμπύλιον Νευτώνειον πεδίον*, τό ὁποῖον παράγεται ἀπό συνεχῆ κατανομή μέ γραμμικήν πυκνότητα $\rho_\ell(P)$.

Ὑπάρχει πάντοτε μία πραγματική συνάρτησις U τοιαύτη, ὥστε: $\text{grad}\, U = \vec{F}$ καί ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ συνάρτησις παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$U(M) = -\int_{c} \frac{\rho_\ell}{r}\, d\ell$ καί καλεῖται *δυναμικόν ὀφειλόμενον εἰς γραμμικήν κατανομήν*.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τά διανυσματικά πεδία $\vec{F}(M) = \iint_{S} \rho_s \frac{\vec{r}}{r^3}\, ds$ καί $\vec{F}(M) = \iiint_{\Omega} \rho_\omega \frac{\vec{r}}{r^3}\, d\omega$, ὅπου ρ_s καί ρ_ω ἡ ἐπιφανειακή καί ἡ χωρική πυκνότης ἀντιστοίχως καί $M \notin S$, $M \notin \Omega$, μέ δυναμικά: $U(M) = -\iint_{S} \frac{\rho_s}{r}\, ds$

$U(M) = -\iiint_{\Omega} \frac{\rho_\omega}{r}\, d\omega$ καλούμενα *ἐπιφανειακόν* καί *χωρικόν δυναμικόν* ἀντιστοίχως.

§13. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Ἕνα ἠλεκτρομαγνητικόν πεδίον περιγράφεται ἀπό τήν θεωρίαν τοῦ Maxwell, ἀπό δύο διανυσματικά πεδία $\mathbf{E}$ καί $\mathbf{H}$ καί $E = \|\mathbf{E}\|$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί $H = \|\mathbf{H}\|$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Ἀμφότερα τά E καί H μεταβάλλονται μετά τοῦ χρόνου.

Ἀπόντως ἀγωγοῦ τά $\mathbf{E}$ καί $\mathbf{H}$ ἱκανοποιοῦν τάς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell, ἤτοι:

$$\text{div}\, \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1), \qquad \text{div}\, \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3), \qquad \text{rot}\, \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου καί c εἶναι μία παγκόσμιος σταθερά.

Εἰς τήν ἠλεκτροστατικήν περίπτωσιν, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ καί οὕτω λόγῳ τῆς (4), τό $\mathbf{E}$ δέν ἐξαρτᾶ-

ται ἐκ τοῦ χρόνου καὶ λόγῳ τῆς (3) θὰ ἔχωμεν: $\text{rot}\,\mathbf{E}=0$ (5)

Ἐντεῦθεν, λόγῳ τῆς (5), (εἰς ἕνα ἁπλῶς συνεκτικὸν πεδίον), ὑπάρχει μία πραγματικὴ συνάρτησις U τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $\mathbf{E}=-\text{grad}\,U$ (6)

Ἡ συνάρτησις U καλεῖται ***ἠλεκτροστατικὸν δυναμικόν***.

Λόγῳ τῶν (1) καὶ (6) ἡ U θὰ ἱκανοποιῇ τὴν ***ἐξίσωσιν τοῦ Poisson***, ἤτοι:

$$\text{div}\,\text{grad}\,U=-4\pi\rho \quad (7)$$

Εἰς ἕνα πεδίον κενοῦ φορτίου ($\rho=0$), ἡ U λόγῳ τῆς (7) θὰ ἱκανοποιῇ τὴν ***ἐξίσωσιν τοῦ Laplace***, ἤτοι:

$$\text{div}\,\text{grad}\,U=0 \quad \text{ἢ} \quad \nabla^2 U=0 \quad (8)$$

Ἡ συνάρτησις U, διὰ δοθεῖσα κατανομὴ φορτίου, δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἀπὸ τὸν Νόμον τοῦ Coulomb. Οὕτω διὰ ἕνα φορτίον e εἰς τὸ σημεῖον (x,y,z) τὸ δυναμικὸν $U(x_1,y_1,z_1)$ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$U=\frac{e}{r}+c \quad (9), \text{ ὅπου } r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \text{ καὶ } c \text{ σταθερά}$$

Διὰ ἕνα πεπερασμένον πλῆθος φορτίων τὸ δυναμικὸν αὐτῶν εὑρίσκεται δι' ἁπλῆς προσθέσεως συναρτήσεων τοῦ τύπου (9).

Ἐὰν τὸ φορτίον εἶναι κατανεμημένον κατὰ μῆκος μιᾶς καμπύλης c καὶ ρ_ℓ εἶναι ἡ πυκνότης αὐτοῦ (φορτίον ἀνὰ μονάδα μήκους) τότε τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖον (x_1,y_1,z_1) παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$U(x_1,y_1,z_1)=\int_c \frac{\rho_\ell}{r_1}\,d\ell+c \quad (10), \text{ ὅπου } r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

Τέλος, ἐὰν τὸ φορτίον εἶναι κατανεμημένον ἐξωτερικῶς ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας S μὲ πυκνότητα ρ_a (φορτίον ἀνὰ μονάδα ἐμβαδοῦ) τότε τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖον (x_1,y_1,z_1) δίδεται ὑπὸ τοῦ κάτωθι ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος:

$$U(x_1,y_1,z_1)=\iint_S \frac{\rho_a}{r_1}\,d\sigma+c$$

<u>Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:</u>

1. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ γραμμαὶ διευθύνσεως τοῦ πεδίου:

$$\vec{F}(x,y,z)=2xy\,\vec{i}+x^2\vec{j}-2z\cdot\vec{k}.$$

2. Ἐὰν $f(t)=(5t^2,t,-t^3)$ καὶ $g(t)=(\eta\mu t,-\sigma\upsilon\nu t,t)$, $t\in I\subset\mathbb{R}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι:

$$\text{i) } \frac{d}{dt}(f\cdot g), \quad \text{ii) } \frac{d}{dt}(f\times g), \quad \text{iii) } \frac{d}{dt}(f\cdot f).$$

3. Νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=2x^2-y^2+z^2$ εἰς τό σημεῖον $M(1,2,3)$ κατά τό διάνυσμα $\vec{u}=\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{\sqrt{2}}k$. Ὁμοίως νά εὑρεθῇ ἡ κατεύθυνσις κατά τήν ὁποίαν ἡ παράγωγος εἰς τό σημεῖον αὐτό λαμβάνει τήν μεγίστην τιμήν.
(Ὑπόδ: Ἔστω $\vec{a}=(4x,-2y,2z)=\nabla f(x,y,z)$. Διά νά ἔχωμε μέγιστον ἀρκεῖ τό ἐσωτερικόν γινόμενον $\vec{a}\cdot\vec{u}=\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}=f'_x\cdot u_1+f'_y u_2+f'_z\cdot u_3=4x\cdot u_1-2y\cdot u_2+2z\cdot u_3=(4,-4,6)\cdot(u_1,u_2,u_3)$ εἰς τό σημεῖον $M(1,2,3)$ νά γίνεται μέγιστον. Πρός τούτοις ἀρκεῖ τά διανύσματα $\vec{a}=(4x,-2y,2z)|_M=(4,-4,6)$, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ νά εἶναι συγγραμμικά, ἤτοι: $\frac{u_1}{4}=\frac{u_2}{-4}=\frac{u_3}{6}$, κ.λ.π.)

4. Ἐάν $f(x,y,z)=x^2yz^3$ καί $\vec{F}=xzi-y^2j+2x^2y\cdot k$ εὕρατε τά κάτωθι:
i) $\nabla f\equiv \text{grad} f$, ii) $\text{div}\vec{F}$, iii) $\text{rot}\,\vec{F}$, iv) $\text{div}(f\vec{F})$, v) $\text{rot}\,(f\cdot\vec{F})$.

5. Εὕρατε τό μοναδιαῖον διάνυσμα τό ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν $x^3-3xy^2+yz^2=1$ εἰς τό σημεῖον $M(1,0,2)$.

6. Ἐάν $\vec{a}=(y^2,2xy,-xz^2)$ καί $f(x,y,z)=z^3-x^2y$ ὑπολογίσατε τά $\vec{a}\cdot\nabla f$, $\vec{a}\times\nabla f$ εἰς τό σημεῖον $M(-1,-1,1)$

7. Νά εὑρεθοῦν αἱ διανυσματικαί γραμμαί τοῦ πεδίου μέ ἐξίσωση
i) $\vec{F}=\text{grad}\,(xyz)$ ii) $\vec{F}=\text{grad}\,\frac{1}{r}$, ὅπου $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

8. Ἄν τά τρία μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ σχηματίζουν ἕνα δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα μέ ἀρχή τό σημεῖον M, νά δειχθῇ ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:
$$\text{grad} f(M)=\frac{\partial f(M)}{\partial\vec{a}}\cdot\vec{a}+\frac{\partial f(M)}{\partial\vec{\beta}}\cdot\vec{\beta}+\frac{\partial f(M)}{\partial\vec{\gamma}}\cdot\vec{\gamma}.$$

9. Ὑπολογίσατε τό gradient τῆς $f(x,y)$ εἰς τά σημεῖα (x,y) εἰς τά ὁποῖα ὑπάρχει, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι:
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\eta\mu\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ἐάν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{ἐάν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

10. Νά δειχθῇ ὅτι τό διανυσματικό πεδίον $\vec{F}=\lambda\cdot\vec{u}_o\,\sigma\upsilon\nu|\vec{u}_o|+\mu\cdot\vec{K}$, ὅπου $\vec{u}_o$ τό μοναδιαῖον τοῦ $\vec{u}=(x,y,0)$ καί $\vec{K}=(0,0,1)$ προέρχεται ἀπό δυναμικόν καί νά εὑρεθῇ ἡ οἰκογένεια τῶν διανυσματικῶν ἐπιφανειῶν τοῦ πεδίου.

11. Ἐάν $f = f(x,y,z) = 2x^2y - xz^3$ ὑπολογίσατε τά: ∇f καί $\nabla^2 f$.

12. Εὕρετε ἕνα μοναδιαῖον διάνυσμα, τό ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν:

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10 \text{ εἰς τό σημεῖον } M(3,-1,2).$$

13. Ἐάν $\vec{F} = 2yzi - x^2yj + xz^2k$, $\vec{G} = x^2i + yzj - xyk$ καί $\phi = 2x^2yz^2$ εὕρετε τά:
(a) $(\vec{F}\cdot\nabla)\phi$, (b) $\vec{F}\cdot\nabla\phi$, (c) $(\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F}$ (d) $(\vec{F}\times\nabla)\phi$ (e) $\vec{F}\times\nabla\phi$.

14. Δείξατε ὅτι: $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$.

15. Ἔστω $\vec{r} = xi + yj + zk$ τό καλούμενον διάνυσμα θέσεως καί $\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$ τυχόν σταθερόν διάνυσμα. Ἐάν $r = |\vec{r}|$, δείξατε ὅτι ἰσχύουν τά κάτωθι:

i) $\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$, ii) $\operatorname{grad} f \cdot d\vec{r} = df$, iii) $\operatorname{grad}\log|\vec{r}| = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$,

iv) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{|\vec{r}|} = -\dfrac{1}{r^3}\cdot\vec{r}$, v) $\operatorname{div}\vec{r} = 3$, vi) $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$ vii) $\operatorname{grad}|\vec{r}| = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$,

viii) $\nabla\times(\vec{r}^2\vec{r}) = 0$, ix) $\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r^3} = 0$, x) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r}) = \vec{r}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}$.

16. Ἀποδείξατε τάς κάτωθι ταυτότητας:

i) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f \times f \operatorname{grad} g) = 0$,

ii) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}\cdot\operatorname{rot}\vec{F}$

iii) $\nabla^2 f = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} f)$.

17. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τά κάτωθι διανυσματικά πεδία εἶναι ἀστρόβιλα:

i) $\vec{F} = \left(\dfrac{3y-x}{(x+y)^3}, \dfrac{y-3x}{(x+y)^3}\right)$, ii) $\vec{F} = (2xy, x^2)$, iii) $\vec{F} = (x^2+y^2)^{-3/2}(xi+yj)$.

18. Προσδιορίσατε τά a καί b ὥστε τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = \frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2}\,i - \frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}\,j \text{ νά εἶναι ἀστρόβιλον.}$$

19. Προσδιορίσατε τά m, p, q ὥστε τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (x+2y+mz)\,i + (px-3y-z)\,j + (4x+qy+2z)\,k \text{ νά εἶναι ἀστρόβιλον.}$$

20. Ἀποδείξατε ὅτι: $\operatorname{grad} f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}\,\vec{r}$, ὅπου $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ καί $f'(r) = \dfrac{df}{dr}$ ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχει.

21. Εὕρετε τὴν Laplacian τῆς $\varphi = f(r)$. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι ἡ $\varphi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ εἶναι μία λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace: $\nabla^2\varphi = 0$.

22. Ἀποδείξατε ὅτι: $\operatorname{grad} f(\varphi) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \operatorname{grad} \varphi$.

23. Δίδεται τό διανυσματικόν πεδίον: $\vec{F} = x^2yz \cdot i - x^3y^2 \cdot j + xyz^2\, k$. Ὑπολογίσατε τά div $\vec{F}$ καί rot $\vec{F}$ εἰς τό σημεῖον $M(1,-1,1)$ καί ἀποδείξατε ὅτι: div rot $\vec{F} = 0$.

23α Ἔστω $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$. Ὑποθέτομεν ὅτι τά u καί v ἱκανοποιοῦν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $f(u,v) = 0$. Δείξατε ὅτι $\nabla u \times \nabla v = 0$.

24. Ἐάν $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = 3xz^2\, i - yz\, j + (x+2z)\, k$, εὕρετε τό rot rot $\vec{F}$.

25. Ἀποδείξατε ὅτι: $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\nabla^2\vec{F} + \nabla(\nabla \cdot \vec{F})$, ἀκολούθως ἐπαληθεύσατε τήν ἀνωτέρω ταυτότητα μέ $\vec{F}$ τήν διανυσματικήν συνάρτησιν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

26. Ἀποδείξατε ὅτι: div $(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot$ rot $\vec{F} - \vec{F} \cdot$ rot $\vec{G}$.

27. Δίδεται τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2) \cdot (x\,i + y\,j + z\,k).$$

Νά προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $f(x^2+y^2+z^2)$ οὕτως, ὥστε νά εἶναι div $\vec{F} = 0$.

28. Δίδεται τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F} = \frac{2xf}{z-2}\, i - \frac{yf}{2(z-2)}\, j + \frac{(y^2-4x^2) \cdot f}{2(z-2)}\, k.$$

Νά προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $f = f(z)$ οὕτως, ὥστε τό ὡς ἄνω διανυσματικόν πεδίον νά εἶναι ἀστρόβιλον.

29. Ἔστωσαν f_1, f_2, f_3 τρεῖς πραγματικαί συναρτήσεις ἔχουσαι δευτέρας μερικάς παραγώγους ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$, ὁρίζομεν:

$$g(x) = g(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3).$$

Δείξατε ὅτι: διά $g(x) \neq 0$ ἰσχύει:

$$\frac{\nabla^2 g(x)}{g(x)} = \frac{f_1''(x_1)}{f_1(x_1)} + \frac{f_2''(x_2)}{f_2(x_2)} + \frac{f_3''(x_3)}{f_3(x_3)}.$$

30. Ἔστω F μία πραγματική συνάρτησις ἔχουσα συνεχῆ παράγωγον δευτέρας τάξεως F'' ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$. Ἐάν $x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ὁρίζομεν: $\varphi(x) = F(|x|)$.

Δείξατε ὅτι διά $x \neq 0$ ἔχομεν: $\nabla^2 \varphi(x) = F''(|x|) + \dfrac{2F'(|x|)}{|x|}$.

30α. Νά εὑρεθῇ ἕνα διάνυσμα A τοιοῦτον ὥστε:

$$\vec{f} \equiv yz\,i - zx\,j + (x^2+y^2)\,k = \nabla \times A$$

31. Δίδεται τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = 2xyz\,i + x^2 z\,j + x^2 y\,k.$$

Ἀποδείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι ἀστρόβιλον καί ἀκολούθως εὕρετε πάσας τάς συναρτήσεις $f = f(x,y,z)$ διά τάς ὁποίας εἶναι: $\text{grad}\, f = \vec{F}$.

Ἀπάντ. $f = f(x,y,z) = x^2yz + c$.

μετρηση βιβλιοθηκης

32. Δίδεται τό διανυσματικόν πεδίον $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = 2x\,i + y\,j - 3z\,k$. Δείξατε ὅτι: $\text{div}\,\vec{F} = 0$. Εὕρετε ἀκολούθως ὅλας τάς διανυσματικάς συναρτήσεις $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ τοιαύτας, ὥστε νά ἰσχύῃ: $\text{rot}\,\vec{G} = \vec{F}$.

Ὑπόδειξις: Παρατηρήσατε κατ' ἀρχήν ὅτι:

$$\text{Ἐάν } \text{rot}\,\vec{F} = 0, \text{ τότε } \vec{F} = \text{grad}\, f.$$

Πᾶσαι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως: $\text{rot}\,\vec{G} = \vec{F}$ δίδονται ὑπό τοῦ τύπου:

$\vec{G} = \vec{G}_0 + \text{grad}\, f$, ὅπου f εἶναι μία αὐθαίρετος βαθμωτή συνάρτησις καί $\vec{G}_0$ εἶναι τυχόν διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ περιστροφή εἶναι $\vec{F}$.

Διά νά εὕρετε τό $\vec{G}_0$ ὑποθέσατε: $\vec{G}_0 \cdot k = 0$. Ἀπάντ. $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z) = yz\,i - 2xz\,j + \text{grad}\, f$.

33. Ἀποδείξατε ὅτι: $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\nabla^2 \vec{F} + \nabla(\nabla \vec{F})$, $\vec{F}$ διαν συνάρτησις

34. Προσδιορίσατε τά α, β, γ ὥστε τό διαν. πεδίον:

$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (\alpha xz + x^2,\ \beta y + xy^2,\ z - z^2 + \gamma xz - 2xyz)$ νά εἶναι σωληνοειδές.

35. Ἐάν $\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x,\ 3xz + 2xy,\ 3xy - 2xz + 2z)$ καί

$$\vec{G} = (z^2 + 2x + 3y,\ 3x + 2y + z,\ y + 2xz),$$

δείξατε ὅτι τό διαν. πεδίον $\vec{F}$ εἶναι ἀστρόβιλον καί σωληνοειδές, ἐνῶ τό $\vec{G}$ εἶναι ἀστρόβιλον, ἀλλ' οὐχί σωληνοειδές.

36. Δείξατε ὅτι τό διανυσμ. πεδίον: $\vec{F} = 4\vec{a}\cdot e^{\vec{a}^2} - \vec{i}$, ὅπου $\vec{a} = (0, y, z)$ ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ καί ἐν συνεχείᾳ νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν ἰσοσταθμικῶν ἐπιφανειῶν.

37. Δίδεται τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = \left(4x, -y, -\frac{4x^2-y^2}{2(z-2)}\right).$$

Νά προσδιορισθῇ ἡ βαθμωτή συνάρτησις $\varphi(z)$, ὥστε τό διανυσματικόν πεδίον: $\varphi(z)\cdot\vec{F}(x,y,z)$ νά ἀπορρέῃ ἐκ δυναμικοῦ.

38. Ὑπολογίσατε τήν ροήν τοῦ διανυσμ. πεδίου: $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ διά μέσου τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2+z^2=4$ ἐκ τῶν ἔξω πρός τά μέσα.
Μέ τί ἰσοῦται ἡ ροή αὐτή κατά τό θεώρημα τοῦ Gauss; Ἐπαληθεύσατε τό ἐν λόγῳ ἀποτέλεσμα.

39. Δείξατε ὅτι: Ἐάν $\vec{F} = ax\vec{i} + \beta y\cdot\vec{j} + \gamma z\vec{k}$, ὅπου a, β, γ εἶναι σταθεραί καί S εἶναι μία κλειστή ἐπιφάνεια περικλείουσα ὄγκον V, τότε:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = (a+\beta+\gamma)\cdot V.$$

40. Ὑπολογίσατε τό $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας κέντρου 0 καί ἀκτῖνος r καί $\vec{F} = x^3\cdot\vec{i} + y^3\cdot\vec{j} + z^3\cdot\vec{k}$.

(41) Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ὁλοκλ. τύπου κατά div, δείξατε ὅτι $\iint_S \vec{r}\cdot\vec{ds} = 2\pi a^3$, ὅπου $\vec{r}$ εἶναι τό διάνυσμα θέσεως καί S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἡμισφαιρίου:

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\ z \geqq 0.$$

42. Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα τοῦ Gauss διά τήν διανυσματικήν συνάρτησιν: $\vec{F} = (2xy-y^2,\ xy^2+yz,\ 3xyz-z^2)$, ὅταν ὡς ἐπιφάνεια S ληφθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου: $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$, $0\leqq z\leqq 1$.

43. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Stokes ὑπολογίσατε τό ἐπικαμπύ-

λιον ὁλοκλήρωμα : $\oint_\Gamma e^{-x} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, ὅπου $\vec{F}=\text{ημ}y\cdot\vec{i}+\text{συν}y\cdot\vec{j}$ καί Γ εἶναι τό ὀρθογώνιον μέ κορυφάς: $(0,0,0)$, $(\pi,0,0)$, $(\pi,\frac{1}{2}\pi,0)$, $(0,\frac{1}{2}\pi,0)$.

Ἐπαληθεύσατε τό θεώρημα τοῦ Stokes διά τήν διανυσμ. συνάρτησιν $\vec{F}=(3y,-xz,yz^2)$, ὅταν ὡς ἐπιφάνεια S ληφθῇ τό παραβολοειδές $2z=x^2+y^2$ καί γραμμή Γ ἡ τομή αὐτοῦ καί τοῦ ἐπιπέδου $z=2$.

Ἐάν $\vec{F}=\text{grad}\,\varphi$ καί $\vec{F}$ εἶναι σωληνοειδές, δείξατε ὅτι:

$$\iiint_V (\vec{F}\cdot\vec{F})\,dv=\iint_S \varphi\vec{F}\cdot d\vec{s},$$

ὅπου S εἶναι μία κλειστή ἐπιφάνεια περικλείουσα ὄγκον V.

Δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Stokes μετασχηματίσατε τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα: $\iint_S (\text{rot}\,\vec{F})\cdot\vec{n}\,ds$ εἰς ἐπικαμπύλιον, ὅπου $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ καί S τό μέρος τοῦ παραβολοειδοῦς: $z=1-x^2-y^2$, $z\geq 0$. Ἀκολούθως εὕρετε τήν τιμήν τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος.

1. Δείξατε ὅτι τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=(y^2+2xz^2)\vec{i}+(2xy-z)\cdot\vec{j}+(2x^2z-y+2z)\cdot\vec{k}$$

ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ. Εὕρετε μίαν συνάρτησιν $f=f(x,y,z)$, οὕτως ὥστε:

$$\vec{F}=\text{grad}\,f.$$

1. Δοθέντος ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi=\varphi(x,y,z)$ ἱκανοποιεῖ τάς συνθήκας: $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$ καί $\varphi(0,0,z)=0$, εὕρετε τήν φ οὕτως, ὥστε ἡ διανυσμ. συνάρτησις:

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=(x^3+3y^2z)\vec{i}+6xyz\cdot\vec{j}+\varphi\cdot\vec{k}$$

ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ f. Εὕρετε ἀκολούθως τήν ἐξίσωσιν τῶν ἰσοσταθμικῶν ἐπιφανειῶν καί δείξατε ὅτι τό διανυσματικόν πεδίον $\vec{F}$ δέν εἶναι σωληνοειδές.

7. Δείξατε ὅτι: ἐάν δύο διανυσμ. πεδία $\vec{F}$ καί $\vec{G}$ εἶναι ἀστρόβιλα, τότε τό διανυσμ. πεδίον $\vec{F}\times\vec{G}$ εἶναι σωληνοειδές.

). Θεωροῦμεν μίαν κλειστὴν ἐπιφάνειαν ἐμβαδοῦ S καὶ τὸ μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα αὐτῆς $\vec{n}$ διευθυνόμενον πρὸς τὰ ἔξω τῆς ἐπιφανείας. Δείξατε ὅτι:

$$\text{i)}\ \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,ds=0\ ,\quad \text{ii)}\ \iiint_V \operatorname{div}\vec{n}\,dv=S$$

(<u>Σημ</u>. Μερικοὶ συγγραφεῖς ἀντὶ $\vec{n}ds$ γράφουν $\vec{ds}$ θεωροῦντες αὐτὸ ὡς ἕνα ἀπειροστὸν διάνυσμα, ὁμόρροπον πρὸς τὸ $\vec{n}$ καὶ μὲ μέτρον ds καὶ οὕτω ἡ σχέσις (i) δύναται νὰ γραφῇ: $\iint_S(\nabla\times\vec{F})\,\vec{ds}=0$).

1. Ἀποδείξατε ὅτι: $\oint d\vec{r}\times\vec{F}=\iint_S(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{F}\,ds$.

<u>Ὑπόδ</u>. Ἐφαρμόσατε τὸ θεώρημα τοῦ Stokes, ὅπου ὅμως ὡς $\vec{F}$ θὰ λάβετε τὸ $\vec{F}\times\vec{C}$, ὅπου $\vec{C}$ εἶναι ἕνα σταθερὸ διάνυσμα.

1. Δείξατε ὅτι: $\iiint_V \nabla\varphi\cdot\vec{F}\,dv=\iint_S \varphi\vec{F}\cdot\vec{ds}-\iiint_V \varphi\nabla\cdot\vec{F}\,dv$.

1. Ἐὰν ἡ $f(x,y,z)$ εἶναι ἁρμονικὴ συνάρτησις ἐπὶ τοῦ χωρίου V τοῦ ὁποίου τὸ σύνορον εἶναι ἡ ἐπιφάνεια S καὶ τῆς ὁποίας τὸ μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα διευθυνόμενον πρὸς τὰ ἔξω τῆς ἐπιφανείας εἶναι τὸ $\vec{n}$, δείξατε ὅτι:

i) $\iint_S \frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\,ds=0$ ἤ $\iint_S \nabla f\cdot\vec{n}\,ds=0$ ii) $\iint_S f\frac{df}{\partial\vec{n}}\,d\sigma=\iiint_V |\nabla f|^2\,dx\,dy\,dz$

iii) Ἐὰν αἱ f καὶ g εἶναι ἁρμονικαὶ ἐντὸς τοῦ V, τότε: $\iint_S\left(f\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}-g\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\right)ds=0$.

<u>Ὑπόδ</u>. Χρησιμοποιήσατε τοὺς ὁλοκληρ. τύπους τοῦ Green.

1.) Δείξατε ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\vec{F}=-\rho\,\text{συν}\theta\cdot\mathbf{e}_\rho+\rho\,\text{ημ}\theta\,\mathbf{e}_\theta+z\,\text{συν}\theta\,\mathbf{e}_z$ ὅπου ρ,θ,z εἶναι κυλινδρικαὶ συντεταγμέναι εἶναι σωληνοειδὲς (δηλ. $\operatorname{div}\vec{F}=0$)

i,) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\operatorname{rot}\vec{F}$ ὅταν ἡ $\vec{F}$ ἐκφραζομένη εἰς σφαιρικὰς συντεταγμένας ἔχει τὴν ἔκφρασιν $\vec{F}=\rho\,\text{συν}\varphi\,\mathbf{e}_\rho+\rho\,\text{ημ}\varphi\,\mathbf{e}_\theta+\rho\theta\cdot\mathbf{e}_\varphi$.

i. Ἐὰν $\Phi=\rho^2\text{συν}^2\theta$, ὅπου ρ,θ κυλινδρικαὶ συντεταγμέναι εὕρατε τὸ $\nabla^2\Phi$.

!. Νὰ παρασταθῇ τὸ διάνυσμα $\vec{F}=2y\mathbf{i}-z\mathbf{j}+3x\mathbf{k}$ εἰς σφαιρικὰς συντεταγμένας δηλ. νὰ εὑρεθοῦν τὰ A_ρ, A_θ, A_φ.

1. Δείξατε ὅτι τὸ σύστημα τῶν σφαιρικῶν συντεταγμένων εἶναι ὀρθογώνιον.

Γενικαί ἀσκήσεις ἐπί τῶν Κεφαλαίων XII καί XIII.

1. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_S \frac{1}{xyz}\,(yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx + xy\,dx\,dy)$$ ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, μέ προσανατολισμόν ἐκ τῶν ἔσω πρός τά ἔξω.

2. Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια $S: z=f(x,y)$ ὁριζομένη ὑπό τῆς πεπλεγμένης ἐξισώσεως $F(x,y,z)=0$. Δείξατε ὅτι τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_S H\,d\sigma$ ὑπεράνω τῆς S γίνεται:

$$\iint_{R_{xy}} \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\cdot\frac{H}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\,dx\,dy$$

ἀρκεῖ $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ καί R_{xy} εἶναι ἡ προβολή τῆς S εἰς τό xy-ἐπίπεδον.

Ἐάν $\mathbf{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ καί $\mathbf{V}$ τυχόν διάνυσμα τότε $\iint_S(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,ds=\iint_{R_{xy}}(\mathbf{V}\cdot\nabla F)\frac{1}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\,dx\,dy.$

3. Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια S φρασσομένη ὑπό τῆς κλειστῆς καμπύλης Γ καί ἄς θεωρήσωμεν τό ὁλοκλήρωμα:

$$\Omega(a,\beta,\gamma)=\iint_S\frac{(a-x)\,dy\,dz+(\beta-y)\,dz\,dx+(\gamma-z)\,dx\,dy}{r^3}$$

(ὅπου $r^2=(a-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2$) ὡς συνάρτησιν τῶν a,β,γ. Δείξατε τούς κάτωθι τύπους:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}=\int_\Gamma\frac{(z-\gamma)dy-(y-\beta)dx}{r^3},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}=\int_\Gamma\frac{(x-\gamma)dz-(z-\gamma)dx}{r^3},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}=\int_\Gamma\frac{(y-\beta)dx-(x-a)dy}{r^3}$$

Σημ: Οἱ ἀνωτέρω τύποι ἔχουν μεγάλην ἐφαρμογήν εἰς τόν ἠλεκτρομαγνητισμόν. Δύνανται δέ νά γραφοῦν καί ὑπό τήν κάτωθι μορφήν:

$$\operatorname{grad}\Omega=-\int_\Gamma\frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

ὅπου $\mathbf{r}$ τό διάνυσμα μέ συνιστώσας $x-a,\ x-\beta,\ x-\gamma$.

4. Νά ὑπολογισθῇ δι' ἀναγωγῆς εἰς διπλοῦν τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $J=\oint_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}$ ὅπου $\vec{F}=yi+zj+x\cdot k$ καί Γ ἡ γραμμή μέ ἐξισώσεις $x^2+y^2+z^2=1$,

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

§1. ΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ MAINARDI-CODAZZI

"Εστω $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u,v) = x(u,v)\,i + y(u,v)\,j + z(u,v)\,k$ ἡ ἐξίσωσις μιᾶς ἀναλυτικῆς ἐπιφανείας, ὁπότε εἰς κάθε σημεῖον της θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{r}_{uu}) = \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{r}_{uv}), \quad \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{r}_{uv}) = \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{r}_{vv}) \qquad (1)$$

Ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\mathfrak{r}_{uu}$, $\mathfrak{r}_{uv}$, $\mathfrak{r}_{vv}$ διὰ τῶν ἴσων των, ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ Gauss (Σελὶς 327 ἐξισώσεις (6)) θὰ λάβωμεν:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\Gamma^1_{11}\mathfrak{r}_u + \Gamma^2_{11}\mathfrak{r}_v + LN\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\Gamma^1_{12}\mathfrak{r}_u + \Gamma^2_{12}\mathfrak{r}_v + MN\right) \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\Gamma^1_{12}\mathfrak{r}_u + \Gamma^2_{12}\mathfrak{r}_v + MN\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\Gamma^1_{22}\mathfrak{r}_u + \Gamma^2_{22}\mathfrak{r}_v + NN\right) \end{aligned}\right| \quad (2) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\Gamma^1_{11}\mathfrak{r}_u + \Gamma^1_{11}\mathfrak{r}_{uv} + \frac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{11}\mathfrak{r}_v + \Gamma^2_{11}\mathfrak{r}_{vv} + L_vN + LN_v = \frac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}\mathfrak{r}_u + \Gamma^1_{12}\mathfrak{r}_{uu} + \frac{\partial}{\partial u}\Gamma^2_{12}\mathfrak{r}_v + \Gamma^2_{12}\mathfrak{r}_{uv} + M_uN + MN_u$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\Gamma^1_{12}\mathfrak{r}_u + \Gamma^1_{12}\mathfrak{r}_{uv} + \frac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}\mathfrak{r}_v + \Gamma^2_{12}\mathfrak{r}_{vv} + M_vN + MN_v = \frac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{22}\mathfrak{r}_u + \Gamma^1_{22}\mathfrak{r}_{uu} + \frac{\partial}{\partial u}\Gamma^2_{22}\mathfrak{r}_v + \Gamma^2_{22}\mathfrak{r}_{uv} + M_uN + MN_u$$

Ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις θέσωμεν ὅπου $\mathfrak{r}_{uu}$, $\mathfrak{r}_{uv}$, $\mathfrak{r}_{vv}$ πάλιν τὰς τιμάς των ἐκ τῶν τύπων τοῦ Gauss, ὅπου δὲ N_u, N_v τὰς τιμάς των ἐκ τῶν τύπων τοῦ Weingarten, θὰ λάβωμεν τελικῶς δύο σχέσεις μεταξὺ τῶν διανυσμάτων $\mathfrak{r}_u$, $\mathfrak{r}_v$ καὶ N, αἱ ὁποῖαι θὰ ἱκανοποιοῦνται δι' οἱανδήποτε τιμὴν αὐτῶν ἀφοῦ αἱ σχέσεις (1) ἰσχύουν διὰ κάθε ἀναλυτικὴν ἐπιφάνειαν. Συνεπῶς θὰ πρέπει οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀνωτέρω διανυσμάτων νὰ μηδενίζονται.

Ἐκ τοῦ μηδενισμοῦ τῶν συντελεστῶν τοῦ διανύσματος N εἰς τὰς δύο προκυπτούσας σχέσεις θὰ λάβωμεν τελικῶς:

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= L\Gamma^1_{12} + M\left(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\right) - N\Gamma^2_{11} \\ M_v - N_u &= L\Gamma^1_{22} + M\left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\right) - N\Gamma^2_{12} \end{aligned} \qquad (3)$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις λέγονται ***ἐξισώσεις τοῦ Codazzi***, ἐπειδὴ ὅμως ἀνάλογοι πρὸς αὐτὰς ἐδόθησαν ἐνωρίτερον ὑπὸ τοῦ Mainardi, ἐπεκράτησεν νὰ λέγωνται ἐξισώσεις τῶν Mainardi-Codazzi.

Διὰ μηδενισμοῦ ἐξ ἄλλου τῶν συντελεστῶν τῶν $\mathfrak{r}_u$, $\mathfrak{r}_v$ εἰς τὰς δύο προκυπτούσας σχέσεις, εὑρίσκομεν τέσσαρες ἀκόμη ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ὅμως ὡς εὐκόλως ἀναγνωρίζεται, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ συνδιασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (3)

II. Εἰς τὴν §4 τοῦ V Κεφαλαίου (σελ. 120-129) ἐμελετήσαμεν τὰ τοπικὰ ἀκρότατα συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν ὑποκειμένων εἰς δεδομένας δεσμευτικὰς συνθήκας. Ἐκεῖ ἀναφέραμεν τὴν μέθοδον τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange καὶ ἀκολούθως διατυπώσαμεν δύο προτάσεις τὰς V-4-2 καὶ V-4-3 διὰ τὰς εἰδικὰς περιπτώσεις ὅπου $(q=3,\ p=2)$ καὶ $(q=3,\ p=1)$ ποὺ δίδουν ἱκανὰς συνθήκας διὰ νὰ ἔχει μία συνάρτησις τοπικὸν ἀκρότατον ὑπὸ συνθήκας. Εἰς αὐτὸ τὸ Παράρτημα θὰ γενικεύσωμεν τὰς ἀναφερθείσας Προτάσεις δηλ. θὰ ἀναφέρωμεν τὰς ἱκανὰς συνθήκας ποὺ πρέπει νὰ πληροῦνται ἵνα ἡ συνάρτησις $f(x_1,x_2,\dots,x_q)$ ὑποκειμένη εἰς τὰς δεσμευτικὰς συνθήκας $\varphi_i(x_1,x_2,\dots,x_q)=0,\ i=1,2,\dots p\ (p<q)$ ἔχει τοπικὸν ἀκρότατον.

Ὅπως ἀναφέραμεν εἰς τὴν προαναφερθεῖσα παράγραφον ἡ μέθοδος τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange συνίστατο εἰς τὸ νὰ σχηματίσωμεν τὴν συνάρτησιν

$$F(x_1,x_2,\dots,x_q,\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_p)=f(x_1,\dots x_q)+\lambda_1\varphi_1(x_1,\dots x_q)+\dots+\lambda_p\varphi_p(x_1,\dots x_q) \quad (1)$$

ὅπου οἱ $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_p$ παράμετροι.

Ἀκολούθως μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν εὑρήκαμεν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος τῶν $q+p$ ἐξισώσεων ἤτοι τῶν

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\dots,\frac{\partial F}{\partial x_q}=0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=\varphi_1=0,\dots\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_p}=\varphi_p=0 \qquad (2)$$

καὶ ἔστω ὅτι εὑρήκαμεν μίαν λύσιν αὐτοῦ τοῦ συστήματος τὴν $X_0=(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_q,\eta_1,\eta_2,\dots\eta_p)$

Τέλος ἐξετάσαμεν ἂν τὸ σημεῖον $(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_q)$ εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀκροτάτου. Τώρα εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ποὺ θὰ ἀντιμετωπίσωμεν αὐτὸ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀναγκαῖον νὰ δώσωμεν ὡρισμένους συμβολισμούς.

Πρὸς τούτοις θεωροῦμεν τὴν $(q+p)$ τάξεως ὁρίζουσα.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} F_{x_1x_1} & \cdots & F_{x_1x_q} & \varphi_{1x_1} & \cdots & \varphi_{px_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{x_qx_1} & \cdots & F_{x_qx_q} & \varphi_{1x_q} & \cdots & \varphi_{px_q} \\ \varphi_{1x_1} & \cdots & \varphi_{1x_q} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{px_1} & \cdots & \varphi_{px_q} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ὁρίζουσα διαγράφομεν τὴν α̲η̲ γραμμὴ καὶ τὴν α̲η̲ στήλη καὶ οὕτω θὰ προκύψη μία ἄλλη ὁρίζουσα τὴν ὁποίαν θὰ παραστήσωμεν διὰ Δ_2. Ἀκο-

λοίδως από την Δ_2 εάν αποκόψωμεν πάλι την α^{η} γραμμή και α^{η} στήλη θά προκύψη μία άλλη ορίζουσα την οποίαν παριστῶμεν διά Δ_3. Συνεχίζοντες κατ' αυτόν τόν τρόπον θά καταλήξωμεν μέχρι τόν σχηματισμόν της ορίζούσης Δ_{q-p}. Κατ' αυτόν τόν τρόπον θά σχηματίσωμεν τάς κάτωθι $q-p$ τό πλῆθος ορίζούσας ἤτοι

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} F_{x_i x_i} \cdots\cdots F_{x_i x_q} & \varphi_{1x_i} \cdots\cdots \varphi_{px_i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ F_{x_q x_i} \cdots\cdots F_{x_q x_q} & \varphi_{1x_q} \cdots\cdots \varphi_{px_q} \\ \varphi_{1x_i} \cdots\cdots \varphi_{1x_q} & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_{px_i} \cdots\cdots \varphi_{px_q} & 0 \cdots\cdots 0 \end{vmatrix}$$

ὅπου $i=1,2,\cdots q-p$. Ἡ Δ_i εἶναι μία ορίζουσα $(q+p-i+1)$ τάξεως).

Ἤδη διατυπώνομεν ἄνευ αποδείξεως τό κάτωθι βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 1: Ἔστω ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x_1,x_2,\cdots x_q)$ ὡρισμένη εἰς ἕνα ανοικτόν υποσύνολον U τοῦ R^q καί ἔχουσα μερικάς παραγώγους μέχρι **τρίτης** τάξεως καί υποκειμένη εἰς τάς δεσμευτικάς συνθήκας $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots x_q)=0$, $i=1,2,\ldots p$. Χρησιμοποιοῦμεν τούς ορισμούς καί συμβολισμούς πού εδώσαμεν ανωτέρω. Ἔστω $(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_q,\eta_1,\eta_2,\ldots\eta_p)$ μία λύσις τοῦ συστήματος τῶν εξισώσεων (1) καί ἔστω επί πλέον ὅτι:

$$\text{Βαθ.}\begin{bmatrix} \varphi_{1x_1} \cdots\cdots \varphi_{1x_q} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{px_1} \cdots\cdots \varphi_{px_q} \end{bmatrix} = p$$

Τότε διά νά εἶναι τό σημεῖον $(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_q)$ θέσις ακροτάτου διά τήν συνάρτησιν $f(x_1,x_2,\cdots x_q)$ αρκεῖ νά πληροῦνται αἱ κάτωθι συνθῆκαι:

1^{ov}/ Ἐάν p: ἄρτιος καί αἱ $\Delta_i(\xi_1,\cdots\xi_q,\eta_1,\cdots\eta_p)>0$ $(i=1,2,\cdots q-p)$ ἔχομεν σχετικό ελάχιστο.

2^{ov}/ Ἐάν p: περιττός καί αἱ $\Delta_i(\xi_1,\cdots\xi_q,\eta_1\cdots\eta_p)<0$ $(i=1,2,\ldots q-p)$ ἔχομεν σχετικό ελάχιστο.

3^{ov}/ Ἐάν q: ἄρτιος καί $(-1)^i\Delta_i(\xi_1,\cdots\xi_q,\eta_1,\cdots\eta_p)<0$ $(i=1,2,\ldots q-p)$ ἔχομεν σχετικό μέγιστο.

4^{ov}/ Ἐάν q: περιττός καί $(-1)^i\Delta_i(\xi_1,\cdots\xi_q,\eta_1,\cdots\eta_p)>0$ $(i=1,2,\cdots q-p)$ ἔχομεν σχετικό μέγιστο.

Παρατήρησις: θά πρέπει σύμφωνα προς τό ανωτέρω θεώρημα νά προσδιορίσωμεν τά πρόσημα τῶν οριζουσῶν Δ_1 $\Delta_2,\ldots,\Delta_{q-p}$ καί αναλόγως τῶν περιπτώσεων θά συμπεράνωμεν περί τοῦ εἴδους τοῦ ακροτάτου.

Ἐφαρμογή 2α: Μεταξύ τῶν κυρτῶν πολυγώνων μέ η πλευράς τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς μίαν περιφέρειαν ἀκτῖνος R νά εὑρεθῇ αὐτό πού ἔχει μέγιστη περίμετρο.

Λύσις: Δυνάμεθα χωρίς νά περιορίσωμεν τήν γενικότητα τοῦ προβλήματος νά ὑποθέσωμεν τό κέντρον τῆς περιφερείας εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ πολυγώνου καί συνεπῶς αἱ πλευραί φαίνονται ὑπό τοῦ κέντρου ὑπό γωνίαν θ_i τοιαύτη ὥστε $0<\theta_i<\pi$.

Ἐάν $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ εἶναι αἱ ἀνωτέρω ἐπίκεντροι γωνίαι πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς πλευράς τότε θά εἶναι $\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 2\pi$.

Ὡς γνωστόν ἡ περίμετρος τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου θά ἔχει τήν τιμήν:

$$P = 2R\left(\eta\mu\frac{\theta_1}{2}+\cdots+\eta\mu\frac{\theta_n}{2}\right) \qquad (1)$$

Προφανῶς πρόκειται διά δεσμευμένον ἀκρότατον συναρτήσεως τῆς ὁποίας αἱ μεταβληταί $\theta_1, \dots \theta_n$ ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν:

$$\varphi \equiv \theta_1+\cdots+\theta_n-2\pi = 0 \qquad (2).$$

Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν ἤδη τό ἀκρότατον τῆς συναρτήσεως

$$f \equiv \eta\mu\frac{\theta_1}{2}+\cdots\eta\mu\frac{\theta_n}{2} \qquad (1')$$

ὑπό τήν συνθήκη (2).

Πρός τούτοις σχηματίζομεν τήν βοηθητικήν συνάρτησιν

$$F = \eta\mu\frac{\theta_1}{2}+\cdots+\eta\mu\frac{\theta_n}{2}+\lambda(\theta_1+\cdots+\theta_n-2\pi) \qquad (3)$$

Παραγωγίζομεν τήν (3) ὡς πρός $\theta_1, \dots \theta_n$ καί ἀκολούθως ἐξισοῦμεν μέ τό μηδέν τάς πρώτας μερικάς παραγώγους ἤτοι:

$$\frac{\partial F}{\partial\theta_1} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1}{2}+\lambda = 0, \dots \frac{\partial F}{\partial\theta_n} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_n}{2}+\lambda = 0, \ \frac{\partial F}{\partial\lambda} = \theta_1+\cdots+\theta_n-2\pi = 0$$

Λόγῳ τῆς συμμετρίας ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1}{2} = \cdots = \sigma\upsilon\nu\frac{\theta_n}{2} = -2\lambda \Longrightarrow \theta_1 = \cdots = \theta_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Εἶναι δέ, $F_{\theta_i\theta_i} = -\frac{1}{4}\eta\mu\frac{\theta_i}{2}$, $F_{\theta_i\theta_j} = 0 \ (i\neq j)$ καί $\varphi_{\theta_i} = 1$

ὅπου $i, j = 1, 2, \dots \eta$ καί $\theta_i = \frac{2\pi}{\eta}$ διά $i = 1, 2, \cdots \eta$.

Αἱ ὁρίζουσαι λοιπόν Δ_i τοῦ προαναφερθέντος θεωρήματος διά $\theta_i = \frac{2\pi}{\eta}$, $i=1,2,\cdots\eta$ γίνονται:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}\,\eta\mu\frac{\pi}{\eta} & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4}\,\eta\mu\frac{\pi}{\eta} & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{4}\,\eta\mu\frac{\pi}{\eta} & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-i+1} \eta\mu^{n-i}\,\frac{2\pi}{\eta}$$

Διά η= ἄρτιος ἤ η=περιττός παρατηροῦμεν ὅτι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι 3 ἤ 4 τοῦ θεωρήματος 1 καί ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν μεγίστη **περίμετρο.**

Ὅθεν, μεταξύ τῶν κυρτῶν πολυγώνων τοῦ προαναφερθέντος προβλήματος μέ η πλευράς εἶναι τό <u>κανονικόν</u> αὐτό πού ἔχει μέγιστον ἐμβαδόν.

<u>**Παρατήρησις**</u>: Ἐργαζόμενοι κατά τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπον ὡς ἀνωτέρω δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ὅτι: Μεταξύ τῶν κυρτῶν πολυγώνων μέ η πλευράς τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς ἕνα κύκλον, τό κανονικόν πολύγωνον ἔχει τό μεγιστο **ἐμβαδόν.**

I. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x_1, x_2, \cdots x_q)$ ὑποκειμένη εἰς τάς δεσμεύσεις $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots x_q) = 0$ $(i=1,2,\cdots p)$ $(p<q)$ καί ἔστω $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_q, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_p)$ μία λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (2). Σχετικῶς ἄν τό σημεῖον $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_q)$ εἶναι θέσις ἀκροτάτου ὑπό δέσμευσιν ἰσχύει τό κάτωθι βασικό θεώρημα:

<u>**Θεώρημα 2**</u>. <u>Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω τό σημεῖον</u> $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_q)$ <u>εἶναι τότε καί μόνον τότε θέσις δεσμευμένου ἐλαχίστου ἐάν αἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως</u> (ὡς πρός λ) <u>ἤτοι τῆς</u>:

$$\begin{vmatrix} F_{x_1x_1}-\lambda & \cdots & F_{x_1x_q} & \varphi_{1x_1} & \cdots & \varphi_{px_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{x_qx_1} & \cdots & F_{x_qx_q}-\lambda & \varphi_{1x_q} & \cdots & \varphi_{px_q} \\ \varphi_{1x_1} & \cdots & \varphi_{1x_q} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{px_1} & \cdots & \varphi_{px_q} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(πού εἶναι πᾶσαι πραγματικαί) <u>εἶναι θετικαί</u>·

Τό σημεῖον $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_q)$ εἶναι τότε καί μόνον τότε θέσις δεσμευμένου μεγίστου ἐάν πᾶσαι αἱ ρίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι πᾶσαι ἀρνητικαί.

Τέλος ἐάν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ἀλλάζουν πρόσημον τότε ἡ συνάρτησις δέν ἔχει δεσμευμένο ἀκρότατον.

Ἐφαρμογή 31 Νά εὑρεθοῦν τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $f(x_1, \cdots x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ ὑπό τήν δέσμευσιν $\varphi = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - 1 = 0$, ὅπου $(a_1, \cdots a_n) \neq (0, \cdots 0)$.

Λύσις Ἐφαρμόζοντες τήν μέθοδον τοῦ Lagrange σχηματίζομεν τήν βοηθητικήν συνάρτησιν:

$$F(x_1, \cdots x_n, \lambda) = f(x_1, \cdots x_n) + \lambda \varphi(x_1, \cdots x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - 1)$$

Ἀκολούθως εὑρίσκομεν:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda a_1 = 0, \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n} = 2x_n + \lambda a_n = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - 1 = 0$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εὐκόλως εὑρίσκομεν:

$$x_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}, \cdots x_n = \frac{a_n}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}, \quad \lambda = \frac{-2}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

Ὅθεν, ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$M(\xi_1, \cdots \xi_n, \eta_1) = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}, \cdots \frac{a_n}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}, -\frac{2}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\right).$$

Ἀκολούθως εὑρίσκομεν:

$F_{x_i x_i} = 2$, $F_{x_i x_j} = 0$ $(i \neq j)$ καί $\varphi_{x_i} = a_i$ $(i, j = 1, 2, \cdots n)$. Ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τό θεώρημα 2. Διά τό εὑρεθέν σημεῖον ἡ ὁρίζουσα γίνεται:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \cdots\cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \cdots\cdots & 0 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 2-\lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots & a_n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ἡ ὁποία ἔχει τήν ρίζα $\lambda = 2$ μέ πολλαπλότητα $n-1$. Ἄρα ἔχομεν ἐλάχιστο.

Παρατήρησις: Ἡ ἀνωτέρω ἐφαρμογή ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά εὕρωμεν τήν ἀπόστασιν τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων τοῦ χώρου R^n ἀπό τό ὑπερ-ἐπίπεδον $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - 1 = 0$.

IV. Διάφορα Προβλήματα:

Πρόβλημα 1ον: Νά εὑρεθοῦν τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $f=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, γνωρίζοντες ὅτι, $g=\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j-1=0$ ὅπου a_{ij} εἶναι ἕνας συμμετρικός τετραγωνικός πίναξ η×η-τάξεως.

Λύσις: Πρός τοῦτο σχηματίζομεν τήν συνάρτησιν:

$$F=g-\lambda\cdot f=\left(\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j-1\right)-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \qquad (1)$$

Ἀκολούθως θεωροῦμεν τό σύστημα τῶν πρώτων μερικῶν παραγώγων τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως ἤτοι:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_j a_{ij}x_j-\lambda x_i \quad (2) \qquad (j=1,2,\ldots\eta).$$

Ἀναλυτικῶς αἱ ἐξισώσεις (2) γράφονται:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1\eta}x_n&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_\eta&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n&=0\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ἵνα τό σύστημα (3) ἔχει μή μηδενικήν λύσιν ὡς πρός $x_1,x_2,\ldots x_\eta$ ἀρκεῖ ἡ ὁρίζουσα τοῦ ἀνωτέρω συστήματος νά εἶναι ἴση πρός τό μηδέν. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ἀνωτέρω ὁρίζουσα ἐξισουμένη πρός τό μηδέν εἶναι ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωσις τοῦ πίνακος $A=[a_{ij}]$ δηλ. εἶναι ἡ ἐξίσωσις $|A-\lambda I|=0$ (4). Αἱ δέ τιμαί πού πρέπει νά λάβῃ ὁ λ διά νά ἔχωμεν μή τετριμένη λύσιν εἶναι αἱ ὡς πρός λ ρίζαι τῆς η^στοῦ βαθμοῦ ἐξισώσεως (4). Λόγῳ τῆς συμμετρίας τοῦ πίνακος A ($a_{ij}=a_{ji}$) ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλαι αἱ ρίζαι τῆς (4) εἶναι πραγματικαί.

Πολλαπλασιάζοντες τάς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (3) κατά σειράν ἐπί $x_1,x_2,\ldots x_\eta$ καί προσθέτοντες εὑρίσκομεν:

$$\lambda\cdot\sum_i x_i^2+\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j=0 \text{ ἤ } \lambda\cdot f+1=0 \text{ ἤ } f=-\frac{1}{\lambda} \quad (5)$$

Ἡ (5) σημαίνει ὅτι, διά τήν μή μηδενικήν λύσιν τοῦ συστήματος (3) καί τῆς δεσμεύσεως πού ἀντιστοιχεῖ σέ μία ρίζα λ τῆς ἐξισώσεως (4) ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f ἰσοῦται πρός $-\frac{1}{\lambda}$. Τέλος ἡ μεγίστη καί ἡ ἐλαχίστη τιμή τῆς f ἰσοῦται ἀντιστοίχως πρός τήν μεγίστην καί ἐλαχίστην τιμήν τοῦ $-\frac{1}{\lambda}$.

Παρατήρησις: Τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά εὕρωμεν τά σημεῖα τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς $\sum a_{ij} x_i x_j = 1$, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις $\sqrt{f} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ ἀπό τήν ἀρχήν εἶναι μεγίστη ἤ ἐλαχίστη.

Πρόβλημα 2ον Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα $x=(x_1, \dots x_n)$ μιᾶς ὑπέρ-ἐπιφανείας μέ ἐξίσωσιν $\varphi(x_1, \dots x_n) = 0$ (φ: συνεχής) τοῦ χώρου R^n, τῆς ὁποίας ἡ Εὐκλείδειος ἀπόστασις ἀπό ἕνα δεδομένο σημεῖο $b=(b_1, \dots b_n)$ εἶναι ἐλαχίστη.

Λύσις: Τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά εὕρωμεν σημεῖον $x=(x_1, \dots x_n)$ μεταξύ τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας $\varphi(x_1, \dots x_n) = 0$ καθιστόν ἐλαχίστη τήν συνάρτησιν: $f(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - b_i)^2$.

Ἐφαρμόζοντες τήν μέθοδον τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange σχηματίζομεν τήν συνάρτησιν:

$$F(x_1, \dots x_n, \lambda) = f(x_1, \dots x_n) + \lambda \cdot \varphi(x_1, \dots x_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - b_i)^2 + \lambda \cdot \varphi(x_1, \dots x_n)$$

Εἶναι δέ,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - b_1) + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \dots \frac{\partial F}{\partial x_n} = 2(x_n - b_n) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \qquad \text{καί} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi.$$

Μηδενίζοντες τάς ἀνωτέρω μερικάς παραγώγους, τελικῶς εὑρίσκομεν:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{x_1 - b_1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{x_2 - b_2} = \dots = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}}{x_n - b_n} = -\frac{2}{\lambda} \text{ καί } \varphi = 0.$$

Αἱ τελευταῖαι ἐξισώσεις εκφράζουν πολύ ἁπλᾶ γεωμετρικῶς ὅτι τό ζητούμενον σημεῖον, ἐάν αὐτό δέν εἶναι ἕνα ἰδιάζον σημεῖον, εἶναι ὁ πούς τῆς καθέτου ἀγομένης ἀπό τό σημεῖον $b=(b_1, \dots b_n)$ πρός τήν ἐπιφάνεια.

Πρέπει δέ νά παρατηρήσωμεν ὅτι, κάθε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τό ὁποῖον εἶναι ὁ πούς μιᾶς καθέτου δέν δίδει ἀναγκαστικῶς ἕνα ἐλάχιστον τῆς ἀποστάσεως. Τοῦτο δέ θά εἶναι ἤ ἕνα σχετικό ἐλάχιστο ἤ ἕνα σχετικό μέγιστο ἤ ἕνα ἰδιάζον σημεῖον.

Παρατήρησις: Ἡ 3η ἐφαρμογή προφανῶς εἶναι ειδική περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος. Ἐδῶ ἐδώσαμεν γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 3ον Νά εὑρεθῆ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

Λύσις: Ἄς θεωρήσωμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι δίδονται εἰς τόν χῶρον ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

$$(\varepsilon): \left.\begin{aligned} x &= az + a \\ y &= bz + b \end{aligned}\right\} (1) \quad \text{καί} \quad (\varepsilon'): \left.\begin{aligned} x &= a'z + a' \\ y &= b'z + b' \end{aligned}\right\} (1')$$

Ἔστωσαν $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ἕνα τυχόν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε) καί $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ἕνα τυχόν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε').

Τό τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο αὐτῶν σημείων εἶναι :

$$f(z_1,z_2)=(\overrightarrow{M_1M_2})^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \quad (2)$$

Πράγματι ἡ ἀπόστασις $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, λόγῳ τῶν (1) καί (1') εἶναι συνάρτησις μόνον τῶν z_1, z_2.

Ἤδη ἄς θεωρήσωμεν τάς μερικάς παραγώγους τῆς συναρτήσεως $f(z_1,z_2)$ ὡς πρός z_1, z_2 ἤτοι :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_1}=(x_1-x_2)\cdot\frac{dx_1}{dz_1}+(y_1-y_2)\cdot\frac{dy_1}{dz_1}+(z_1-z_2)=(a^2+b^2+1)z_1-(a'a+b'b+1)z_2+a(\alpha-\alpha')+b(\beta-\beta') \quad (3)$$

καί $$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_2}=-(x_1-x_2)\frac{dx_2}{dz_2}-(y_1-y_2)\frac{dy_2}{dz_2}-(z_1-z_2)=-(aa'+bb'+1)z_1+(a'^2+b'^2+1)z_2-a'(\alpha-\alpha')+b'(\beta-\beta') \quad (4)$$

Τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων: $\frac{\partial f}{\partial z_1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z_2}=0$ (γραμμικόν σύστημα ἐπιδέχεται ἐν γένει, μία μοναδική λύσιν ἔστω αὕτη εἶναι ἡ (z_1^0, z_2^0).

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}=a^2+b^2+1,\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_2}=-(a'a+b'b+1),\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}=a^2+b^2+1.$$

Κατ' ἀκολουθίαν ἔχομεν :

$$\frac{\Delta}{4}=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_2}\right)^2\right]=-(aa'+bb'+1)^2+(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1)=$$
$$=+(ab'-ba')^2+(a-a')^2+(b-b')^2>0.$$

Ἐπειδή $\Delta>0$ καί $\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}>0$ ἕπεται ὅτι εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον (z_1^0, z_2^0) ἡ συνάρτησις παρουσιάζει ἐλάχιστον (βλ. Πρότασις V-1-2).

Ἀσκήσεις :

1. Νά χωρισθῇ ὁ θετικός ἀριθμός α ὡς ἄθροισμα τριῶν θετικῶν ἀριθμῶν x, y, z εἰς τρόπον ὥστε τό γινόμενον $x^m\cdot y^\eta\cdot z^p$ νά καθίσταται μέγιστον. (m, η, p εἶναι δοθέντες θετικοί ἀριθμοί).

   Ὑπόδ: Ἀρκεῖ νά εὑρεθῇ τό μέγιστον τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=m\log x+\eta\cdot\log y+p\log z$.

2. Νά εὑρεθῇ τό μέγιστον τοῦ γινομένου $(x_1x_2\cdots x_\eta)^2$ ὑποκείμενον εἰς τήν συνθήκην $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_\eta^2=1$.

   Ἀκολούθως χρησιμοποιοῦντες τό ἀνωτέρω συμπέρασμα δείξατε διά τούς θετικούς ἀριθμούς $a_1, a_2, \ldots a_\eta$ ὅτι :

$$(a_1\cdot a_2\cdots a_\eta)^{1/\eta}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_\eta}{\eta}$$

3. Ἐὰν $f(x)=x_1^k+\cdots+x_n^k$, $x=(x_1,\cdots x_n)$, δείξατε ὅτι ἕνα τοπικὸν ἀκρότατον τῆς f ὑποκειμένη εἰς τὴν συνθήκη $x_1+\cdots+x_n=a$ εἶναι τὸ $a^k\cdot n^{1-k}$.

4. α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη καὶ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ὑποκειμένη εἰς τὰς συνθήκας $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ καὶ $z=x+y$.

β) Δώσατε μία γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ ἀνωτέρω ἀποτελέσματος.

5. Δίδεται ἡ συνάρτησις $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}\cdot\left(1-\frac{x_1^{\beta_1}}{b_1}-\cdots-\frac{x_n^{\beta_n}}{b_n}\right)^a$, ὅπου αἱ ἐμφανιζόμεναι σταθεραὶ εἶναι πᾶσαι θετικαὶ καὶ εἶναι ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ συνόλου $\Omega=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\frac{x_1^{\beta_1}}{b_1}+\cdots+\frac{x_n^{\beta_n}}{b_n}<1\right\}\cap(0,+\infty)\times\cdots\times(0,+\infty)$.

Δείξατε ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ἐπιδέχεται ἕνα μόνον μέγιστον ἐντὸς τοῦ Ω.

<u>Λύσις</u>: Ἡ f εἶναι συνεχὴς καὶ θετικὴ ἐντὸς τοῦ συμπαγοῦς $\overline{\Omega}$ καὶ μηδενίζεται ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ Ω, ὁπότε ἐπιδέχεται ἕνα τοὐλάχιστον μέγιστον ἐντὸς τοῦ Ω (βλέπε, θεώρ. V-1-1). Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μοναδικό. Ἐπειδὴ ἡ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ἔχει παραγώγους πάσης τάξεως ὡς πρὸς ὅλες τὶς μεταβλητές, ἀρκεῖ τὸ σύστημα: $\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$, $i=1,2,\ldots,n$ νὰ ἔχῃ μοναδικὴ λύσιν,

$$\text{Εἶναι } \frac{\partial f}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,\ldots,n \iff \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{b_1}+\frac{a\beta_1}{a_1b_1}\right)x_1^{\beta_1}+\frac{1}{b_2}x_2^{\beta_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}x_n^{\beta_n}=1\\ \frac{1}{b_1}\cdot x_1^{\beta_1}+\left(\frac{1}{b_2}+\frac{a\beta_2}{a_2b_2}\right)x_2^{\beta_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}x_n^{\beta_n}=1\\ \vdots\\ \frac{1}{b_1}x_1^{\beta_1}+\frac{1}{b_2}x_2^{\beta_2}+\cdots+\left(\frac{1}{b_n}+\frac{a\beta_n}{a_nb_n}\right)x_n^{\beta_n}=1\end{array}\right\}\ (\Sigma)$$

Ἡ ὁρίζουσα τούτου εἶναι:

$$|A|=\frac{1}{b_1b_2\cdots b_n}\begin{vmatrix}1+\frac{a\beta_1}{a_1} & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+\frac{a\beta_2}{a_2} & \cdots & 1\\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\frac{a\beta_n}{a_n}\end{vmatrix}=\frac{a^n\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}{b_1b_2\cdots b_na_1a_2\cdots a_n}\left(1+\frac{a_1}{a\beta_1}+\cdots+\frac{a_n}{a\beta_n}\right)>0.$$

Συνεπῶς τὸ (Σ) εἶναι σύστημα Grammer μὲ ἀγνώστους $y_i=x_i^{\beta_i}$, $i=1,2,\ldots,n$.

Ἐπίσης εἶναι: $A_i=\frac{a^{n-1}\cdot\beta_1\cdots[\beta_i]\cdots\beta_n}{b_1\cdots[b_i]\cdots b_n\,a_1\cdots[a_i]\cdots a_n}$, $i=1,2,\ldots,n$.

Ἄρα ἡ μοναδικὴ λύσις τοῦ (Σ) εἶναι: $y_i=x_i^{\beta_i}=\frac{A_i}{|A|}=\frac{b_i\,a_i}{\left(1+\frac{a_1}{a\beta_1}+\cdots+\frac{a_n}{a\beta_n}\right)a\beta_i}>0$, $i=1,2,\ldots n$ (δεκτὴ λύσις).

6. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ὑπάρχει ἕνα σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα $PA^2+PB^2+P\Gamma^2$ νὰ καθίσταται ἐλάχιστον καὶ ὅτι τὸ Ρ εἶναι τὸ βαρύκεντρον τοῦ τριγώνου.

ΠΙΝΑΞ ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΩΝ ΟΝΟΜΑΤΩΝ ϗ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΡΩΝ

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. APOSTOL,T. : Advanced Calculus. Addison-Wesley, 1965.
2. BASS,J. : Cours de Mathématiques, vol. I. Masson, Paris, 1961.
3. BUDAC,B.-FOMIN,S. : Multiple Integrals (Translated from the Russian). Mir Publishers, Moscow, 1973.
4. COURANT,R. : Differential and Integral Calculus, vol. II. Interscience Publishers Inc. N. York, 1947.
5. CREIGTON BUCK,R. : Advanced Calculus. Mc Graw-Hill, N. York - London, 1956.
6. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ,Δ. : Ανώτερα Μαθηματικά, Τόμ. Β', Αθήνα, 1970.
7. DIXMIER,J. : Cours de Mathêmatiques du première cycle. Gauthier - Villars, Paris, 1972.
8. DIXON,C. : Applied Mathematics of Science and Engineering. John Wiley and Sons, London, 1971.
9. FLETT,T.M. : Mathematical Analysis. Mc Graw-Hill, London, 1966.
10. GARNIER,H. : Fonctions de variable réeles I. Gauthier-Villars, Paris, 1963.
11. GOODMAN, A.W. : Modern Calculus with Analytic Geometry. Mc Millan Company, N. York, 1968.
12. GOURSAT,E. : Cours d' Analyse Mathématique, vol. I,II. Gauthier - Villars, Paris, 1933.
13. HAGUE,B. : An Intoduction to vector Analysis. Methuen and Co Ltd, London, 1970.
14. ΚΑΠΠΟΥ,Δ. : Ασκήσεις Αναλύσεως I, τεύχος Β', Γ'. Αθήνα, 1967.
15. ΚΑΠΠΟΥ,Δ. : Ασκήσεις Αναλύσεως II, τεύχος Α'. Αθήνα, 1967.
16. ΚΡΗΤΙΚΟΥ,Ν. : Πρόχειρες σημειώσεις Ανωτέρων Μαθηματικών, τόμ. I, II.
17. ΛΕΓΑΤΟΥ,Γ. : Γενικά Μαθηματικά, τεύχος Β'. Αθήνα, 1967.
18. LAINE,E. : Precid d' Analyse Mathêmatique. Vuibert, Paris,1946.
19. LIPSCHUTZ,M. : Differential Geometry. Schaum's Outline series, Mc Graw-Hill, 1969.
20. ΜΠΡΙΚΑ,Μ. : Μαθήματα Θεωρίας Επιφανειών, τεύχος I,II. Αθήνα,1967.
21. ΠΑΛΛΑ, ΑΡ. : Ολοκληρωτικός Λογισμός, Αθήνα, 1960.
22. PISKOUNOV,N. :Calcul Diffèrentiel et Intégral, vol.II, Moscou, 1969.
23. PISOT,C. - ZAMANSKY,M. : Mathêmatiques Gènèrales. Dunod, Paris, 1963.

24. PROTTER - MORREY : Modern Mathematical Analysis. Addison - - Wesley, Massachusetts, London, 1964.

25. QUINET,J. : Cours êlementaires de mathêmatiques Supêrieurs, tom. 5. Dunod, Paris, 1968.

26. SMIRNOV,V.: Advanced Calculus, vol. 2. Pergamon Press, 1964.

27. SPAIN,B. : Vector Analysis. Van Nostrand Company Ltd, London, 1967.

28. SPIEGEL,M. : Advanced Calculus. Schaum's Outline Series, 1963.

29. STOKER,J. : Differential Geometry. Wiley-Intercience, N. York - London, 1969.

30. LASS,H. : Vector and Tensor Analysis, Ed. Mc Graw-Hill, N. York 1950.

31. SMIRNOV,V. : A cours of Higher Mathematics, Pergamon Press,1964.

32. SPIEGEL,M. : Vector Analysis, McGraw-Hill.